Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Curso: Algebra Lineal, Otoño 2013
Profesor: Patricio Quiroz

Tercera Guía de Ejercicios

1. Lea los apuntes de clase realizando (o al menos pensando un rato) los ejercicios propuestos allí.

2. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique las verdaderas y dé un contraejemplo para las falsas.

   (a) Todo espacio vectorial debe contener un neutro aditivo y un neutro multiplicativo.

   (b) La intersección de dos subespacios vectoriales del mismo espacio vectorial puede ser vacía.

   (c) La unión de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, es un subespacio vectorial de V si y sólo si, uno esta contenido en el otro.

   (d) Si un conjunto de vectores contiene al vector cero, entonces es linealmente dependiente.

   (e) Geométricamente, los subespacios de $\mathbb{R}^3$ generados por dos vectores son planos que pasan por el origen ($0 \in \mathbb{R}^3$).

   (f) Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ pueden ser generados por una cantidad finita de vectores.

   (g) Los espacios vectoriales $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no puden ser generados por una cantidad finita de vectores.

   (h) Analizar independencia lineal de un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ equivale a analizar la existencia única de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales del tipo $Ax = 0$.

   (i) Analizar independencia lineal de un conjunto de vectores en un espacio vectorial cualquiera equivale a analizar la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

3. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$. Dibuje los conjuntos en cada caso.

   (a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y < 0\}$.

   (b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$.

   (c) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$.

   (d) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (e) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^3\}$.

   (f) Para una matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times 2}(\mathbb{R})$, definimos el conjunto solución del sistema lineal homogéneo $AX = 0$. $W = \{X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid AX = 0 \ (0 \in \mathbb{R}^2)\}$.

4. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}[x]$.

   (a) $U = \mathbb{Q}[x]$.
   (b) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}\}$.
   (c) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(2) = 0\}$.
   (d) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(x) = a + x^3,\ a \in \mathbb{R}\}$.
   (e) $U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \partial(p(x)) \leq 3\}$.

5. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) $Y = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^2 = I\}$.
   (b) El conjunto de matrices triangulares superiores. $Y = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$.
   (c) El conjunto de matrices simétricas. $Y = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$.
   (d) $Y = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z},\ \forall\, i, j \in \{1, ..., n\}\}$.
   (e) El conjunto de matrices de traza nula. $Y = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$.

6. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   (a) $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (las funciones continuas con dominio y codominio $\mathbb{R}$)
   (b) $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (las funciones acotadas con dominio y codominio $\mathbb{R}$)
   (c) $G = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 7\}$.
   (d) $G = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-3) = f(10)\}$.
   (e) $G = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ monótona }\}$.

7. Para cada uno de los subespacios en los ejercicios 3-6, dé dos ejemplos de vectores linealmente independientes y dos ejemplos de vectores linealmente dependientes. Para cada uno de los subespacios en los ejercicios 3-5, encuentre un conjunto finito de generadores.

8. Pruebe que en un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se cumple:

   (a) $0v = 0$, para todo $v \in V$.
   (b) $\lambda 0 = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (c) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Si $\lambda v = 0$, entonces $\lambda = 0$ o $v = 0$.
   (d) En los ítems anteriores, ¿todos los símbolos 0 significan lo mismo?.

9. Dado un conjunto de vectores linealmente independiente $\{v_1, ..., v_n\}$ en un espacio vectorial V. Demuestre que el conjunto $\{v_1, ..., v_i + \lambda v_j, ..., v_n\}$ es linealmente independiente para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y para todo $i \neq j$.

10. Realice los problemas P1-P4 de los apuntes de Ingeniería (páginas 81,82).

Finalmente algunos consejos que espero les ayuden en sus estudios ya que muchas veces los alumnos estudian pero estudian en la dirección equivocada.

• Si se va a predisponer de alguna manera, mejor que sea a disfrutar que a sufrir.
• Lea sus apuntes antes de resolver cualquier guía. Responda a los ejercicios y preguntas que se proponen allí. Haga esto clase a clase. Un trabajo constante trae mejores resultados que estudiar a última hora.
• Búsquele un sentido a lo que estudia, además de "si no paso este ramo no termino mi carrera". Trate de responder a preguntas del tipo ¿Por qué y para qué a alguien (o a más de alguien) se le ocurrió definir esto?.
• Concéntrese más en comprender definiciones y teoremas que en cálculos algorítmicos (sin dejar estos últimos de lado).
• Realice las guías. Resista la tentación de preguntar la respuesta o ver ejercicios resueltos si no puede desarrollar los ejercicios al primer intento. Pensar distintas maneras de resolver un problema por harto rato o revisar denuevo la materia trae mejores resultados (el trabajo lo hace uno y no otro).