Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Curso: Algebra Lineal, Otoño 2013
Profesor: Patricio Quiroz

Segunda Guía de Ejercicios

1. Lea los apuntes de clase realizando (o al menos pensando un rato) los ejercicios propuestos allí.

2. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique las verdaderas y dé un contraejemplo para las falsas.

   (a) Si $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, los productos AB^t y A^tB están definidos.

   (b) Si $AB = C$ y C tiene 2 columnas, entonces A tiene 2 columnas.

   (c) Si multiplicamos por la izquierda una matriz diagonal a una matriz cualquiera A obtenemos que la nueva matriz es la matriz A con las filas ponderadas.

   (d) Si $AB = AC$, entonces $B = C$.

   (e) Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

   (f) Si A y B son matrices cuadradas, entonces $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

   (g) La traspuesta de una matriz elemental es una matriz elemental.

   (h) Una matriz elemental debe ser cuadrada.

   (i) Toda matriz es producto de matrices elementales.

   (j) Las matrices elementales sirven para encontrar la inversa de una matriz.

   (k) Todas las matrices elementales son cuadradas.

   (l) Si $AB = I$, no necesariamente se tiene que $BA = I$.

3. Considere tres industrias cuyos procesos de producción estan gobernados por la matriz de consumo (la matriz formada por los α_{ij} en el modelo de Leontief visto en clases) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$.
   Si la demanda de los consumidores esta dada por $(0.1, 0.3, 0.1)$, ¿es posible que estas 3 industrias produzcan de tal manera de satisfacer exactamente la demana de los consumidores?

4. Una matriz de 3×3 con coeficientes reales $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, es llamada "**cuadrado mágico**" si la suma de los elementos de una misma fila, de una misma columna y de una misma diagonal es el mismo número, digamos s.

   (a) Reescriba las condiciones para que la matriz de arriba sea un cuadrado mágico como un sistema de 8 ecuaciones lineales en las variables s, a_i, b_i, c_i $(1 \leq i \leq 3)$ y aplique el algoritmo visto en clases para escribir la matriz aumentada del sistema en forma escalonada por filas.

(b) Pruebe que $3b_2 = s$.

(c) Reemplace las estrellas por números para convertir la matriz $\begin{bmatrix} \star & 1 & \star \\ \star & \star & \star \\ 2 & \star & 4 \end{bmatrix}$ en un cuadrado mágico.

5. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ tales que $f + f' + f'' + f''' = 1$.

6. Encuentre un sistema de ecuaciones lineales de 3 ecuaciones y 3 incógnitas tal que $(3, 1, 2)$ y $(1, -1, 4)$ sean soluciones de dicho sistema.

7. Una matriz cuadrada A es llamada **simétrica** si $A = A^t$ y es llamada **antisimétrica** si $A = -A^t$.

   (a) Dadas n ciudades, sea d_{ij} la distancia entre la ciudad i y la ciudad j, para $1 \leq i, j, \leq n$. Muestre que la matriz (d_{ij}) es simétrica.

   (b) Considere n personas haciendo negocios entre ellas. Sea a_{ij} la cantidad de dinero que le debe la persona i a la persona j, para $1 \leq i, j \leq n$. Muestre que la matriz (a_{ij}) es antisimétrica.

   (c) Suponga que una aerolinea realiza vuelos entre n lugares distintos. Sea c_{ij} la cantidad de vuelos que realiza la aerolinea entre el lugar i y el lugar j, para $1 \leq i, j \leq n$. ¿La matriz (c_{ij}) es simétrica?

   (d) Pruebe que al sumar matrices simétricas (resp. antisimétricas) da como resultado una matriz simétrica (resp. antisimétrica). ¿Y si multiplicamos una matriz simétrica (o antisimétrica) por un escalar? ¿Para qué sirve esto?

   (e) Pruebe que toda matriz no nula se puede escribir de manera única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. ¿Qué utilidad puede tener este hecho?

8. Sean $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ triangulares superiores.

   (a) Pruebe que AB es triangular superior.

   (b) Pruebe que $(AB)_{ii} = A_{ii}B_{ii}$.

9. Determine si la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ es invertible y de ser así, calcule su inversa.

10. Demuestre que una matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ es invertible si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

11. Sean A y B matrices cuadradas con coeficientes reales. Demuestre

   (a) A es invertible si y sólo si AA^t es invertible.

   (b) Si $A^2 = A$ y definimos $B = I - A$, entonces $B^3 = B$. Si la matriz A es invertible ¿Qué puede decir de A y de B?

12. Se dice que una matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ es una proyección si $P^2 = P$.

    (a) Pruebe que si P es una proyección, entonces $I - P$ es una proyección, donde I es la matriz identidad.

    (b) Pruebe que P es una proyección si y sólo si $P^2(I - P) = 0$ y $P(I - P)^2 = 0$.

    (c) Encuentre $P \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $P^2 \neq P$ y $P^2(I - P) = 0$.

13. Sea $D = diag(d_1, ..., d_n) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ diagonal, con $d_1, ..., d_n$ distintos y $A, B, M, S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

    (a) Pruebe que si $MD = DM$ entonces M es diagonal.

    (b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$.

    (c) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS = D$. Suponiendo que $AB = BA$, verifique que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ conmutan y concluya que $S^{-1}BS$ es diagonal.

Finalmente algunos consejos que espero les ayuden en sus estudios ya que muchas veces los alumnos estudian pero estudian en la dirección equivocada.

• Si se va a predisponer de alguna manera, mejor que sea a disfrutar que a sufrir.
• Lea sus apuntes antes de resolver cualquier guía. Responda a los ejercicios y preguntas que se proponen allí. Haga esto clase a clase. Un trabajo constante trae mejores resultados que estudiar a última hora.
• Búsquele un sentido a lo que estudia, además de "si no paso este ramo no termino mi carrera". Trate de responder a preguntas del tipo ¿Por qué y para qué a alguien (o a más de alguien) se le ocurrió definir esto?.
• Concéntrese más en comprender definiciones y teoremas que en cálculos algorítmicos (sin dejar estos últimos de lado).
• Realice las guías. Resista la tentación de preguntar la respuesta o ver ejercicios resueltos si no puede desarrollar los ejercicios al primer intento. Pensar distintas maneras de resolver un problema por harto rato o revisar denuevo la materia trae mejores resultados (el trabajo lo hace uno y no otro).