

Definición: La DERIVADA de una función $f(x)$ en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista.

STRATEGIA GNAL para calcular $f'(x)$:

1. Evaluar $f(x)$ y $f(x+h)$

2. Evaluar la diferencia $f(x+h) - f(x)$

3. Simplificar el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

4. Calcular el límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Ejemplo 1: Obtener la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

SOLUCIÓN:

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= x^2 + 2xh + h^2 + 2 - (x^2 + 2) \\ &= \cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{2} - \cancel{x^2} - \cancel{2} \\ &= h(2x + h) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} = 2x + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

$$f'(x) = 2x //$$

Ejemplo 2: Obtener la derivada de $f(x) = x^3$

SOLUCIÓN:

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

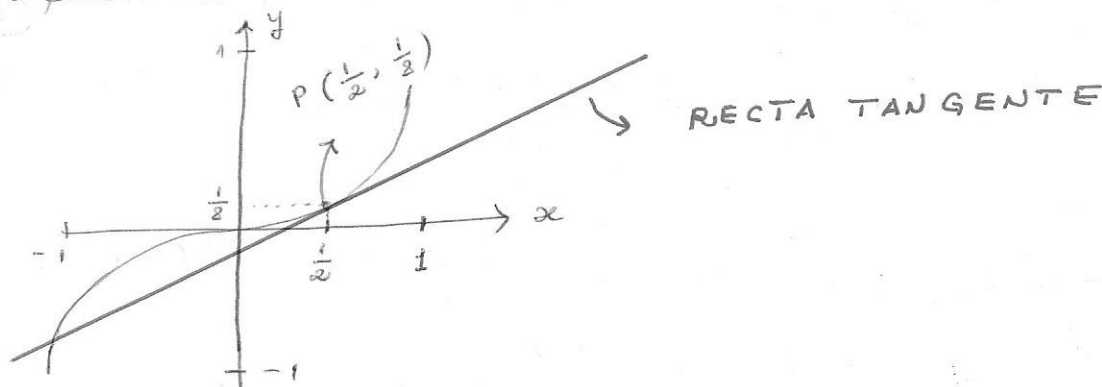
$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3} \\ &= h(3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 //$$

Ejemplo 3: Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = 1/2$.

Solución: La gráfica de $f(x) = x^3$ es la que se encuentra a continuación



Recordar de la geometría analítica elemental, que la ecuación de una recta está determinada cuando se conoce la pendiente de esta y un punto (x_0, y_0) que pertenezca a la recta.

En este caso, el punto (x_0, y_0) que pertenece a la recta tangente buscada es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$. Faltaba determinar la pendiente m que corresponde a la derivada de $f(x)$ evaluada en $x = \frac{1}{2}$, es decir: $m = f'(\frac{1}{2})$.

La recta buscada es $y - y_0 = \underbrace{f'(x)}_m \cdot (x - x_0)$, donde $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$, $m = 3(\frac{1}{2})^2 = 3/4$ así:

$$y - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \text{ es la recta buscada } //$$

Ejemplo 4: Calcular $f'(x)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución: PROPUESTO!

Se obtiene que $f'(x) = -\frac{1}{x^2} //$

REGLAS DE DERIVACIÓN

① $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{R}$

Ej: $(x^3)' = 3 \cdot x^2$; $(x^{2013})' = 2013 \cdot x^{2012} //$

$(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$; $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} //$

② $(c)' = 0$, donde c es una constante.

Ej: $(\sqrt{2})' = 0$, $(2013)' = 0$; $(\pi)' = 0$.

③ REGLA DE LA multiplicación POR UNA CTE

Si c es una constante y f derivable, entonces

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))'$$

Ej: $(5x^4)' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 20x^3 //$

$(\sqrt{5}x^3)' = \sqrt{5} \cdot (x^3)' = \sqrt{5} \cdot 3 \cdot x^2 = 3\sqrt{5}x^2 //$

④ REGLA DE SUMAS Y RESTAS.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Ej: $(3x^2 + \sqrt{2}x^7)' = (3x^2)' + (\sqrt{2}x^7)'$
 $= 3(x^2)' + \sqrt{2}(x^7)'$
 $= 3 \cdot 2 \cdot x + \sqrt{2} \cdot 7 \cdot x^6$
 $= 6x + 2\sqrt{7}x //$

Ejemplo 5: Encuentre la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en el punto correspondiente a $x = -1$.

SOLUCIÓN: Necesitamos el pto (x_0, y_0) que pertenece a la recta tangente y además su pendiente. El punto (x_0, y_0) es $(-1, f(-1))$, es decir $(-1, 8)$.

La pendiente de la recta tangente se obtiene al derivar $f(x)$ y evaluar en $x = -1$.

Luego:

$$m_T = f'(-1)$$

pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7, \text{ entonces}$$

$$f'(-1) = 12(-1)^3 + 6(-1)^2 - 7 = -12 + 6 - 7 = -13.$$

La ec. buscada es:

$$y - y_0 = m_T (x - x_0)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$y - 8 = -13 (x - (-1))$$

$$\Downarrow$$

$$y - 8 = -13 (x + 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = -13x - 5}$$

⑤ REGLA DE PRODUCTOS y cocientes

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\text{Ej: } \left[\underbrace{(x^3 - 2x^2 + 3)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(7x^2 - 4x)}_{g(x)} \right]'$$

$$= (x^3 - 2x^2 + 3)' \cdot (7x^2 - 4x) + (x^3 - 2x^2 + 3) \cdot (7x^2 - 4x)'$$

$$= ((x^3)' - (2x^2)' + (3)') (7x^2 - 4x) + (x^3 - 2x^2 + 3) ((7x^2)' - (4x)')$$

$$= (3x^2 - 4x)(7x^2 - 4x) + (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) //$$

Ejemplo 6: Encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x) = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$ en $x = 4$

$$\text{Sol: } y - 6 = \frac{7}{2} (x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x + 8 //$$



Felipe Fresno R.

Licenciatura en Matemáticas
Universidad de Chile

$$Ej: \left(\frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 5x^2 + 7} \right)^2$$

$$= \frac{(3x^2 - 1)^2 (2x^3 + 5x^2 + 7) - (3x^2 - 1)(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}$$

Felipe Fresno R.
Licenciatura en Matemáticas
Universidad de Chile

⑥ REGLA DE LA CADENA

Si n es un n° real cualquiera y $g(x)$ es derivable, entonces:

$$[(g(x))^n]' = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot (g(x))'$$

$$Ej: \left[(4x^3 + 3x + 7)^7 \right]' = 7 \cdot (4x^3 + 3x + 7)^{7-1} \cdot (4x^3 + 3x + 7)'$$

$$= 7 (4x^3 + 3x + 7)^6 (12x^2 + 3) //$$

$$Ej: \text{Derivar } y = \frac{1}{(5x^2 + 2x)^4}$$

SOLUCIÓN: Reescribimos y como sigue:

$$y = (5x^2 + 2x)^{-4} \Rightarrow y' = -4 (5x^2 + 2x)^{-4-1} \cdot (5x^2 + 2x)'$$

$$\Rightarrow y' = -4 (5x^2 + 2x)^{-5} (10x + 2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-4(10x + 2)}{(5x^2 + 2x)^5} //$$

EJERCICIOS GUÍA 7

① La función afín que aproxima a otra en torno a " c " es: $g(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c)$.

En este caso tenemos $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$

Luego: $f(0) = 0$ y $f'(0) = -1$, así:

$$g(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$g(x) = 0 + (-1)(x)$$

$$\boxed{g(x) = -x} //$$

- ② Para que f sea diferenciable, debe serlo en todo su dominio ($\mathbb{R}$ en este caso).
 Veamos que f NO es diferenciable en cero,
 luego f NO será diferenciable.

En efecto:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

- ④ $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
 Encuentre la recta tangente al gráfico de f en $(2, f(2))$.

SOLUCIÓN: $(2, f(2)) = (2, \sqrt{3})$ es el punto que pertenece a la recta tangente. Nos falta determinar la pendiente de la recta. Para esto debemos calcular $f'(x)$ y evaluar en $x=2$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (2x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 1)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE

Así, la ecuación buscada es:

$$y - y_0 = m_T (x - x_0)$$

$$y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} (x - 2) //$$