Prueba 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 16 Abril, 2013

Tiempo : 120 **minutos .**

Nombre:

Sección:

1. Para los siguientes conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 7x + 12 \leq \ 0 \ \}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x+3| < 2 \ \}$.

   a) Describa los conjuntos A y B por extensión.

   Solución:

   Encontremos los elementos de A. $\ x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3) \leq \ 0$

   Puntos críticos: $x + 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -4$ y $x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -3$.

   Tabla:

	$-\infty < x \leq -4$	$-4 < x < -3$	$-3 \leq x < \infty$
$x+3$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$x+4$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x+3)(x+4)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

   Por lo tanto, $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -4 \leq x \leq -3\}$

   $\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

   Ahora encontremos los elementos de B.

   $|x+3| < 2 \ \Leftrightarrow \ -2 < x + 3 < 2 \,/ -3 \ \Leftrightarrow \ -5 < x < -1.$

   Luego, $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 < x < -1 \ \}$.

   $\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

b) Indique el valor de verdad de p , q, respectivamente donde:

$$p: \ A \cap B = A, \ \ q: \ B - A =]-3; -1[\text{ . Justificar.}$$

Solución:

$p: \ A \cap B = A.$

$x \in A \ \Leftrightarrow \ -4 \leq x \leq -3.$ Como $-5 < -4$ y $-3 < -1$ entonces por transitividad:

$x \in A \ \Rightarrow \ -5 < -4 \leq x \leq -3 < -1 \ \Rightarrow \ x \in B \Leftrightarrow A \subseteq B.$

Luego $A \cap B = A$, por lo tanto la proposición p es verdadera.

$$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$$

$q: \ B - A =]-3; -1[$.

$x \in B - A \ \Leftrightarrow \ x \in B$ y x no pertenece a A.

$x \in B - A \ \Leftrightarrow \ -5 < x < -1$ y $[x < -4 \ \ o \ \ x > -3]$
$\Leftrightarrow \ -5 < x < -4 \ \ o \ \ -3 < x < -1$

Luego, $B - A =]-5, -4[\cup]-3, -1[\neq]-3, -1[$.

Por lo tanto la proposición q es falsa.

$$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$$

Nombre:
Sección:

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestre que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}.$$

En efecto:

Como $a, b \in \mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$a^2 + b^2 > 0 \,/ + 2ab \iff a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 > 2ab.$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Luego

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) > 2ab \;/ : (a+b) > 0 \iff a + b > \frac{2ab}{a+b} \;/ : ab > 0 \iff \frac{a+b}{ab} > \frac{2}{a+b}$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Finalmente, $\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} > \frac{2}{a+b}$,

$\boxed{\text{1 punto.}}$

de donde, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Nombre:
Sección:

3. Calcule:
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} \binom{n}{j-1}$$

Solución:

Sea $a_j = \frac{n-j+1}{j}\binom{n}{j-1}$, el término general de la suma, el cual simplificaremos antes de calcular la suma.

$a_j = \frac{n-j+1}{j} \cdot \binom{n}{j-1} = \frac{n-j+1}{j} \cdot \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j+1)!} = \frac{n!}{(j)!\,(n-j)!} = \binom{n}{j}$,

ya que: $j(j-1)! = j!$ y $(n-j+1)! = (n-j+1)(n-j)!$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

De esta manera la suma pedida queda de la forma:
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} \binom{n}{j-1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j},$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

agregando el término que se obtiene con $j=0$, la suma total queda:

$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} - \binom{n}{0}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

La última suma se puede calcular utilizando el teorema del binomio como:

$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\, 1^{n-j}\, 1^{j} = (1+1)^n = 2^n$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Finalmente la suma pedida es:
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} \binom{n}{j-1} = 2^n - 1$$

donde $\binom{n}{0} = 1$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Nombre:
Sección:

4. Demuestre usando inducción matemática que la siguiente propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \, (2j+1) = 2n.$$

Solución:
Primero debemos verificar que la propiedad se cumple para $n = 1$.

Por una parte;

$$\sum_{j=1}^{2} (-1)^j (2j+1) = (-1)^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) + (-1)^2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) = 2$$

Por otra parte;

$$2 \cdot 1 = 2$$

Por lo tanto, se cumple para $n = 1$. [**1 punto**]

Supongamos que la propiedad se cumple para n, es decir nuestra hipótesis de inducción es:

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (2j+1) = 2n.$$

[**0.5 punto**].
Ahora debemos probar que la propiedad se cumple para $n+1$, es decir debemos probar que;

$$\sum_{j=1}^{2(n+1)} (-1)^j (2j+1) = 2(n+1)$$

[**0.5 punto**]

En efecto;

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2(n+1)} (-1)^j (2j+1) &= \sum_{j=1}^{2n+2} (-1)^j (2j+1) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{2n} (-1)^j (2j+1) \right) + (-1)^{2n+1}(2(2n+1)+1) + (-1)^{2n+2}(2(2n+2)+1)
\end{aligned}$$

[**2 puntos**]

Luego, usando la hipótesis de inducción y reduciendo términos tenemos que ;

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n+2}(-1)^j(2j+1) &= 2n-(4n+2+1)+(4n+4+1)\\ &= 2n-4n-4+4n+5\\ &= 2n+2\end{aligned}$$

[2 puntos]

Nombre:
Sección:

5. Considere la sucesión a_k tal que: $a_0 = \frac{1}{2}$ y $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{4}$, $k \geq 1$.

Determine:
a) el término general a_k, $k \geq 0$. (2 puntos)
b) el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3^k \, a_k - \frac{(k+1)}{4} \, 3^{k+1} \right). \qquad \text{(4 puntos)}$$

Solución:

a) Usaremos el hecho que $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{4}$ para $k \geq 1$ para calcular algunos términos.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \frac{1}{4} \\ a_2 &= a_1 + \frac{1}{4} = a_0 + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ a_3 &= a_2 + \frac{1}{4} = a_0 + 3 \cdot \frac{1}{4} \\ a_4 &= a_3 + \frac{1}{4} = a_0 + 4 \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(1.0 pto.)

Luego, podemos notar que los términos cumplen cierta regularidad y por lo tanto conjeturar que el término general a_k, para todo $k \geq 0$, es:

$$a_k = a_0 + k \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + k \cdot \frac{1}{4} = \frac{k+2}{4}.$$

(1.0 pto.)

b) Para calcular la suma reemplazaremos por el término general recién encontrado y luego reordenaremos la suma.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \left[3^k a_k - \frac{(k+1)}{4} 3^{k+1} \right] &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(k+2)}{4} 3^k - \frac{(k+1)}{4} 3^{k+1} \right] \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{4} 3^k - \frac{(k+1)}{4} 3^{k+1} \right]}_{(*)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 3^k}_{(**)} \end{aligned}$$

(1.0 pto.)

Notemos que la sumatoria $(*)$ es una suma telescópica de la forma: $\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})$, con $b_k = \frac{k3^k}{4}$, cuyo resultado es:

$$b_1 - b_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{(n+1)}{4}3^{n+1} = \frac{3-(n+1)3^{n+1}}{4}.$$

(1.0 pto.)

Además, la sumatoria $(**)$ es una suma geométrica cuyo resultado es:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3^1 - 3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-3}{4}.$$

(1.0 pto.)

Así, finalmente tendremos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(k+2)}{4}3^{k+1} - \frac{(k+1)}{4}3^k\right] = \frac{3-(n+1)3^{n+1}}{4} + \frac{3^{n+1}-3}{4} = \frac{-n3^{n+1}}{4}.$$

(1.0 pto.)