

# Pauta Prueba Global de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 03 Junio, 2012

**Tiempo :** 120 minutos .

**Nombre:**

**Sección:**

1. Sea  $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .

(a) Indique en qué intervalos la función es creciente y decreciente. ¿Posee máximos y mínimos?.

(b) Indique en qué intervalos la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

(c) Esboce el gráfico de  $f$ .

(Justifique cada uno de sus resultados)

**Solución:**

(a) Primero calculamos la derivada de  $f$  aplicando la regla del cociente y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(x^2 + 1) - (1 - x^2)2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^3 - 2x - 2x + 2x^3}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que hay sólo un punto crítico, a saber  $x = 0$ .

**(1 pto.).**

También podemos ver el tipo de monotonía de  $f$ . En este caso es simple dado que el denominador de la derivada,  $(x^2 + 1)^2$ , es siempre positivo y el numerador  $-4x$  indica que  $f$  es creciente para  $-4 < x < 0$  (derivada positiva) y decreciente para  $0 < x < 4$  (derivada negativa).

**(1 pto.).**

Además, dado el cambio de signo de positiva a negativa de la derivada antes y después del cero, esto nos dice que en  $x = 0$   $f$  alcanza máximo y es  $f(0) = 1$ . Por estar  $f$  definida en el intervalo  $[-4, 4]$ , con  $f(-4) = f(4) = -15/17$ , posee mínimo en sus extremos.

**(0.5 ptos.).**

(b) Para analizar la concavidad y puntos de Inflexión, comenzaremos por determinar la segunda derivada de  $f$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-4(x^2 + 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-4(x^2 + 1) + 16x^2}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{12x^2 - 4}{(x^2 + 1)^3}, \end{aligned}$$

por lo que los posibles puntos de inflexión de  $f$  son los que satisfacen la ecuación  $12x^2 - 4 = 0$ , es decir  $x = \pm 1/\sqrt{3}$ .

**(1 pto.).**

Observación: Otra manera de discernir si en el punto crítico  $x = 0$  hay máximo o mínimo, es evaluando este valor en la segunda derivada y como  $f''(0) = -4 < 0$ , entonces en  $x = 0$ ,  $f$  alcanza máximo.

Como el denominador de  $f''(x)$  es siempre positivo, sólo debemos analizar el numerador  $12x^2 - 4$ .

Los intervalos a considerar son  $(-4, -1/\sqrt{3})$ ,  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ,  $(1/\sqrt{3}, 4)$ .

Para  $x \in (-4, -1/\sqrt{3})$ ,

$$-4 < x < \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x^2 > \frac{1}{3}, \Rightarrow 12x^2 > 4 \Rightarrow 12x^2 - 4 > 0,$$

así  $f''(x) > 0$  cuando  $x \in (-4, -1/\sqrt{3})$ , y  $f$  es cóncava hacia arriba en este intervalo, lo mismo sucede si  $x \in (1/\sqrt{3}, 4)$ .

Decir que  $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  es lo mismo que:

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x^2 < \frac{1}{3}, \Rightarrow 12x^2 < 4,$$

así  $f''(x) < 0$  cuando  $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ , y  $f$  es cóncava hacia abajo en este intervalo.

**(1 pto.).**

Dado el cambio de concavidad antes y después de los puntos:  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , se concluye que la función posee punto de Inflexión en dichos valores.

**(0.5 ptos.).**

(c) Finalmente, se presentan el resumen de los valores  $f(x)$  en los puntos que determinamos anteriormente:

$x$	$f(x)$
-4	-15/17
$-1/\sqrt{3}$	1/2
0	1
$1/\sqrt{3}$	1/2
4	-15/17

Con todo esto podemos dar una idea del gráfico de  $f$

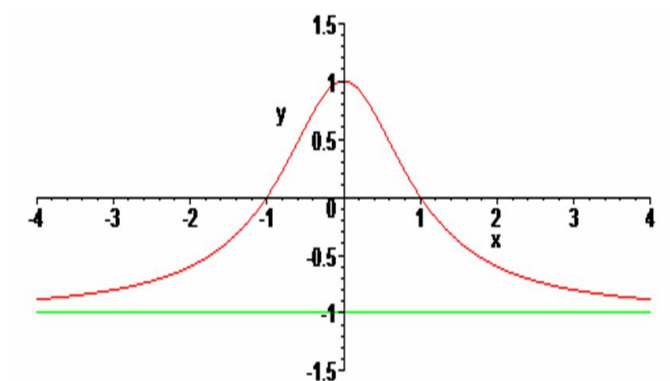


Figura 1: Gráfico

(1 pto.).

**Nombre:**

**Sección:**

2. Resuelva los siguientes problemas.

(i) Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(2x)} - 1}{\sin(x)}$$

(ii) Si  $f$  es diferenciable en  $a$ , donde  $a > 0$ , evalúe el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

**Respuesta (i)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(2x)} - 1}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos(2x)} - 1)(\sqrt{\cos(2x)} + 1)}{\sin(x)(\sqrt{\cos(2x)} + 1)} \quad \mathbf{1punto}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(x)(\sqrt{\cos(2x)} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{\sin(x)(\sqrt{\cos(2x)} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{\sin(x)(\sqrt{\cos(2x)} + 1)} \quad \mathbf{1punto}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{(\sqrt{\cos(2x)} + 1)}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0 \quad \mathbf{1punto}$$

**Respuesta (ii)**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \quad \text{1punto}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a}) \right] \quad \text{0,5punto}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x} + \sqrt{a})$$

$$= f'(a) \cdot 2\sqrt{a} \quad \text{1,5punto}$$

$$= 2\sqrt{a}f'(a)$$

**Variante:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \quad \text{1punto}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a}) \right] \quad \text{0,5punto}$$

$$= f'(a) \cdot 2\sqrt{a} \quad \text{1,5punto}$$

$$= 2\sqrt{a}f'(a)$$

**Nombre:**

**Sección:**

3. Elija sólo uno de los siguientes problemas.

(i) Encuentre la derivada de  $f(x) = \sqrt{\cos(x)} + \sec(x^3 + 2)$ .

(ii) Encuentre  $f'(5\pi)$ , donde  $f(x) = \frac{\tan(x)}{1+\sin(x)}$ .

**Solución:**

(i) Notamos que la función  $f$  es la suma y composición de funciones diferenciables, así que usaremos álgebra de derivadas para encontrar  $f'$ .

Comenzaremos derivamos la suma:

$$f'(x) = (\sqrt{\cos(x)})' + (\sec(x^3 + 2))'$$

**(1.0) pto.**

Ahora, usamos la regla de la cadena para calcular ambas derivadas.

$$a) \quad (\sqrt{\cos(x)})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x)}}(-\sin(x)). \quad \textbf{(2.0) pts.}$$

$$b) \quad (\sec(x^3 + 2))' = \sec(x^3 + 2)\tan(x^3 + 2)(3x^2). \quad \textbf{(2.0) pts.}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} + 3x^2\sec(x^3 + 2)\tan(x^3 + 2).$$

**(1.0) pto.**

(ii) **Primera forma.**

Para encontrar  $f'(5\pi)$  primero encontraremos  $f'$  y luego la evaluaremos en  $5\pi$ .

Notamos que la función  $f$  es el cociente y suma de funciones diferenciables, así que usaremos álgebra de derivadas para encontrar  $f'$ .

Primero derivamos el cociente:

$$f'(x) = \frac{(\tan(x))'(1 + \sin(x)) - \tan(x)(1 + \sin(x))'}{(1 + \sin(x))^2}$$

**(2.0) pto.**

Ahora derivando la suma de funciones y usamos las derivadas que conocemos obtenemos.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(\tan(x))'(1 + \sen(x)) - \tan(x)((1)' + (\sen(x))')}{(1 + \sen(x))^2} \\&= \frac{\sec^2(x)(1 + \sen(x)) - \tan(x)\cos(x)}{(1 + \sen(x))^2} \\&= \frac{\sec^2(x)(1 + \sen(x)) - \sen(x)}{(1 + \sen(x))^2}\end{aligned}$$

**(2.0) pto.**

Antes de evaluar  $f'$  en  $5\pi$  notemos que  $5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi$  y como las funciones  $\sen(x)$  y  $\cos(x)$  son funciones de período  $2\pi$ , podemos concluir que:

$$\sen(5\pi) = \sen(\pi) = 0, \quad \cos(5\pi) = \cos(\pi) = -1 \quad \text{y} \quad \sec(5\pi) = 1/\cos(5\pi) = -1.$$

**(1.0) pto.**

Por lo tanto,

$$f'(5\pi) = \frac{\sec^2(5\pi)(1 + \sen(5\pi)) - \sen(5\pi)}{(1 + \sen(5\pi))^2} = 1.$$

**(1.0) pto.**

**(ii) Segunda forma.**

Usando la definición de derivada en un punto obtenemos que:

$$f'(5\pi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5\pi + h) - f(5\pi)}{h}.$$

**(1.0) pto.**

Notemos que  $5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi$  y como las funciones  $\sen(x)$  y  $\cos(x)$  son funciones de período  $2\pi$ , podemos concluir que:

- (a)  $\sen(5\pi) = \sen(\pi) = 0$
- (b)  $\cos(5\pi) = \cos(\pi) = -1$
- (c)  $\tan(5\pi) = \sen(5\pi)/\cos(5\pi) = 0.$
- (d)  $f(5\pi) = \frac{\tan(5\pi)}{1 + \sen(5\pi)} = 0.$

**(2.0) pts.**



Además la función  $\tan(x)$  es una función de período  $\pi$  por lo que

$$\tan(5\pi + h) = \tan(h),$$

**(1.0) pto.**

por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(5\pi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(5\pi + h)}{1 + \tan(5\pi + h)} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(5\pi + h)}{h(1 + \tan(5\pi + h))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h)}{h(1 + \tan(5\pi + h))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\tan(h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos(h)(1 + \tan(5\pi + h))} \right) \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(h)}{h} \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(h)(1 + \tan(5\pi + h))} \right) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\cos(0)(1 + \tan(5\pi))} \\ &= -1 \end{aligned}$$

**(2.0) pts.**

**Nombre:**

**Sección:**

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de:  $f(x) = \arctg(x^2 - 1)$ , en  $x = \sqrt{2}$ .

**Solución:**

la ecuación de la recta tangente está dada por:  $y - f(\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ .

1.5 puntos.

Para esto hay que determinar  $f'(x)$  donde  $f(x) = \arctg(x^2 - 1)$ , derivando tenemos que:  $f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-1)^2} \cdot 2x$ ,

2 puntos.

luego

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Además } f(\sqrt{2}) = \arctg(\sqrt{2}^2 - 1) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4},$$

1 punto.

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente nos queda:

$$y - \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}).$$

1.5 puntos.

**Nombre:**

**Sección:**

5. Sea  $f(x) = \cos(x)$ . Demuestre que  $|\cos(x) - 1| \leq x, \quad \forall x \geq 0$ .

(Indicación: Use el teorema del valor medio de derivada en un intervalo conveniente.)

**Solución:**

Considera  $y = \cos(x)$  derivable en  $]0, x[$

En tal abierto, se tiene que  $y' = \cos'(x) = -\sin(x)$

1 punto.

Además sabemos que,  $|\sin(x)| \leq 1$  en  $\mathbb{R}$

Tenemos entonces por TVM que  $\exists c \in ]0, x[$  tal que;

$$y - y(0) = y'(c)(x - 0)$$

1.5 puntos.

Tomando valor absoluto:

$$|y - y(0)| = |y'(c)|x - 0| \iff |\cos(x) - \cos(0)| \leq 1 * |x - 0|$$

1.5 punto.

De donde:

$$|\cos(x) - 1| \leq |x|, \forall x > 0$$

Que incluso es válida para  $x = 0$ , o sea:

$$|\cos(x) - 1| \leq x, \forall x \geq 0$$

2 punto.

### OTRA SOLUCION:Trigonométrica

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

De donde,

$$|\cos(x) - \cos(0)| = 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x+0}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-0}{2}\right) \right|$$

O sea,

$$|\cos(x) - 1| = 2 \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \right| * \left| \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leq 2 * 1 * \left| \frac{x}{2} \right| \leq |x|$$

Por tanto,

$$|\cos(x) - 1| \leq x, \forall x \geq 0$$

**Nombre:**

**Sección:**

6. Sea  $f(t) = 2 \operatorname{sen}(\pi t + \frac{\pi}{4})$ .

(a) Grafique  $f(t)$ , para  $t \in [0; \frac{15}{4}]$

(b) Para qué valores de  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $f$  alcanza máximo y mínimo.

**Solución:**

(a)

$$f(t) = 2 \operatorname{sen}(\pi t + \frac{\pi}{4}).$$

**Parámetros:**

Amplitud=2,

Velocidad Angular  $=\pi$ ,  $\Rightarrow$  Periodo  $= \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Desplazamiento eje Y:  $t = -1/4$ .

1 punto.

En  $-1/4 \leq t \leq -1/4 + 2$ , tenemos:

V.medio = 0 en  $t_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $t_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2$ ,  $t_3 = -\frac{1}{4} + 2$ .

V.Máximo=V.medio + Amplitud = 2 en  $t_4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

V.Mínimo=V.medio - Amplitud = -2 en  $t_5 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{5}{4}$

1 punto.

Intersección con eje Y en:  $f(0) = 2 \operatorname{sen}(\pi/4) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Gráfico:  $0 \leq t \leq \frac{15}{4}$

1 punto.

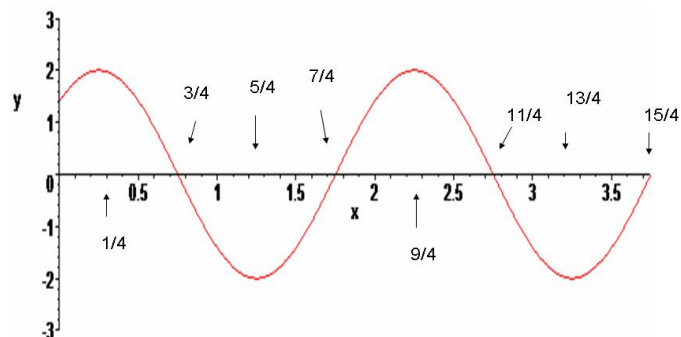


Figura 2: Gráfico

(b)

Valor Máximo :

$$2 \operatorname{sen} \pi\left(t+\frac{1}{4}\right)=2 \Leftrightarrow \pi\left(t+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+2 k \pi$$

0.5 puntos.

$$\Leftrightarrow t+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+2 k$$

0.5 puntos.

Los valores de  $t > 0$  para los cuales  $f$  alcanza máximo son los  $t \in \left\{\frac{1}{2}+2 k, k \in \mathbb{N} \cup\{0\}\right\}$

0.5 puntos.

Valor Mínimo :

$$2 \operatorname{sen} \pi\left(t+\frac{1}{4}\right)=-2 \Leftrightarrow \pi\left(t+\frac{1}{4}\right)=\frac{3 \pi}{2}+2 k \pi$$

0.5 puntos.

$$\Leftrightarrow t+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+2 k$$

0.5 puntos.

Los valores de  $t > 0$  para los cuales  $f$  alcanza un mínimo son los

$$t \in \left\{ \frac{5}{4} + 2k, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

0.5 puntos.