

Guía 6 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Mayo, 2013

1. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
2. Grafique la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
3. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x + 5$ y considere el intervalo $U = (-10^{-2}, 10^{-2})$. Encuentre un intervalo abierto V centrado en -1 tal que $f(x) \in U$ para cualquier valor de $x \in V$.
4. ¿Es cierto que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$?
5. ¿Es cierto que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ no existe?
6. ¿Es cierto que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = M$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M - L$?
7. Muestre que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$

8. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{1 - x}$

(e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^3 - a^3}{h}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(3 + x) - 9}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$

9. Calcule los siguientes límites (si existen):

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} x^3 + 7x - 1$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2}}{2x}$

10. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{si } x < 1 \\ Ax + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine el o los valores de $A \in \mathbb{R}$, de manera que f posea límite en $x = 1$.

11. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. ¿Es cierto que el gráfico de f es una curva que se dibuja sin levantar el lápiz?.
12. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua y biyectiva tal que $f(0) = 0$. Muestre que $f(1) = 1$.
13. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Muestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.
14. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \neq 0$ y $f(\pi) = -1$. Demuestre que $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq 4x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en cero. (Ayuda: Pruebe que $f(0) = 0$).
16. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^3 + x + 1$. Encuentre un intervalo de largo $1/4$ que contenga una raíz de esa función polinomial.
17. Calcular el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ para:
 - (a) $f(x) = x^2$.
 - (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 \neq 0$.
 - (c) $f(x) = x^{1/3}$.
18. Halle las asíntotas verticales y horizontales (si existen) de:
 - (a) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$
 - (b) $f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2}$
 - (c) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$
19. Determine si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x] - x$ tiene puntos de discontinuidad.