Control 6 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 29 de Abril, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = |x+1| + |2x-1|$. Determine el conjunto de cotas superiores, cotas inferiores, máximo, mínimo, supremo e ínfimo (si existen) de:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) < 10 \ \}.$$

Solución:

Utilizaremos puntos críticos y análisis de signo para resolver la inecuación:

Puntos críticos: $x+1=0 \ \Leftrightarrow \ x=-1$ y $2x-1=0 \ \Leftrightarrow \ x=\frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{0.4 punto.}}$

Tabla:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1/2$	$1/2 < x < \infty$
$x+1$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$2x-1$	$(-)$	$(-)$	$(+)$

$\boxed{\textbf{0.9 punto.}}$

De acuerdo a lo obtenido en la tabla, los tramos son:

1. Para $x \leq -1$, la inecuación dada queda: $-x-1-2x+1 < 10 \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{10}{3}$

Así, la solución para el primer tramo es: $S_1 =]-\frac{10}{3}, -1]$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

2. Para $-1 < x < 1/2$, la inecuación dada queda: $x+1-2x+1 < 10 \;\Leftrightarrow$ $-8 < x$

Así la solución para el segundo tramo es: $S_2 =]-1; 1/2[$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

3. Para $x \geq 1/2$, la inecuación dada queda: $x+1+2x-1 < 10 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{10}{3}$

Así, la solución para el tercer tramo es: $S_3 = [1/2, \frac{10}{3}[$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

Por lo tanto el conjuntos A queda:

$$A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right[.$$

$\boxed{\textbf{0.5 punto.}}$

Así,

Cotas superiores de A son: $[10/3; \infty[$.
Cotas Inferiores de A son: $]-\infty; -10/3]$.
Máximo: no tiene.
Mínimo: no tiene.
Supremo : 10/3.
Infimo: -10/3.

$\boxed{\textbf{1.2 puntos.}}$

2. Sea $g(x) = \frac{1}{2|x-1|-3x}$, determine los $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \in \mathbb{R}$. Justifique.

En efecto:

Tenemos que: $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2|x-1|-3x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2|x-1| - 3x \neq 0.$

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

Determinemos los valores de x tal que: $2|x-1| - 3x = 0.$

En efecto: $2|x-1| - 3x = 0 \Leftrightarrow |x-1| = \frac{3}{2}x \Leftrightarrow x - 1 = \frac{3}{2}x,$ y $x \geq 0.$

$\Leftrightarrow x = -2,$ y $x \geq 0,$ luego: $S_1 = \phi.$

$\boxed{\textbf{2 puntos.}}$

o

$x - 1 = -\frac{3}{2}x,$ y $x \geq 0 \Leftrightarrow x = 2/5,$ y $x \geq 0,$ por lo tanto: $S_2 = \{\frac{2}{5}\}.$

$\boxed{\textbf{2 puntos.}}$

Finalmente los valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \in \mathbb{R}$ son: $\mathbb{R} - \{2/5\}.$

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$