Guía 3 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2013

"Números Reales"

1. Si $x > 0$, ¿es cierto que $x^{-1} > 0$?.
2. ¿Es cierto que si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} > 2$?. ¿Puede encontrar una relación similar para $x < 0$?.
3. Muestre que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + x + 1 = 0$.
4. Muestre que si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. ¿En cuales casos se cumple la igualdad?.
5. Sea $A \in \mathbb{R}$, muestre que el conjunto $\{A - x^2 : x \in \mathbb{R}\}$ tiene un elemento que es el más grande de todos.
6. Considere un rectángulo de perímetro P. Muestre que los lados del rectángulo se pueden escribir en la forma $\frac{P}{4} + a$ y $\frac{P}{4} - a$. Describa a en términos de los lados del rectángulo.
7. Muestre que entre los rectángulos de perimetro P, el cuadrado es el que tiene mayor área.
8. ¿Cuáles son los números reales que están a distancia menor que 2 del -3?.
9. ¿La ecuación $x^2 + xy + y^2 = 0$ tiene solución nula?.
10. Si $x < y$, ¿es cierto que $x^2 < y^2$?.

11. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_k : k \in \{1, \ldots, n\}\}$ un conjunto de números reales. ¿Es cierto que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|?$$

12. Sean x e y números reales. Considere el número

$$M(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Muestre que $M(x, y)$ es el máximo entre x e y. Encuentre una expresión similar para el mínimo entre x e y.

13. (a) Si $0 < r < 1$, muestre que existe $c > 0$ tal que $r = \frac{1}{1+c}$.

(b) Muestre que si $c > 0$ entonces $(1 + c)^n \geq 1 + nc$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Muestre que si $0 < r < 1$, existe $c > 0$ tal que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $r^n \leq \left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$.

14. Sean a, b, δ y ϵ números positivos. Suponga que $|x - a| < \delta$ y que $|y - b| < \epsilon$. Demuestre que

(a) $|x + y - (a + b)| < \delta + \epsilon$

(b) $|xy - ab| < \delta(b + \epsilon) + a\epsilon$

(c) $|x^2 - a^2| < \delta^2 + 2\delta a$

15. Resuelva las siguientes desigualdades en $\mathbb{R}$.

(a) $x < x^2 - 12 < 4x$

(b) $\frac{x-1}{x^2-3x} \geq 0$

(c) $|2x - 3| + |4 - x| < 2$

(d) $|x + 1| - |x - 1| \geq 3x + 2$

(e) $2 < |x^2 - 1| < 3$

(f) $\sqrt{\frac{3x-9}{2x+4}} \geq 1$

(g) $\frac{3}{x-9} > \frac{2}{x+2}$

(h) $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| < \frac{1}{2}$

16. Problemas de Planteo.

a) Las utilidades de un fabricante de cierto producto "A" están determinadas por la expresión: $U(x) = (120 - x)(x - 20)$, en miles de pesos, donde x representa el precio de venta de cada artículo. Determina entre qué valores se debe vender los productos de manera que las utilidades sean superiores a 1600000.

b) Los ingresos de la empresa "A" están determinados por la expresión $I_A(x) = (5 - 2x)^2$, y los ingresos de la empresa "B" por la expresión $I_B(x) = (x + 3)^2$, donde x es la cantidad de artículos vendidos (en miles). Determine el intervalo para x en el cual los ingresos de "B" superan a los de "A".

c) El departamento de recursos humanos de una institución emplea un test de 30 preguntas para determinar la aptitud de un postulante en una sección que atiende público. De acuerdo al tiempo t, en minutos, que emplea en responder el test se calcula un coeficiente de aptitud mediante la fórmula:

$$C.A = \frac{5{,}5\,t - 3(30-t) + 135}{200}.$$

Se ha establecido considerar como aptitud normal a toda persona cuyo $C.A.$ no sea inferior a $0,85$ ni mayor de $1,20$.

(a) Determine el tiempo mínimo que debe emplear un postulante para obtener un $C.A.$ normal.

(b) Determine el tiempo máximo que debe emplear un postulante para obtener un $C.A.$ normal.