

Pauta Prueba Global 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 24 de Octubre, 2011

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera debe justificar señalando él o los teoremas que demuestran la afirmación. Si es falsa de un contraejemplo.

(a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Solución: Falso, tomar $f(x) = x$ y $a = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, pero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ no existe.

2 puntos.

(b) Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ entonces la función f es continua en el punto a .

Solución: Falso, tomar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : x < 0 \\ 0 & : x = 0 \\ x + 1 & : x > 0 \end{cases}$.

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1$, pero $f(0) = 0 \neq 1$. Por tanto los límites laterales existen y son iguales, pero distintos al valor de la función en 0. Entonces f no es continua en 0.

2 puntos.

(c) Si $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ entonces no existe un intervalo V centrado en -1 tal que $f(x)$ este en $(-10^{-2}, 10^{-2})$ para todo x en V .

Solución: Falso, como $\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 + 5x + 2 = 0$ entonces para $\epsilon = 10^{-2}$, existe $\delta > 0$ tal que si x está en $(-1 - \delta, -1 + \delta)$ entonces $f(x)$ está en $(-10^{-2}, 10^{-2})$. Luego para $V = (-1 - \delta, -1 + \delta)$, se tiene que $f(x)$ está en $(-10^{-2}, 10^{-2})$ para todo x en V .

2 puntos.

2. Analice la existencia de los siguientes límites. En caso de existir calcule su valor.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$

Solución: Notar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

1 punto.

Por tanto los límites laterales existen y son iguales, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$ existe y vale 0.

1 punto.

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)}}{x - \frac{\pi}{4}}$

Solución: Notar que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)}}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)}) (\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})}{(x - \frac{\pi}{4}) (\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{(x - \frac{\pi}{4}) (\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})} \end{aligned}$$

1 punto.

Como $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{(x - \frac{\pi}{4}) (\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{(x - \frac{\pi}{4}) (\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \left(\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{(x - \frac{\pi}{4})} \right) \left(\frac{1}{(\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)})} \right) \\ &= \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{aligned}$$

1 punto.

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 17}{x^{17} + 7}$$

Solución: Notar que

$$\frac{x^7 + 17}{x^{17} + 7} = \frac{\frac{1}{x^{10}} + \frac{17}{x^{17}}}{1 + \frac{7}{x^{17}}}$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 17}{x^{17} + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^{10}} + \frac{17}{x^{17}}}{1 + \frac{7}{x^{17}}}$$

1 punto.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, por álgebra de límites se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^{10}} + \frac{17}{x^{17}}}{1 + \frac{7}{x^{17}}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

1 punto.

3. (a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$$

i) Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ usando la definición.

Solución: Dado $\epsilon > 0$, debemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|f(x)| < \epsilon$.

1 punto.

En efecto, notar que

$$|f(x)| = \left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x^2| = |x|^2$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, tomar $\delta = \sqrt{\epsilon}$ entonces si $|x| < \delta = \sqrt{\epsilon}$ entonces

$$|f(x)| \leq |x|^2 < (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon$$

1 punto.

Esto demuestra que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

ii) ¿Es f una función continua en todo su dominio?

Solución: Si $x \neq 0$ entonces f es continua en x , por álgebra de funciones continuas.

0,5 puntos.

Si $x = 0$ entonces f es continua por que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

0,5 puntos.

Por tanto f es continua en todo su dominio.

(b) Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para todo x en \mathbb{R} ,

$$|g(x)| \leq 7x^6$$

Demuestre que g es continua en 0.

Solución: Primero demostremos que $g(0) = 0$.

Como para todo x en \mathbb{R} , $|g(x)| \leq 7x^6$, se tiene que para $x = 0$,

$$0 \leq |g(0)| \leq 0$$

entonces $|g(0)| = 0$, lo que a su vez implica que $g(0) = 0$.

1 punto.

Ahora veamos que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

En efecto, como para todo x en \mathbb{R} , $|g(x)| \leq 7x^6$, se tiene que

$$-7x^6 \leq g(x) \leq 7x^6$$

Luego, como $\lim_{x \rightarrow 0} -7x^6 = \lim_{x \rightarrow 0} 7x^6 = 0$, por teorema de acotamiento,

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Esto demuestra que g es continua en 0.

2 puntos.