

Universidad de Chile
Vicerrectoría de Asuntos Académicos
Programa Académico de Bachillerato
Física II

Control N°1

Profesor: German Kremer E.
Ayudante: Ricardo Osorio P.

Solución problema 1

a)

La fuerza neta sobre la carga e , se puede calcular mediante

$$\vec{F} = e\vec{E} \quad (1)$$

Por superposición, el campo total sobre la carga de prueba, será la contribución del campo del hilo con densidad de carga lineal λ y el hilo con densidad de carga lineal -2λ

$$\vec{E} = \vec{E}_\lambda + \vec{E}_{-2\lambda} \quad (2)$$

Para el campo de hilo con densidad de carga λ

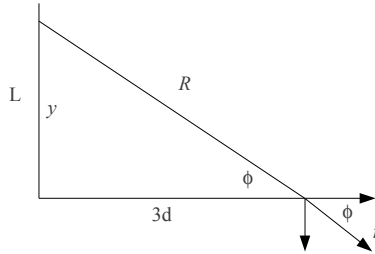


Figure 1: Proyección del hilo cargado con densidad de carga lineal λ sobre el eje x .

Proyectando el hilo sobre x , tenemos

$$R = \sqrt{y^2 + (3d)^2} \quad (3)$$

y

$$\sin \phi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (3d)^2}} \quad (4)$$

$$\cos \phi = \frac{3d}{\sqrt{y^2 + (3d)^2}} \quad (5)$$

Luego

$$d\vec{E}_\lambda = k_e \frac{dq}{R^2} \hat{r} \quad (6)$$

donde observando la figura 1

$$\hat{r} = \cos(\phi)\hat{i} - \sin(\phi)\hat{j} \quad (7)$$

y por último, notamos que la distribución de carga, está encerrada en L en dirección de y .

$$dq = \lambda dy \quad (8)$$

Por tanto, reemplazando (4) y (5) en (7) y luego reemplazando (7) y (8) en (6), obtenemos

$$\begin{aligned} d\vec{E}_\lambda &= k_e \frac{\lambda dy}{y^2 + (3d)^2} \left(\frac{3d}{\sqrt{y^2 + (3d)^2}} \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{y^2 + (3d)^2}} \hat{j} \right) \\ \vec{E}_\lambda &= k_e 3d\lambda \int_0^L \frac{dy}{(y^2 + (3d)^2)^{3/2}} \hat{i} - k_e \lambda \int_0^L \frac{y dy}{(y^2 + (3d)^2)^{3/2}} \hat{j} \end{aligned}$$

Haciendo los cambio de variable

$$\begin{aligned} y &= 3d \tan(\theta) \\ dy &= 3d \sec^2(\theta) d\theta \\ u &= y^2 + (3d)^2 \\ dy &= 2y dy \end{aligned}$$

Tenemos ahora

$$\begin{aligned} \vec{E}_\lambda &= k_e 3d\lambda \int k_e \frac{3d \sec^2(\theta) d\theta}{((3d)^2 \tan^2(\theta) + (3d)^2)^{3/2}} \hat{i} - k_e \lambda \int \frac{1}{2} \frac{dy}{u^{3/2}} \hat{j} \\ &= \frac{k_e \lambda}{3d} \int \frac{\sec^2(\theta) d\theta}{\sec^3(\theta)} \hat{i} - k_e \lambda \left(-\frac{1}{u^{1/2}} \right) \hat{j} \\ &= \frac{k_e \lambda}{3d} \int \cos(\theta) d\theta \hat{i} - k_e \lambda \left(-\frac{1}{\sqrt{y^2 + (3d)^2}} \right) \Big|_0^L \hat{j} \\ &= \frac{k_e \lambda}{3d} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + (3d)^2}} \right) \Big|_0^L \hat{i} + k_e \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} - \frac{1}{3d} \right) \hat{j} \\ &= \frac{k_e \lambda}{3d} \frac{L}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} \hat{i} + k_e \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} - \frac{1}{3d} \right) \hat{j} \end{aligned}$$

Por tanto, el campo eléctrico del hilo con densidad de carga lineal λ sobre la carga e , es

$$\vec{E}_\lambda = \frac{k_e \lambda}{3d} \frac{L}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} \hat{i} + k_e \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} - \frac{1}{3d} \right) \hat{j} \quad (9)$$

y la fuerza sobre e

$$\vec{F}_{e\lambda} = e \frac{k_e \lambda}{3d} \frac{L}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} \hat{i} + e k_e \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} - \frac{1}{3d} \right) \hat{j} \quad (10)$$

Ahora, para $E_{-2\lambda}$, es análogo al análisis de E_λ , solo que en vez de poner $3d$ pondremos $2d$, en vez de poner λ pondremos -2λ y en vez de poner los límites de integración entre 0 a L , pondremos entre $2d$ a $2d + L$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{-2\lambda} &= \frac{k_e(-2\lambda)}{2d} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + (2d)^2}} \right) \bigg|_{2d}^{2d+L} \hat{i} + k_e(-2\lambda) \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + (2d)^2}} \right) \bigg|_{2d}^{2d+L} \hat{j} \\
&= -\frac{k_e\lambda}{d} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + (2d)^2}} \right) \bigg|_{2d}^{2d+L} \hat{i} - 2k_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + (2d)^2}} \right) \bigg|_{2d}^{2d+L} \hat{j} \\
&= -\frac{k_e\lambda}{d} \left(\frac{2d+L}{\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} - 2k_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} - \frac{1}{2d\sqrt{2}} \right) \hat{j}
\end{aligned}$$

Por tanto, el campo eléctrico del hilo con densidad de carga lineal -2λ sobre la carga e , es

$$\vec{E}_{-2\lambda} = -\frac{k_e\lambda}{d} \left(\frac{2d+L}{\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} - 2k_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} - \frac{1}{2d\sqrt{2}} \right) \hat{j} \quad (11)$$

y la fuerza sobre e

$$\vec{F}_{e,-2\lambda} = -e \frac{k_e\lambda}{d} \left(\frac{2d+L}{\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} - e2k_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} - \frac{1}{2d\sqrt{2}} \right) \hat{j} \quad (12)$$

Finalmente, la fuerza neta sobre e por superposición, es la suma de (10) y (12), obteniendo

$$\begin{aligned}
\vec{F}_e &= ek_e\lambda \left(\frac{L}{3d\sqrt{L^2 + (3d)^2}} - \frac{2d+L}{d\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} + \frac{1}{d\sqrt{2}} \right) \hat{i} \\
&+ ek_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (3d)^2}} - \frac{1}{3d} - \frac{2}{\sqrt{(2d+L)^2 + (2d)^2}} + \frac{1}{d\sqrt{2}} \right) \hat{j} \quad (13)
\end{aligned}$$

b)

El campo eléctrico en el punto P será por superposición

$$\vec{E}_P = \vec{E}_e + \vec{E}_\lambda + \vec{E}_{-2\lambda} \quad (14)$$

El campo eléctrico de e sobre P será

$$\vec{E}_e = k_e \frac{e}{d^2} \hat{i} \quad (15)$$

Ahora, para calcular el campo eléctrico debido a los dos hilos sobre P , basta con usar las ecuaciones del campo eléctrico (9) y (11) y aumentar en una unidad d sobre el eje x . Luego, quedarían como

$$\vec{E}_\lambda = \frac{k_e\lambda}{4d} \frac{L}{\sqrt{L^2 + (4d)^2}} \hat{i} + k_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (4d)^2}} - \frac{1}{4d} \right) \hat{j} \quad (16)$$

$$\vec{E}_{-2\lambda} = -\frac{2k_e\lambda}{3d} \left(\frac{3d+L}{\sqrt{(3d+L)^2 + (3d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} - 2k_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(3d+L)^2 + (3d)^2}} - \frac{1}{3d\sqrt{2}} \right) \hat{j} \quad (17)$$

Finalmente, reemplazamos (15), (16) y (17) en (14), obtenemos el campo eléctrico del sistema en P .

$$\begin{aligned} \vec{E}_P = & \left(k_e \frac{e}{d^2} + \frac{k_e\lambda}{4d} \frac{L}{\sqrt{L^2 + (4d)^2}} - \frac{2k_e\lambda(3d+L)}{3d\sqrt{(3d+L)^2 + (3d)^2}} + \frac{2k_e\lambda}{3d\sqrt{2}} \right) \hat{i} \\ & + k_e\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{L^2 + (4d)^2}} - \frac{1}{4d} - \frac{2}{\sqrt{(3d+L)^2 + (3d)^2}} + \frac{2}{3d\sqrt{2}} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (18)$$