Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Curso: Algebra y Geometría, Otoño 2013
Profesor: Patricio Quiroz

Uuuuuuuuultima Guía de Ejercicios

Los ejercicios marcados con (*) son de mayor dificultad.

1. Lea los apuntes de clase realizando (o al menos pensando un rato) los ejercicios propuestos allí.

2. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique las verdaderas y dé un contraejemplo para las falsas.

   (a) Los vectores propios son vectores distintos de 0.
   (b) Los valores propios son números reales distintos de 0.
   (c) La suma de dos vectores propios es un vector propio.
   (d) Vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
   (e) Un vector propio no puede estar asociado a dos valores propios distintos.
   (f) Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.
   (g) Las matrices A, A^t, PAP^{-1} tienen los mismos valores propios.
   (h) Si una matriz $A \in \mathbb{M}_5(\mathbb{R})$ tiene menos de 5 valores propios distintos, no es diagonalizable.
   (i) Toda matriz invertible es diagonalizable.
   (j) Toda matriz diagonalizable es invertible.
   (k) Si A es invertible entonces A y A^{-1} tienen los mismos valores propios.
   (l) Si A es invertible y 1 es un valor propio de A, entonces 1 es valor propio de A^{-1}.
   (m) Una matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ cuyas columnas forman un conjunto ortogonal es invertible y satisface $P^{-1} = P^t$.
   (n) Una matriz simétrica con coeficientes positivos es definida positiva.
   (o) (*) Cualquier vector propio correspondiente a un valor propio distinto de cero de una matriz A satisface $v \in Col(A)$, donde $Col(A)$ es el espacio generado por las columnas de A.

3. Pruebe que si $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$.

4. Considere las matrices:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Para cada una de las matrices:

   (a) Calcular el polinomio característico.
   (b) Encontrar los valores propios y una base para cada uno de los subespacios propios asociados a cada valor propio.

(c) Encuentre las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada valor propio. Decida si la matriz es diagonalizable.

(d) Si la matriz, digamos A, es diagonalizable, encuentre una matriz invertible P tal que $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal. Además, calcule A^m para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

5. Escriba una fórmula para $det(A)$ si $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Calcule $p_A(\lambda)$ para $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

6. Pruebe que si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ y $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $p_A(\lambda) = p_{PAP^{-1}}(\lambda)$ y $p_A(\lambda) = p_{A^t}(\lambda)$.

7. (*) Encuentre el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda I \text{ no es invertible}\}$ para las funciones lineales $\mathfrak{D}, \mathfrak{I}$ (derivación e integración) definidos sobre el espacio de funciones infinitamente diferenciables.

8. Pruebe que si todo vector no nulo en un espacio vectorial de dimensión finita es vector propio de una transformación lineal T, entonces $T(v) = \lambda v$ para todo v, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar fijo.

9. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$. Encuentre todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales A es diagonlizable.

10. Pruebe que $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ tiene sólo valores propios reales y es diagonalizable.

11. Sea $p_A(\lambda)$ el polinomio característico de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

    (a) Sea $B = cA$, donde c es un número real distinto de 0. Pruebe que $p_B(\lambda) = c^n p_B(\frac{\lambda}{c})$.

    (b) Pruebe que si A es anti-simétrica (i.e. $A = -A^t$), entonces $p_A(-\lambda) = (-1)^n p_A(\lambda)$. Concluya que si n es par (impar), entonces $p_A(\lambda)$ tiene sólo potencias pares (impares).

    (c) Si A es invertible, entonces $p_{A^{-1}}(\lambda) = det(A)^{-1}(-\lambda)^n p_A(\frac{1}{\lambda})$.

12. Determinar valores y vectores propios de las siguientes transformaciones lineales y matrices (es decir, determine las raices del polinomio característico correspondiente y bases para los subespacios propios asociados). Si $T : V \to V$, $dim(V) = n$ y $V \neq \mathbb{R}^n$, entonces ¿cómo proceder? Recuerde que en este caso, T tiene una matriz asociada...

    (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

    (b) $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_0x + a_2x^2$.

    (c) $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $T(A) = A^t$.

    (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

13. Determine $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $(\mathbb{R}^2)_{-2} = \langle\{(3, 1)\}\rangle$ y $(\mathbb{R}^2)_3 = \langle\{(-2, 1)\}\rangle$.

14. (**Otro criterio de diagonalización**)

    El teorema de **Cayley-Hamilton** nos dice que si el polinomio característico de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ es $p_{_A}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, entonces $p_{_A}(A) = a_0 + a_1 A + \cdots + a_n A^n = 0_{_{\mathbb{M}_n(\mathbb{R})}}$. Así, podemos considerar el polinomio $m_{_A}(\lambda)$ de menor grado, cuyo coeficiente líder sea 1 (el coeficiente que acompaña a la mayor potencia de λ) tal que $m_{_A}(A) = 0_{_{\mathbb{M}_n(\mathbb{R})}}$. Este polinomio es conocido como **polinomio minimal** de A. Se sabe además que $p_{_A}(\lambda)$ y $m_{_A}(\lambda)$ tienen las mismas raices. Así, si $p_{_A}(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{\alpha(\lambda_i)}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces $m_{_A}(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ y $n_i \leq \alpha(\lambda_i)$. En este caso, se tiene

    $$A \text{ diagonalizable } \Leftrightarrow m_{_A}(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i).$$

    Use este criterio para re obtener los resultados del ejercicio 4.

15. Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A + 2I$. Pruebe que si 2 no es valor propio de A, entonces $A + I$ no es invertible.

16. Sea $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ no invertible, simétrica y tal que

    $$Ker(A+I) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

    Pruebe que los valores propios de A son 0 y -1, y que $Ker(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$.

17. ¿Cuáles son los posibles valores propios de A si $A^2 = A$ o $A^2 = I$?

18. Sean $n, k > 1$ y $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$. Pruebe que 0 es el único valor propio de A y que A no es diagonalizable.

19. Sea $n > 1$. Pruebe que si A es diagonalizable, entonces $Ker(A^2) \subset Ker(A)$.

20. (*) Sea $A = PDP^{-1}$, donde P es invertible y D diagonal. Demuestre que si 1 y -1 NO son valores propios de A, entonces

    $$B = I + A + A^2 + \cdots A^k$$

    es invertible para todo $k \in \mathbb{N}$. En tal caso, encuentre la inversa.

21. (*) Demuestre que los valores propios de A^2 son $\lambda_1^2, ..., \lambda_k^2$, donde $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son los valores propios de A. Pruebe que lo mismo ocurre si reemplazamos el exponente 2 por cualquier número natural m.

22. (*) Una matriz de probabilidad es una matriz de $n \times n$ que tiene dos propiedades: i) $a_{ij} \geq 0$ para todo i, j. ii) La suma de los coeficientes de cada columna es 1. Demuestre que 1 es valor propio de una matriz de probabilidad.

23. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $b \neq 0$. Sea m una raíz (real o compleja) de la ecuación

$$bx^2 + (a-d)x - c = 0.$$

Demuestre que $a + bm$ es un valor propio de A con vector propio correspondiente $\begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}$. Esto nos entrega un método sencillo para calcular los valores y vectores propios de las matrices de 2×2.

24. (*) Pruebe el teorema de Cayley-Hamilton (ver ejercicio 14) para matrices diagonalizables, es decir, pruebe que si A es diagonalizable, entonces $P_A(A) = 0$.

25. Use el teorema de **Cayley-Hamilton** para encontrar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(**Ayuda:** Si $p_A(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$, entonces $p_A(A) = a_nA^n + \cdots + a_1A + a_0I = 0_{\mathbb{M}_n(\mathbb{R})}$. Por lo tanto, si $a_0 \neq 0$ se tiene que $A(-\frac{a_n}{a_0}A^{n-1} - \cdots - \frac{a_1}{a_0}I) = I$. Note que aunque este método nos entrega la inversa de una matriz, no constituye una nueva caracterización de invertibilidad de una matriz ya que $a_0 = detA$!!)

26. Pruebe que una matriz simétrica A es definida positiva si y sólo si tiene sus valores propios positivos.

27. Escriba la ecuación de la forma cuadrática $q(x,y,z) = 3x^2 - 2xy + y^2 - yz + 7z^2$ en la forma $q(x) = x^tAx$.

28. En cada caso, identifique la cónica, escriba la ecuación eliminando los términos de la forma axy (i.e. haga un cambio de variables del tipo $y = P^tx$) y grafique:

    (a) $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 5 = 0$.

    (b) $5x^2 + 12xy - 2\sqrt{3}x = 36$.