Control 9 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 27 de Mayo, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

Analice la existencia del siguiente límite, en caso de existir indique su valor.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right).$

   En efecto:

   Se observa en primera instancia, que el límite dado es de la forma $\infty - \infty$, es así, que restaremos ambas fracciones obteniéndose,

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

$$\boxed{\textbf{2 puntos.}}$$

La forma de este límite ahora es $\frac{0}{0}$, de esta manera factorizaremos y luego simplificaremos,

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2}.$$

$$\boxed{\textbf{2 puntos.}}$$

Finalmente, dado que los límites tanto del numerador y denominador existen, aplicando álgebra de límites se tiene:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = \frac{-3}{3} = -1.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos.}}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$.

En efecto:

Se observa en primera instancia, que el límite dado es de la forma $\infty - \infty$, es así, que racionalizaremos en esta ocasión, obteniéndose,

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x(x+a)} + x)}{(\sqrt{x(x+a)} + x)}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xa}{(\sqrt{x(x+a)} + x)}.$$

$\boxed{\textbf{2 puntos.}}$

Este último límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, amplificaremos por $1/x$.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xa}{(\sqrt{x(x+a)} + x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\sqrt{1 + a/x} + 1}.$$

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

Además, como: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, y tanto el límite del numerador y denominador existen podemos aplicar álgebra de límites, resultando:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\sqrt{1 + a/x} + 1} = \frac{a}{2}.$$

$\boxed{\textbf{3 puntos.}}$