Pauta Control 7 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 14 Mayo, 2012

Elija sólo un problema.

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = -3x + 2$ y $g(x) = -x + 3$.

   Indique si $(fog)(x)$ es creciente o decreciente y demuestre su conjetura.

   En efecto:

   $Dom(fog) = \{x \in \mathbb{R} \ / g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$
   y $(fog)(x) = f(g(x)) = f(-x + 3) = -3(-x + 3) + 2 = 3x - 7$, con $x \in \mathbb{R}$.

1 punto.

   Cojetura: $y = (fog)(x) = h(x)$ es una función creciente.

0.5 punto.

   Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$, tenemos: $h(b) - h(a) = 3b - 7 - (3a - 7) = 3(b - a)$,

2.5 punto.

   por hipótesis, $b - a > 0$ luego $h(b) - h(a) > 0$, así, $h(b) > h(a)$, por lo tanto h es una función creciente.

2 punto.

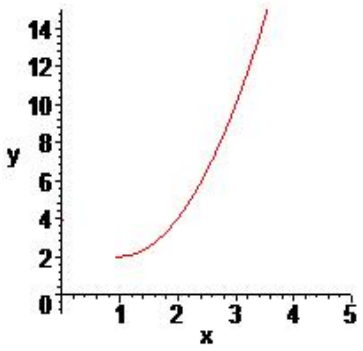
   (Otra manera, es probar que composición de funciones decrecientes es creciente)

2. Sea $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$.

Indique si f es inyectiva, en caso de serlo demuéstrelo y si es falso, presente un contraejemplo.

En efecto:

El gráfico de $y = f(x) = 2(x-1)^2 + 2.$ está dado por:



1 punto.

Se observa a que a puntos distintos, se tienen imágenes distintas, por lo tanto la conjetura es que: $y = f(f)$ es inyectiva.

Sean $a, b \in [1, \infty[$ tal que:
$f(a) = f(b) \Leftrightarrow 2(a-1)^2 + 2 = 2(b-1)^2 + 2 \Leftrightarrow 2(a-1)^2 = 2(b-1)^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 = (b-1)^2$.

2.5 punto.

Como $a - 1 \geq 0$, $b - 1 \geq 0$

1 punto.

$a - 1 = b - 1 \Leftrightarrow a = b$.

0.5 punto.

Por lo tanto la función es inyectiva.

1 punto.