Pauta Control 4 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 16 Abril, 2012

1. Determine el coeficiente de x^{14}, en el desarrollo de: $(x+a)^{15}+(x-2a)^{18}$.

<u>Solución:</u>

Para determinar el coeficiente de x^{14}, hay que calcular la suma de los coeficientes respectivos de x^{14} de los binomios involucrados.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

De esta manera, para encontrar el coeficiente de x^{14} en el binomio,

$(x+a)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \begin{pmatrix} 15 \\ k \end{pmatrix} \cdot (x)^{15-k} \cdot (a)^k$, el valor de k debe ser tal que $15-k=14$, por lo tanto $k=1$.

$\boxed{\text{1.5 punto.}}$

Así el coeficiente es $\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a$.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

De la misma forma, el coeficiente de x^{14} en el binomio,

$(x-2a)^{18} = \sum_{j=0}^{18} \begin{pmatrix} 18 \\ j \end{pmatrix} \cdot (x)^{18-j} \cdot (-2a)^j$, el valor de j debe ser tal que $18-j=14$, por lo tanto $j=4$.

$\boxed{\text{1.5 punto.}}$

Así el coeficiente es $\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (-2a)^4$.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Por lo tanto el coeficiente buscado está dado por: $\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (-2a)^4$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, encuentre el valor de la siguiente suma:

   $\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot (2x)^{3n-3k} \cdot (-8)^k$.

   <u>Solución:</u>

   $$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot (2x)^{3n-3k} \cdot (-8)^k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot ((2x)^3)^{n-k} \cdot (-8)^k.$$

   $\boxed{\text{2 punto.}}$

   $$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (8x^3)^{n-k} \cdot (-8)^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (8x^3)^{n-k} \cdot (-8)^k - (8x^3)^{n-0} \cdot (-8)^0.$$

   $\boxed{\text{2 punto.}}$

   Así,

   $$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot (2x)^{3n-3k} \cdot (-8)^k = (8x^3 - 8)^n - (8x^3)^n.$$

   $\boxed{\text{2 punto.}}$