Universidad de Chile
Programa Académico de Bachillerato
Curso: Algebra y Geometría, Otoño 2013
Profesor: Patricio Quiroz

Quinta Guía de Ejercicios

Los ejercicios marcados con (*) son de mayor dificultad. Los marcados con (**) son de aun más dificultad, pero son sólo para quien desee hacerlos por placer...

1. Lea los apuntes de clase realizando (o al menos pensando un rato) los ejercicios propuestos allí.

2. Pruebe que $\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W|\ T \text{ lineal}\}$ es un espacio vectorial con la suma y ponderación por escalar usuales de funciones.

3. Considere el espacio vectorial $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (sucesiones en $\mathbb{R}$). Pruebe que $C = \{$ sucesiones convergentes $\} \leq F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ y que $M = \{$ sucesiones crecientes y acotadas $\} \leq C$.

4. Pruebe que $\mathcal{C}(D, \mathbb{R}) \leq F(D, \mathbb{R})$ y que $\mathcal{D}(D, \mathbb{R}) \leq C(D, \mathbb{R})$, donde $D \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ es el conjunto de funciones continuas con dominio D y codominio $\mathbb{R}$, y $\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$ es el conjunto de funciones derivables con dominio D y codominio $\mathbb{R}$.

   Una transformación lineal está únicamente determinada por su efecto sobre una base. En los ejercicios **5-7**, use este hecho.

5. Considere la transformación lineal T determinada por $T(1, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $T(0, 1) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Calcule $T(2, 3)$.

6. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineal tal que $T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ y $Ker(T) = Im(T)$.

   Encuentre T.

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal tal que

$$Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} \right\} \right\rangle,\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

   (a) Calcular $dim(Ker(T))$ y encontrar base de $Ker(T)$.
   (b) Encontrar $T(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Encontrar una base para $Im(T)$.
   (d) Estudiar inyectividad y epiyectividad de T.

   En los ejercicios **8-19** se trabaja en la *"filosofía del álgebra lineal en dimensión finita"* (conocer las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, saber como pasar de V a $\mathbb{R}^n$ y como pasar de $T : V \to W$ a $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

8. Pruebe que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es de la forma $T(v) = Av$, para alguna matriz $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

9. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Encuentre una base para $Col(A)$ y para $Nul(A)$.

10. Encuentre una base para $\langle\{v_1, ..., v_5\}\rangle$, donde $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

11. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$. Encuentre una base para $Col(A)$ y para $Nul(A)$.

12. Encuentre las coordenadas de los siguientes vectores v con respecto a las bases (ordenadas) dadas, en los espacios vectoriales indicados:

    (a) $v = (\sqrt{2}, 5) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(0,1),(1,0)\}$, $\mathcal{B}'' = \{(1,-1),(1,2)\}$.

    (b) $v = 2 + x - 3x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{B}' = \{2 + x, 2 - x, x - x^2\}$.

    (c) $v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \pi \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,
    $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

    (d) $v = f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in V \leq \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, definida por $f(x) = \cos(2x)$, donde $V =< \{1, \sin, \sin^2\} >$. $\mathcal{B} = \{1, \sin, \sin^2\}$, $\mathcal{B}' = \{2\sin, -3\sin^2, -1\}$.

13. Sabemos que si un espacio vectorial V tiene dimensión finita, entonces dicho espacio es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ donde n es la dimensión de V. Esto pues, dada una base B de V, la función $T : V \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(v) = [v]_B$, es un isomorfismo (compruebe este hecho y asegúrese de entender conceptualmente qué significa que dos espacios vectoriales sean isomorfos). Este isomorfismo depende de la base B del espacio V. Si consideramos otra base para V, digamos B', tendremos otro isomorfismo $T' : V \to \mathbb{R}^n$ definido por $T'(v) = [v]_{B'}$. ¿Tienen alguna relación T y T'? es decir, ¿las coordenadas de un vector v con respecto a la base B, i.e, $[v]_B$ tienen relación con las coordenadas de dicho vector con respecto a la base B', i.e., $[v]_{B'}$? En el mundo lineal debería bastar con saber que pasa con los vectores de las bases...

    (a) Considere las bases $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Encuentre $[(1,0)]_{B'}$, $[(0,1)]_{B'}$. Use esta información para encontrar $[(-1,3)]_{B'}$. ¿Puede generalizar lo que hizo anteriormente para encontrar $[(a,b)]_{B'}$, para cualquier vector (a,b)?

(b) Considere las bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{B}' = \{2+x, 2-x, x-x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Encuentre $[1]_{B'}$, $[x]_{B'}$, $[x^2]_{B'}$. Use esta información para encontrar $[1+x+x^2]_{B'}$. ¿Puede generalizar lo que hizo anteriormente para encontrar $[a+bx+cx^2]_{B'}$, para cualquier vector $a+bx+cx^2$?

(c) Considere bases $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2\}$ de un espacio vectorial V. Si tenemos un vector $v \in V$, con $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$, ¿Cómo obtener $[v]_{\mathcal{B}'}$?. Como $\mathcal{B}'$ es base, sabemos que existen únicos escalares $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ tales que

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 \\ v_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2, \end{aligned}$$

luego $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 a_{11} w_1 + \lambda_1 a_{21} w_2 + \lambda_2 a_{12} w_1 + \lambda_2 a_{22} w_2$. Así, $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12}\\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22}\end{pmatrix} = P[v]_{\mathcal{B}}$, donde $P = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$. Decimos que P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Encuentre la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. ¿Qué observa?. Generalice esto a un espacio vectorial de cualquier dimensión $n \in \mathbb{N}$.

14. Sea $\psi : \mathcal{L}(V, W) \to \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, dada por $\psi(T) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$, donde $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son bases fijas de V y W respectivamente, y donde m, n son las dimensiones de V y W respectivamente. Pruebe que ψ es un isomorfismo.

15. (a) Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ a $\mathcal{B}' = \{1-x, 1-x^2, x+x^2\}$. Use dicha matriz para encontrar las coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

    (b) Sea $\mathcal{D} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la función dada por $\mathcal{D}\big(p(x)\big) = p'(x)$. Encuentre la matriz representante de $\mathcal{D}$ con respecto a $\mathcal{B}'$, es decir, encuentre $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\mathcal{D})$.

16. Considere la función $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2z\\ x+w\\ 2y+w\end{pmatrix}$.

    (a) Encuentre $A \in \mathbb{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $T(v) = Av$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$. Encuentre la matriz de T con respecto a las bases canónicas. ¿Qué observa?, ¿Será cierto en general?.

    (b) Encuentre $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$, donde $\mathcal{B}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}'$ es la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

17. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Sea $T : \mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(B) = AB$.

    (a) Determine la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas.

    (b) Calcule el rango de T.

(c) Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Encuentre la matriz representante de T con respecto a estas bases, es decir, encuentre $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$.

18. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 y $S_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas con coeficientes reales de 2×2. Se define la transformación lineal $T : S_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ por $T(A) = a_{21} + (a_{12} + a_{11})x + 2a_{11}x^2$. Considere además las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$.

    (a) Calcular la matriz A, representante de T con respecto a estas bases.

    (b) Encuentre la transformación lineal $S : S_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ cuya matriz representante relativa a estas bases sea A^t .

19. Considere $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = \frac{A+A^t}{2}$.

    (a) Pruebe que T es lineal.

    (b) Encuentre $Ker(T)$ y calcule el rango de T.

    (c) Considere la siguiente base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

    $$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

    Calcule la matriz representante de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ en el espacio de partida y de llegada.

    (d) Usando matrices de cambio de base, encuentre la matriz de T con respecto a la base canónica en el espacio de partida y de llegada.

20. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ definida por $T\big(p(x)\big) = p(x)(x^2 + 1)$.

    (a) Pruebe que T es lineal.

    (b) Encuentre una base para $Ker(T)$ y para $V = Im(T)$ dando sus dimensiones.

    (c) Pruebe que $\mathbb{R}_1[x] \cap V = \{0\}$.

    (d) Calcule $dim(\mathbb{R}_1[x] \oplus V)$ y deduzca que $\mathbb{R}_1[x] \oplus V = \mathbb{R}_4[x]$.

21. (*) Encuentre la proyección $P : \mathbb{R}^3 \to \Pi$ de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\Pi : x + y - z = 0$.

22. Sea $T : V \to W$ lineal. Si $dim(V) = dim(W) < \infty$, pruebe que son equivalentes:

    (a) T es inyectiva.

    (b) T es sobreyectiva.

    (c) T es isomorfismo.

    ¿Qué pasa si $dim(V) = dim(W) = \infty$?

23. Sea $T : V \to V$ lineal, donde V tiene dimensión finita $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que

$$Ker(T) = Im(T) \Leftrightarrow T^2 = 0, n \text{ es par y } \frac{n}{2} \text{ es el rango de } T.$$

24. Sea $T : V \to V$ lineal, con V finito dimensional. Pruebe que

$$V = Ker(T) \oplus Im(T) \Leftrightarrow Ker(T) = Ker(T^2).$$

25. (*) Calcule $Ker(\mathfrak{D})$, donde $\mathfrak{D} : \mathcal{D}(D, \mathbb{R}) \to \mathbb{F}(D, \mathbb{R})$ es la función lineal definida por $\mathfrak{D}(f) : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathfrak{D}(f)(x) = f'(x)$. ¿La función $\mathfrak{D}$ es inyectiva? ¿epiyectiva?. Considere ahora el espacio $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$ de funciones con derivadas de todos los órdenes. Calcule $Ker(\mathfrak{D}^n)$, donde $\mathfrak{D}^n = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{D} \circ \cdots \circ \mathfrak{D}$ (n-veces).

26. (*) Calcule $Im(\mathfrak{I})$, donde $\mathfrak{I} : \mathcal{C}(D, \mathbb{R}) \to \mathbb{F}(D, \mathbb{R})$ es la función lineal definida por $\mathfrak{I}(f) : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathfrak{I}(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. ¿La función $\mathfrak{I}$ es inyectiva? ¿La función $\mathfrak{I}$ es epiyectiva?

27. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Pruebe que para todo $w \in Im(T)$ y para todo $v_0 \in T^{-1}(w)$ se tiene que $T^{-1}(w) = \{v_0 + v \mid v \in Ker(T)\}$.

28. (**) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Pruebe que si una función continua $f : V \to \mathbb{R}$ satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in V$, entonces es lineal.

    En los ejercicios **29-31** se estudiará el significado geométrico de las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

29. Pruebe que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma rectas en subconjuntos de rectas (una recta o un punto). (Ayuda: considere $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto en una recta, i.e., (x, y) satisface $ax + by = c$. Pruebe que $T(x, y)$ satisface la ecuación $(aa_{22} - ba_{21})x + (a_{11}b - a_{12}a)y = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})c$, donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ son los coeficientes de la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.)

30. Considere la transformación lineal T determinada por $T(1, 0) = (-1, 0)$, $T(0, 1) = (0, -1)$. Calcule $T(2, 3)$. Muestre que cada recta que pasa por el origen es transformada en sımisma por T. Esta transformación lineal es llamada *inversión con respecto al origen* ¿Por qué?. Encuentre la matriz de T con respecto a la base canónica.

31. Considere la transformación lineal T determinada por $T(1, 1) = (-1, -1)$, $T(1, -1) = (1, -1)$. Calcule $T(3, 2)$. Muestre que cualquier recta perpendicular a la recta $x + y = 0$ es transformada en sí misma. Muestre que la recta $x+y = 0$ queda fija por T, i.e., $T(x, y) = (x, y)$ para todo (x, y) tal que $x + y = 0$. ¿Qué rectas que pasan por el origen son transformadas en sí mismas?. Esta transformación lineal es llamada *reflexión con respecto a la recta* $x+y = 0$ ¿Por qué?. Encuentre la matriz de T con respecto a la base canónica y con respecto a la base $\{(1, 1), (1, -1)\}$.