Control 2 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 01 de Abril, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sea $a_1 = 1^2 \cdot 2,\ \ a_2 = 3^2 \cdot 4,\ \ a_3 = 5^2 \cdot 6,\ \ a_4 = 7^2 \cdot 8,\ \ a_5 = 9^2 \cdot 10, ...$

   a) Conjeture la forma del término n-ésimo a_n con $n \in \mathbb{N}$.

   Solución:

   Se observa que el primer factor en cada término es un impar al cuadrado y el segundo factor es un número par, de esta manera tenemos que:

   $a_n = (2n-1)^2 \cdot 2n,\ \ n \in \mathbb{N}.$

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   b) Exprese la suma de los $a_k,\ \ k = 1, ..., n$, usando el símbolo $\sum$ y encuentre el valor de su suma utilizando propiedades.

   Solución:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \cdot 2k = \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) \cdot 2k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (8k^3 - 8k^2 + 2k) = 8 \sum_{k=1}^{n} k^3 - 8 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} k\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{3 puntos.}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 8\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2}.$$

Por lo tanto,

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{3}$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

2. Sofía sale a correr todas las mañanas, ella sabe que producto del cansancio cada minuto avanza sólo tres cuartos de la distancia que corrió el minuto anterior. Si hoy partió corriendo 100 metros en el primer minuto, ¿en qué kilómetro se encontrará Sofía a los 200 minutos de carrera?

   Solución:

   Partiremos denotando por a_i a la cantidad de metros que avanza Sofía en el minuto i. Luego, usando el hecho que Sofía corrió 100 metros el primer minuto y que cada minuto avanza sólo tres cuartos de la distancia que corrió el minuto anterior, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
a_1 &= 100 \\
a_2 &= a_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \\
a_3 &= a_2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= a_4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\
\vdots &= \vdots \\
a_i &= a_{i-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por lo tanto, a los 200 minutos de carrera, Sofía ha recorrido

$$\sum_{i=1}^{20} a_i = \sum_{i=1}^{20} 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \left(\frac{100 \cdot 4}{3}\right) \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{3}{4}\right)^{i} \quad \text{metros.}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Finalmente, calculando la sumatoria anterior tendremos

$$\left(\frac{100 \cdot 4}{3}\right) \cdot \frac{\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{21}\right)}{1 - \frac{3}{4}} = \left(\frac{100 \cdot 4}{3}\right) \cdot \frac{\frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right)}{\frac{1}{4}} = 400\left(1 - (3/4)^{20}\right) \quad \text{metros,}$$

es decir, a los 200 minutos de carrera Sofía se encuentra en el kilómetro $0,4\,(1 - (3/4)^{20})$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$