Guía 8 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2013

1. Grafique $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donde D está dado en cada caso y f se define en cada caso.

   a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, donde $D = \mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, donde $D = \mathbb{R}$.

   c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, donde $D - \{1\}$.

   d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$, donde $D = \mathbb{R}$.

   e) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, donde $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

2. Herón de Alejandría en el siglo I de nuestra era, aseguró que el área de un triángulo es
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
donde p es el semiperímetro del triángulo de lados a, b y c. ¿Está usted de acuerdo con Herón?.

3. El teorema del Seno dice que
$$K = \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$
donde a, b y c son los lados de un triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es α, el ángulo en B es β y el ángulo en C es γ. De una interpretación geométrica a K.

4. Si x es tal que $cos(x) \neq 0$, muestre que $tan(x) = tan(x + \pi)$.

5. Si $tan(x) = 1$, sin hacer cálculos encuentre el valor de $cos(x) - sen(x)$.

6. Demuestre que $|sen(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Encuentre una interpretación geométrica para $tan(x)$. Haga lo mismo para $cot(x), sec(x)$ y $csc(x)$.

8. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ tale que $sen(x) + cos(x) = 0$.

9. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $3sen^2(x) + cos^2(x) + cos(x) = 0$.

10. Calcule los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{sen(x)}$

    b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sen^3(t)}{(2t)^3}$

    c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tan(x)}{x}$

    d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x}$

    e) $\lim\limits_{x \to a} |sen(x) - sen(a)|$

    f) $\lim\limits_{x \to a} cos(x) - cos(a)$

    g) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{sen(a + h) - sen(a)}{h}$

    h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{cos(a + h) - cos(a)}{h}$

    i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tan(x) - sen(x)}{x^3 tan(x)}$

$j)$ $\lim_{x\to 0} arcsen\left(\frac{sen(x)}{x}\right)$

$k)$ $\lim_{x\to 0} arctg\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$l)$ $\lim_{x\to -\infty} arctg\left(\frac{(1+3x)^3}{x^2}\right)$

11. Demuestre que si $|x-y|<\epsilon$ entonces $|sen(x)-sen(y)|<\epsilon$. Ayuda: Note que

$$|sen(x)-sen(y)| = \left|2sen\left(\frac{x-y}{2}\right)cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$$

12. Demuestre que para cualquier valor de $x\in\mathbb{R}$, se tiene la igualdad

$$cos^4(x) - sen^4(x) = 1 - 2cos^2(x)$$

13. Encuentre $sen(2x)$ conocidos $sen(x)$ y $cos(x)$. Haga lo mismo para $cos(2x)$ y $tan(2x)$.

14. ¿Es cierto que $sen(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para cualquier $x\in[-1,1]$?.

15. Grafique las funciones siguientes:

    (a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.
    (b) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
    (c) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen(x)+cos(x)$.

16. Una rueda de radio 2 metros gira a razón de 10 vueltas por minuto, en torno al origen. En el instante $t=0$ hay un punto A en la ubicación $(2,0)$. Describa la altura $y(t)$ del punto A con respecto al tiempo. Grafique la función $y(t)$.

17. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(2x)}{3x} & \text{si } x\neq 0 \\ A & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Determine el o los valores de A de manera que f sea una función continua.

18. Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{tan(x)}{sen(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

una función continua. ¿Cuál es el valor de A?.

19. Considere la función $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = arctan(\sqrt{x^2 - 1})$$

Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(2, f(2))$.

20. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = tan^2(sec^3(\sqrt{\pi x}))$

b) $f(x) = x - 3sen(x)$

c) $f(x) = xsen(3x) + cos(x^2)$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{sen(x)}} + \frac{1}{tan(x)}$

e) $f(x) = sen\left(tan\left(\sqrt{1 + x^3}\right)\right)$

f) $f(x) = arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

g) $f(x) = x^2 cos(arcsen(x^2 - 3))$

21. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

22. Sea $f : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{tan(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable.

23. Un mecanismo circular hace mover un pistón, de tal forma que en el segundo t su posición es

$$x(t) = 5 + 3cos(2t)$$

(a) Calcule la velocidad del pistón en cada segundo t.
(b) Determine la máxima velocidad del pistón.

24. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es la Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5,4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0 y su brillantez cambia en $\pm 0{,}35$. En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t, donde éste se mide en días, se modela por la función:

$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35 sen\left(\frac{2\pi}{5{,}4}t\right)$.

(a) Halle la razón de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Grafique B.

25. Se ha modelado la duración de la luz del día (en horas) en la ciudad de Filadelfia en función del día t del año por:

$L(t) = 12 + 2{,}8 sen\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$.

Use este modelo para comparar cómo aumenta el número de horas de luz de día en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

26. Encuentre los puntos sobre la curva $y = \frac{cos(x)}{2+sen(x)}$, en los cuales la tangente es horizontal.

27. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y luego, se deja en ibertad, vibra verticalmente en un movimiento armnico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2cos(t) + 3sen(t)$, $t \geq 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tomando la dirección positiva la correspondiente hacia abajo).

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) Grafique las funciones velocidad y posicin.

Ejercicios Resueltos

1. Demuestre la identidad

$$\cos(y) - \cos(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$

Respuesta:

Observemos que

$$\frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x-y}{2} = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

Por lo tanto, si anotamos $\alpha = \dfrac{x}{2}$ y $\beta = \dfrac{y}{2}$ la identidad se escribe en la forma:

$$\cos(2\beta) - \cos(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

Basta entonces probar esta última identidad.

Considerando las siguientes identidades ya conocidas:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\
\cos(2\beta) &= \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta \\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha
\end{aligned}$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\cos(2\beta) - \cos(2\alpha) &= \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta - (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) \\
&= (\cos^2\beta - \cos^2\alpha) + (\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) \qquad (1)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= (\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha) \\
&= \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\beta - \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \\
&\quad + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}^2\beta \cos^2\alpha \\
&= \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta \cos^2\alpha \\
&= (1 - \cos^2\alpha) \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta \cos^2\alpha \\
&= \cos^2\beta - \cos^2\alpha \qquad (2) \\
&= (1 - \operatorname{sen}^2\beta) - (1 - \operatorname{sen}^2\alpha) \\
&= \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta \qquad (3)
\end{aligned}$$

donde usamos la identidad ya conocida: $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$.

Si en (1) reemplazamos (2) y (3) obtenemos:

$$\cos(2\beta) - \cos(2\alpha) = 2\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)$$

que es la identidad que queríamos demostrar.

2. (a) Demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

   (b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

   Concluya de que para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$.

   Solución:

   a) Recordemos que para una función $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ se tiene por definición que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ si dado $\varepsilon > 0$ (que suponemos es muy pequeño) existe $K > 0$ tal que

   $$x > K \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

   Luego, para probar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ consideremos un número $\varepsilon > 0$ (pequeño), cualquiera. Debemos encontrar $K > 0$ tal que si x es mayor que K entonces $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$.

   Observamos que si $x > K > 0$ entonces $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{x}$.

   Debemos encontrar $K > 0$ tal que:

   $$x > K \Longrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

   Ahora bien, como $\varepsilon > 0$ sabemos por la Propiedad Arquimediana de los números naturales que existe un número natural $K \in \mathbb{N}$ (por tanto $K > 0$) tal que $\dfrac{1}{K} < \varepsilon$. Para este número K se tiene:

   $$x > K \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{K} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

   Es decir, este número $K \in \mathbb{N}$ cumple con lo que buscabamos.

   Esto prueba que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

   Observamos que como $K \in \mathbb{N}$ entonces $x > K \geq 1$. Entonces, para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^p > x$ (pues $x > 1$).

Y esto implica que $\dfrac{1}{x^p} < \dfrac{1}{x}$.

Entonces, para cada $p \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$ elegimos $K \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{K} < \varepsilon$ (Prop. Arq.) y tenemos que

$$x > K \Longrightarrow \frac{1}{x^p} < \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Es decir, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$.

b) Para demostrar que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ basta notar que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = -0 = 0.$$

3. Pruebe que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, y es derivable en $]a,b[$ con $f'(x) = 0\ \forall x \in]a,b[$ entonces f es constante en $[a,b]$.

Solución: Probaremos que $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a,b]$. Para ello, tomemos $x \in]a,b]$ cualquiera y probemos que $f(x)$ es igual a $f(a)$.

Tenemos que $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ es continua, y es derivable en $]a,x[$.

Luego, por el Teorema del Valor Medio, existe $c_x \in]a,x[$ (c_x es un punto que necesariamente depende de x) tal que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$.

Pero por hipótesis, $f'(c_x) = 0$, por lo tanto, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$.

Necesariamente, $f(x) - f(a) = 0$, por lo que $f(x) = f(a)$.

Así, para cualquier $x \in [a,b]$ se tiene que $f(x) = f(a)$, lo que implica que f es constante.

4. Pruebe que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua con $f(a) = 0$, y es derivable en $]a,b[$ con $f'(x) > 0\ \forall x \in]a,b[$ entonces $f(x) > 0\ \forall x \in]a,b]$.

Solución: Probaremos que $f(x) > f(a) = 0$ para todo $x \in]a,b]$. Para ello, tomemos $x \in]a,b]$ cualquiera y probemos que $f(x)$ es mayor a $f(a) = 0$.

Tenemos que $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ es continua, y es derivable en $]a,x[$.

Luego, por el Teorema del Valor Medio, existe $c_x \in]a, x[$ (c_x es un punto que necesariamente depende de x) tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Pero por hipótesis, $f'(c_x) > 0$, por lo tanto, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$.

Como $x - a > 0$, necesariamente $f(x) - f(a) > 0$, por lo que $f(x) > f(a)$.

Así, para cualquier $x \in]a, b]$ se tiene que $f(x) > f(a) = 0$.

5. Pruebe que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en $]a, b[$ con $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a, b[$ entonces f es estrictamente creciente.

   Es decir, $\quad x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$

   Respuesta: Dados $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$ por Teorema del Valor Medio (se cumplen todas las hipótesis necesarias para aplicar este teorema (verifíquelo)), existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

   Como por hipótesis $f'(c) > 0$ y además $x_2 - x_1 > 0$ vemos que necesariamente $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

   De modo que $f(x_2) > f(x_1)$ que es lo que queríamos concluir.

6. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas con $f(a) = g(a)$, y ambas derivables en $]a, b[$ con $f'(x) > g'(x) \ \forall x \in]a, b[$.

   Pruebe que $f(x) > g(x) \ \forall x \in]a, b]$.

   Solución:

   Consideremos la función auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$.

   Esta función cumple todas las hipótesis del ejercicio anterior (Ej. **??**), por lo que $h(x) > 0 \ \forall x \in]a, b]$.

   Esto significa que $f(x) > g(x) \ \forall x \in]a, b]$.

7. Pruebe que $|\operatorname{sen}(t)| < t$ para todo $t > 0$.

   Solución:

   Usaremos el Teorema del Valor Medio.

Observamos que, $|\operatorname{sen}(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que para $t > 1$ la demostración es trivial.

Observamos también que $\operatorname{sen}(t) > 0$ si $0 < t \leq \dfrac{\pi}{2}$,

por lo que $|\operatorname{sen}(t)| = \operatorname{sen}(t)$ en el intervalo $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Como $1 < \dfrac{\pi}{2}$ concluimos que basta probar $\operatorname{sen}(t) < t$ para todo $t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Sean $f(t) = t$ y $g(t) = \operatorname{sen}(t)$ continuas y derivables en el intervalo $[0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Entonces $f(0) = g(0)$ y $f'(t) = 1 > \cos t = g'(t)$ para todo $t \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Vemos que estas funciones f, g cumplen todas las hipótesis del ejercicio anterior (Ej. **??**).

Por lo tanto, $g(t) < f(t)$ para todo $t \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Es decir, $\operatorname{sen}(t) < t$ para todo $t \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$.