Octava Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Junio, 2012

1. Determine la función afin que mejor aproxima a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ cerca del origen.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$. Determine si f es diferenciable.

3. Sea f diferenciable en a, calcule el siguiente límite en terminos de $f'(a)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

4. Considere la función $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(2, f(2))$.

5. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{x-1}{x+1}$ que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

6. Cuántas rectas tangentes a la curva $y = \frac{x}{x+1}$ pasan por el punto (1,2)?. En cuáles puntos estas tangentes tocan a la curva?.

7. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

   b) $f(x) = \frac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x^3 + 2}$.

   c) $f(x) = (x^3 - 2x + 4)^{2012}$.

   d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt[3]{x^4 - 2 + 2}}$.

e) $f(x) = (1+\sqrt{x})^4(x-\sqrt{x}-1)^5$.

f) $f(x) = |x^2+x+1|$.

8. Si f es diferenciable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las siguientes funciones:

   a) $g(x) = x^2 f(x) - 2f(-2x)$

   b) $g(x) = \frac{f(x+1)}{x^2}$

   c) $g(x) = \frac{x^2}{f^2(x)}$

   d) $g(x) = \frac{1+xf(x)}{f^3(\sqrt{x})}$.

9. Suponga que $f(x) = xg(x)$ para alguna función g que es continua en 0 (no necesariamente diferenciable). Pruebe que f es diferenciable en 0 y encuentre $f'(0)$ en terminos de g.

10. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tales que $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \geq g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x > 0$.

11. Se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba a una velocidad constante de 600 m/h. A 50 metros del punto de lanzamiento se encuentra un observador que sigue la trayectoria del proyectil. Determine la razón de cambio instantanea del ángulo de elevación del observador, cuando el proyectil ha recorrido 100 metros.

12. Un nadador se lanza desde un trampolín de altura 32 pies sobre el nivel de la piscina. La posición del nadador después de t segundos desde que salto es $h(t) = -16t^2 + 16t + 32$ pies. Determine la velocidad del nadador en el momento que impacta el agua.

13. Los Ichthyosaurus fueron un grupo de reptiles marinos comparable en tamaño a los actuales delfines. Ellos se extinguieron durante el Cretaceo. Basado en el estudio de algunos fósiles se encontró la siguiente relación
$$C(x) = (1,262)[E(x)]^{0,9}$$

donde $C(x)$ es el largo del cráneo a la edad x y $E(x)$ es el largo de la espina dorsal a la edad x. Calcule $\frac{C'(x_1)}{C(x_1)}$ en el momento en que $\frac{E'(x_1)}{E(x_1)} = 1$.

14. Determine cuál es el punto de la curva $y = \frac{1}{x}$ en el primer cuadrante que está mas cerca del origen.

15. Se requiere cerrar un potrero de forma rectangular, donde uno de los lados es el borde de un río, para que los animales beban agua. Se dispone de 10000 metros de alambre y el cerco debe ser de tres corridas de alambre. Determine las dimensiones del potrero de mayor área que se puede cercar con el alambre.

16. La reacción del cuerpo a las drogas con frecuencia está dada por una relación del tipo
$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$
donde D es la dosis y C (una constante) es la dosis máxima que puede administrarse. La razón de cambio de $R(D)$ con respecto a D se denomina *sensibilidad*. Encuentre el valor de D para el que la sensibilidad es máxima.

17. Pruebe que toda función continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que posee derivada nula en todos los puntos $x \in (a, b)$ es constante.

18. Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, derivables en (a, b) y tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

19. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en (a, b). Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in [a, b]$ entonces pruebe que para todo x e y en $[a, b]$ se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

20. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y los valores de x donde f alcanza máximos y mínimos.