Guía 4 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2013

1. Determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. De ser verdadera lo demuestra en general y de ser falsa muestra un contraejemplo.

   (a) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 3| + |3 - x|$, es una función constante.

   (b) La función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$ es una función constante.

   (c) Para cualquier valor de $c \in \mathbb{R}$, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x + c$ no es epiyectiva.

   (d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función entonces $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   (e) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función y $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ entonces $f(x) < f(y)$.

   (f) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función e I es un intervalo entonces $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ es un intervalo. $(\star)$

   (g) Si $f : X \to Y$ es una función entonces $f(\emptyset) = \emptyset$. $(\star)$

   (h) Si $f : X \to Y$ es una función, A y B subconjunto de X tal que $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$. $(\star)$

   (i) La composición de dos funciones afines es una función afín.

(j) La composición de funciones biyectivas es una función biyectiva.

2. Un taxista cobra 200 pesos por los primeros 200 metros de recorrido. Por cada 200 metros que recorre después de los 200 metros iniciales, la cuenta aumenta en 90 pesos. Describa la cuenta $C(x)$, para cada distancia recorrida x. Grafique la función C.

3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = (-1)^n [\frac{n}{2}]$. Determine si f es una función biyectiva. Grafique f.

4. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + 1)^3$. Exprese f como composición de tres funciones. Determine si esta descomposición es única.

5. Considere las funciones reales f y g definidas por $f(x) = ax + b$ y $g(x) = x - b$. Si $f \circ g = g \circ f$, determine los posibles valores de a y b en $\mathbb{R}$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

   (a) Evalúe $f(-3), f(x^2), f(x + 1)$ y $f(-x)$.

   (b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

   (c) Escriba $f(x) = (x + c)^2 + d$ para ciertos c y d en $\mathbb{R}$.

   (d) Grafique f y $|f|$.

7. Si una piedra se lanza con velocidad v desde el suelo hacia arriba, la altura de la piedra h en el instante t es $h(t) = \frac{-gt^2}{2} + vt$. Si la velocidad inicial es $v = 20m/s$ y g es la aceleración de gravedad que en este caso la consideramos como $9,8m/s$, determine la altura máxima que alcanza la piedra y cuánto tarda la piedra en caer.

8. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ y $g(x) = |x|$. Describa $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Grafique f, $g \circ f$ y $f \circ g$.

9. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = |x|$. Describa $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

10. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x - 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = x^2 + 2x - 1$. Describa $(g \circ f)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Grafique ambas funciones.

11. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$. Encuentre la inversa de f. Grafique f y f^{-1} indicando intersecciones con los ejes.

12. Encuentre la inversa de una función afín.

13. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Encuentre una expresión para las siguientes fórmulas, y para cada una de ellas indique los valores de x para los que se puede calcular:

    a) $f(f(x))$.
    b) $f(\dfrac{1}{x})$.
    c) $f(cx)$.
    d) $f(x+y)$.
    e) $f(x) + f(y)$.
    f) Para qué números c existe un x tal que $f(cx) = f(x)$? (Hay muchos más de lo que parece).
    g) Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos de x?

14. Sea $g(x) = x^2$ y sea $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

    a) Para cuáles y se tiene $h(y) \leq y$?

b) Para cuáles y se tiene $h(y) \leq g(y)$?

c) Para cuáles w se tiene $g(w) \leq w$?

d) Para cuáles ε se tiene $g(g(\varepsilon)) = g(\varepsilon)$?

15. Para qué valores de x están definidas las siguientes funciones?

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Para qué valores de x están definidas las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$?

16. Considere las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Encuentre las funciones $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Indique dominios de las funciones $f, g, f \circ g$ y $g \circ f$.

17. Encuentre el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

b) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$.

e) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$.