

# Pauta Prueba 2 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 28 de Mayo, 2011

**Tiempo : 120 minutos .**

**Nombre:**

**Curso:**

1. Sea  $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$  definida por

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

- (a) [3 puntos] Grafique  $f$ .

En particular por ser una función racional del tipo:  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , los elementos importantes son: las asíntotas verticales y horizontales, puntos de intersección con los ejes e indicar en que cuadrantes se ubican las hipérbolas.

De acuerdo a esto tenemos:

Conjunto dominio:  $\mathbb{R} - \{-1\}$ ,

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1},$$

Asíntota vertical  $x = \frac{-d}{c} = -1$ ,

Asíntota horizontal  $x = \frac{a}{c} = 1$ ,

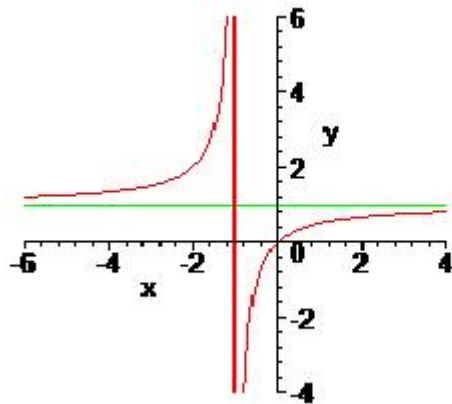
Punto de Intersección con los ejes:  $x = 0, \implies f(0) = 0$ ,

Observando que las asíntotas dividen el plano en cuatro cuadrantes y  $f(0) = 0$ , además como  $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ , para valores de  $x$  mayores que  $-1$  la curva está bajo la asíntota horizontal y para valores de  $x$  menores a  $-1$  la curva está sobre la asíntota horizontal.

Por lo tanto tenemos hipérbolas en el segundo y cuarto cuadrante.

1 punto

Es así que la gráfica queda:



2 puntos

(b) [3 puntos] Demuestre que  $f(\mathbb{N}) = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto acotado y encuentre su ínfimo y supremo. Demuestre su hallazgo

**Solución:**

Los elementos del conjunto son de la forma  $f(n) = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ , con  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Observando el gráfico anterior podemos establecer que los elementos de dicho conjunto están acotados inferiormente por:  $f(n=1) = \frac{1}{2}$  y superiormente por 1 (ver asíntota horizontal), cuya conjetura hay que demostrarla.

**Primero demostremos:**  $\frac{1}{2} \leq f(n) < 1$ .

**En efecto:**

Como  $n \in \mathbb{N}$  tenemos

$$1 \leq n < n+1 < n+2$$

Por transitividad se tiene:  $1 \leq n < n+2 \quad | + n$

$$\implies n+1 \leq 2n < 2n+2 \quad | : 2(n+1) > 0$$

$$\implies \frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto el conjunto  $f(\mathbb{N})$  es acotado, luego posee Supremo e Ínfimo.

1 punto

**Segundo demostremos** que el valor  $I = \frac{1}{2}$  es el Infimo y el valor  $S = 1$  es el supremo del conjunto.

**En efecto:**

*Definición. Diremos que  $I = \frac{1}{2}$  es el Infimo del conjunto:*  
*Si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $f(n_0) \in f(\mathbb{N})$  tal que  $f(n_0) < \frac{1}{2} + \varepsilon$ .*

Tomando  $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$  y  $f(n_0 = 1) = \frac{1}{2}$ , tenemos que  $\frac{1}{2}$  es el mínimo del conjunto y la definición anterior se da por sí sola, es decir,  $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ .

Por lo tanto el Infimo del conjunto es  $I = \frac{1}{2}$ .

1 punto

*Definición. Diremos que  $S = 1$  es el Supremo del conjunto:*  
*"Si  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $f(n_0) \in f(\mathbb{N})$  tal que  $1 - \varepsilon < f(n_0)$ .*

Por propiedad Arquimediana tenemos que  $\forall \varepsilon > 0$  existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que,  $\varepsilon > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n_0+1}$ , de tal manera que por transitividad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon & \quad | \cdot (-1) \\ \implies -\varepsilon < \frac{-1}{n_0+1} & \quad | + 1 \\ \implies 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_0+1} & \in f(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

$\implies S = 1$  es el supremo del conjunto.

1 punto

**Nombre:**

**Curso:**

2. Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- (a) [3 puntos] Demuestre que  $g$  es una función inyectiva.

Solución:

Sean  $x, y \in (-\infty, 0]$  y supongamos que  $g(x) = g(y)$  entonces

$$1 - x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

puesto que  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ .

1 punto.

Sean  $x, y \in (0, \infty)$  y supongamos que  $g(x) = g(y)$  entonces

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{y} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y$$

puesto que  $x > 0$  e  $y > 0$ .

1 punto.

Sean  $x \in (-\infty, 0]$  e  $y \in (0, \infty)$  entonces  $x \neq y$  lo que implica que  $g(x) \neq g(y)$ . En efecto  $x \leq 0$  implica que  $1 - x^2 \leq 1$  e  $y > 0$  implica que  $\sqrt{y} + 1 > 1$ .

1 punto.

Luego hemos demostrado que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ , si  $g(x) = g(y)$  entonces  $x = y$ . Por tanto  $g$  es una función inyectiva.

- (b) [3 puntos] ¿Es  $g$  una función invertible?. En caso afirmativo, encuentre  $g^{-1}$ .

Solución:

Notemos que si  $x \in (-\infty, 0]$  entonces  $g(x) \in (-\infty, 1]$ . En efecto  $x \leq 0$  implica que  $x^2 \geq 0$  entonces  $-x^2 \leq 0$  y por tanto  $1 - x^2 \leq 1$ .

Si  $x \in (0, \infty)$  entonces  $g(x) \in (1, +\infty)$ . En efecto  $x > 0$  implica que  $\sqrt{x} > 0$  entonces  $\sqrt{x} + 1 > 1$ .

Luego  $Im(g) = (-\infty, 1] \cup (1, +\infty) = \mathbb{R}$ , lo que equivale a decir que  $g$  es una función sobreyectiva.

1 punto.

Como  $g$  es inyectiva y sobreyectiva entonces  $g$  es biyectiva y por tanto invertible.

1 punto.

Sea  $y = g(x)$  con  $x \in (-\infty, 0]$  entonces  $y \leq 1$  y vemos que

$$y = 1 - x^2 \Leftrightarrow 1 - y = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1 - y} = x$$

Sea  $y = g(x)$  con  $x \in (0, +\infty)$  entonces  $y > 1$  y vemos que

$$y = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y - 1)^2 = x$$

Por tanto

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{si } x \leq 1 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1 punto.

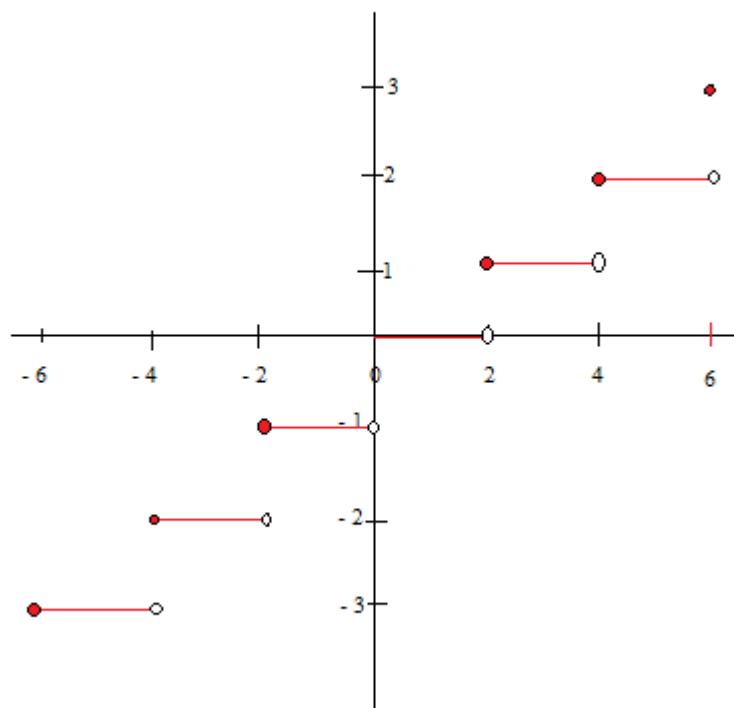
**Nombre:**

**Curso:**

3. Considere las funciones  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 4 - x^2$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ . Determine todos los valores de  $x \in \mathbb{R}$  para los cuales se puede bien definir  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  y encuentre  $(f \circ g)(x)$ .  
(Sugerencia: Grafique  $f$  y  $g$ .)

solución:

Gráfico de  $g(x)$



1 punto

Del gráfico vemos que: por ejemplo si  $x = [-6, -4[$  entonces  $g(x) = -3$ .

O bien que si  $x = [0, 2[$  entonces  $g(x) = 0$ .

Para componer, es necesario que  $Im(g) \subset [-2, 2] = Dom(f)$ .

1 punto

Esta restricción se cumple cuando  $x = [-4, 6[$

1 punto

Así considerando una restricción del dominio de  $g$  se tiene

$$g : [-4, 6[ \rightarrow [-2, 2]$$
$$x \rightarrow g(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \begin{cases} -2 & , x \in [-4, -2[ \\ -1 & , x \in [-2, 0[ \\ 0 & , x \in [0, 2[ \\ 1 & , x \in [2, 4[ \\ 2 & , x \in [4, 6[ \end{cases}$$

1 punto

Cálculo de  $f \circ g$  :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor\right) = 4 - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor^2$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4 - (-2)^2 & \text{si } x \in [-4, -2], \\ 4 - (-1)^2 & \text{si } x \in [-2, 0[, \\ 4 - (0)^2 & \text{si } x \in [0, 2[, \\ 4 - (1)^2 & \text{si } x \in [2, 4[, \\ 4 - (2)^2 & \text{si } x \in [4, 6]. \end{cases}$$

1 punto

De donde  $(f \circ g)$  queda finalmente definida por :

$$(f \circ g) : [-4, 6[ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow (f \circ g)(x)$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-4, -2[ \cup [4, 6[, \\ 3 & \text{si } x \in [-2, 0[ \cup [2, 4], \\ 4 & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

1 punto

**Nombre:**

**Curso:**

4. Considere el polinomio  $p(x) = 4x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 9x^2 - x + 3$ .

(a) [3 puntos] Demuestre que  $x^2 + 1$  es factor de  $p(x)$ .

solución:

$x^2 + 1$  es factor de  $p(x)$  si y solo si existe un polinomio  $h(x)$  tal que  $p(x) = h(x)(x^2 + 1)$ , que es equivalente a: al dividir  $p(x)$  por  $(x^2 + 1)$  es resto es cero.

1 punto

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 9x^2 - x + 3 : x^2 + 1 = 4x^3 - 12x^2 - x + 3 \\ \underline{-(4x^5 + 4x^3)} \\ -12x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 3 \\ \underline{-(-12x^4 - 12x^2)} \\ -x^3 + 3x^2 - x + 3 \\ \underline{-(-x^3 - x)} \\ 3x^2 + 3 \\ \underline{-(3x^2 + 3)} \\ 0 \end{array} \right.$$

1 punto

Por lo tanto como  $p(x) = (x^2 + 1)(4x^3 - 12x^2 - x + 3)$  entonces  $(x^2 + 1)$  es factor de  $p(x)$ .

1 punto

(b) [3 puntos] Encuentre todas las raíces reales del polinomio  $p(x)$ .

solución:

Como  $p(x) = (x^2 + 1)(4x^3 - 12x^2 - x + 3)$  tenemos que  $a$  es raíz de  $p(x)$  si solo si  $a$  es raíz de  $(x^2 + 1)$  o  $a$  es raíz de  $h(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$ .

$a$  no puede ser raíz de  $x^2 + 1$  pues como  $x^2 \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $x^2 + 1 \geq 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto para todo  $a \in \mathbb{R}$  se cumple que  $a^2 + 1 \neq 0$ .



1 punto

Como los coeficientes del polinomio  $h(x)$  son enteros las posibles raíces racionales de  $h(x)$  serán  $a = \frac{m}{n}$ , donde  $m$  divide a 3 y  $n$  divide a 4. Luego como los divisores de 3 son  $\{\pm 1, \pm 3\}$  y los divisores de 4 son  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ , tenemos que las posibles raíces racionales de  $h(x)$  serían:

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4} \right\}$$

0.5 puntos

Evaluamos :

$$h(1) = 7 - 13 \neq 0 \text{ entonces no es raíz.}$$

$$h(-1) = 3 - 12 + 1 + 3 \neq 0 \text{ entonces no es raíz.}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 3 = 0$$

Luego  $\frac{1}{2}$  es raíz. Por el teorema del factor del polinomio  $x - \frac{1}{2}$  es factor de  $h(x)$ . Dividiendo se obtiene :

$$h(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 5x + 3)$$

0.5 puntos

Ahora veamos si  $s(x) = 2x^2 - 5x - 3$  tiene raíces. Como  $\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 \geq 0$  el polinomio  $s(x)$  tiene raíces reales.

Así  $s(x) = (x - 3)(2x + 1)$ , luego  $s(x) = 0$  si solo si  $x = 3$  o  $x = -\frac{1}{2}$

0.5 puntos

Luego  $p(x) = (x^2 + 1)h(x) = (x^2 + 1)(2x - 1)(2x + 1)(x - 3)$  tiene 3 raíces reales, ellas son  $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\}$ .

0.5 puntos

**Nombre:**

**Curso:**

5. La temperatura en una oficina varía según la función

$$T(x) = 19 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2\pi\right)$$

donde  $x$  representa el tiempo en horas pasada la media noche.

Grafique la función temperatura para  $x \in [0, 24]$  indicando en que horas se provocan las temperaturas máximas y mínimas.

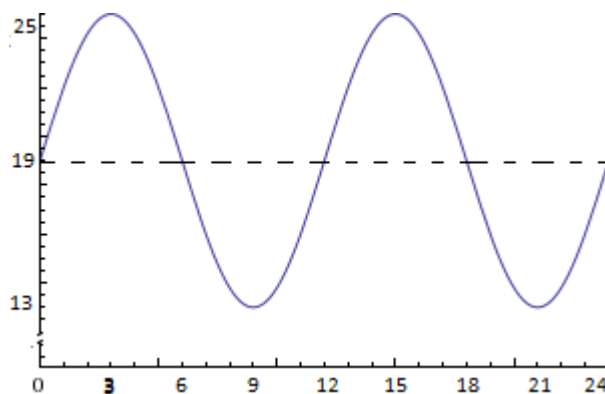
Solución:

Podemos notar que:

- La amplitud de la función es 6.
- El período es  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$
- Diferencia de fase o traslación horizontal es  $-\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = -12$
- Traslación vertical 19.

1 punto

Con estos datos podemos ver que el gráfico de la función, en el intervalo  $[0, 24]$ , es



3 puntos

Luego los máximos de la función son cuando  $x = 3$  y  $x = 15$   
Los mínimos de la función son cuando  $x = 9$  y  $x = 21$

2 puntos