Control 5 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 22 de Abril, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Determine los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente inecuación:

$$|x+2| < 4 - |x-1|.$$

Solución:

Utilizaremos puntos críticos y análisis de signo para resolver la inecuación:

Puntos críticos: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ y $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

Tabla:

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$x+2$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$x-1$	$(-)$	$(-)$	$(+)$

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

De acuerdo a lo obtenido en la tabla, los tramos son:
1. Para $x < -2$, la inecuación dada queda: $-x-2 < 4+x-1 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$

Así, la solución para el primer tramo es: $S_1 =]-\frac{5}{2}, -2[$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

2. Para $-2 \leq x \leq 1$, la inecuación dada queda: $x+2 < 4+x-1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < 4$

Así la solución para el segundo tramo es: $S_2 = [-2, 1]$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

3. Para $x > 1$, la inecuación dada queda: $x+2 < 4-x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{3}{2}$

Así, la solución para el tercer tramo es: $S_3 =]1, \frac{3}{2}[$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

Por lo tanto la solución de la inecuación es:

$$S_f = \left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[.$$

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, demuestre:

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2.$$

En efecto:

Tenemos que: $|a+b|^2 = (a+b)^2$ y $|a-b|^2 = (a-b)^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$

Luego,

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 + |a-b|^2 &= (a+b)^2 + (a-b)^2 \ \textbf{(1 punto)} \\
&= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \ \textbf{(1 punto)} \\
&= 2a^2 + 2b^2 \ \textbf{(1 punto)} \\
&= 2|a|^2 + 2|b|^2 \ \textbf{(1 punto)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2.$$

$\boxed{\textbf{1 punto.}}$