Control 3 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 08 de Abril, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Demuestre usando inducción matemática que la siguiente propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$;

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}.$$

Solución:

Probamos para $n = 1$: $1 + x^{2^{1-1}} = 1 + x$, y $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 + x$.

Por lo tanto, $1 + x^{2^{1-1}} = \frac{x^2-1}{x-1}$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Hipótesis de Inducción: Es cierto, para $n = k$, que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{k-1}}) = \frac{x^{2^k}-1}{x-1}.$$

$$\boxed{\text{0.5 puntos.}}$$

Por demostrar para n=k+1:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k}) = \frac{x^{2^{k+1}}-1}{x-1}.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

En efecto,

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k}) &= \frac{(x^{2^k}-1)}{x-1}\cdot(1+x^{2^k}) \\ &\quad \text{(por hipótesis de inducción.)} \\ &= \frac{(x^{2^k})^2-1}{x-1} \\ &= \frac{x^{2^{k+1}}-1}{x-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k}) = \frac{x^{2^{k+1}}-1}{x-1}.$$

$\boxed{\text{3 puntos.}}$

Así, por el principio de inducción se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$;

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}.$$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

2. Demuestre usando inducción matemática que la siguiente propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$;

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Solución:

<u>Probamos para $n = 1$:</u>

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} = \frac{1}{3\cdot 1}$$

y

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} = \frac{1}{2+1}$$

.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

<u>Hipótesis de Inducción:</u> Es cierto, para $n = k$, que

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} = \frac{k}{2k+1}$$

$\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

<u>Por demostrar para n=k+1:</u>, es decir,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} + \frac{1}{[2(k+1)+1][2(k+1)-1]} \\
&= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+3)(2k+1)} \\
&\quad \text{(por hipótesis de inducción.)} \\
&= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+3)(2k+1)} \\
&= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

$\boxed{\text{3 puntos.}}$

Así, por principio de Inducción se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$;

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j+1)(2j-1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\boxed{\text{0.5 punto.}}$$