Matemáticas II
Programa de Bachillerato
Álvaro Tello Crino

Ayudantía 4: TFC e Integrales Definidas

Resumen:

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC):
Si *f* es continua en el intervalo I y $a \in I$, entonces G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Entonces es derivable en I y $\frac{d}{dx}(G(x)) = f(x)$

Segundo TFC:
Sea *f* integrable en [*a*,*b*], si existe una función F continua y derivable en [*a*,*b*], tal que F'(*x*)=f(x), entonces:

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_b^a = F(a) - F(b)$$

Integración por cambio de variable:

Sea *g* una función cuyo recorrido es un intervalo I=[*a*,*b*], y sea *f* una función continua en I, si F es una primitiva de *f* en I, y *g* derivable en I, entonces si *u=g(x)* y *du=g'(x)dx*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Área bajo una curva:

Si *f* es una función definida en [*a*,*b*] y *f* cambia un número finito de veces de signo en [*a*,*b*], si R es la región entre la curva y el eje x, se puede calcular el área de R de la forma:

$$\text{Área}(R)\Big|_a^b = \int_a^b |f(x)|dx$$

P1) [Control 3 año 2012 y 2010]
Calcule la derivada de:

a)$F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6} dt$

b)$F(x) = \int_{-2x}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt$

P2) [Clase auxiliar de Cálculo Diferencial e Integral]
Sea $F(x) = \int_0^x (u-x) f'(u) du$, con *f'* integrable en [*0*,*x*]. Pruebe que

$$F'(x) = f(0) - f(x)$$

P3) [Control 2 año 2009]

a) Calcule el área comprendida entre las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 3$
b) Sea $f: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Demuestre que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx \leq 1$$

P4) [Control 3 año 2010]
Calcule el área de la región comprendida entre $y = x^2 - 1$ e $y = x - 1$

P5) [Preguntas extras]
Calcule:

a) Área bajo la curva de sin(x) entre 0 y 2π
b) $\int_0^a \frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
c) $\int_0^1 x(x^2-1)^2 dx$
d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}} dx$

P6) [Propuesto]
Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Se define $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$F(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t)\, dt$$

Explique porqué F es derivable y muestre que $F''(x) - F(x) = f(x)$