

Pauta Prueba Parcial 2 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sabado 12 de Junio, 2010

Tiempo : 120 minutos .

Nombre:

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 4x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Demuestre que f es una función invertible y encuentre f^{-1} .

Solución:

$$\text{Notar que } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 4x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ -(x-2)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Luego sean $a, b \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, 2) \cup [2, \infty)$, entonces se tiene que:

Si $a, b \in (-\infty, 2)$ tal que $f(a) = f(b)$ entonces $\frac{-1}{a-2} = \frac{-1}{b-2}$, lo que implica que $-(b-2) = -(a-2)$. Entonces $a = b$.

Si $a, b \in [2, \infty)$ tal que $f(a) = f(b)$ entonces $-(a-2)^2 = -(b-2)^2$, lo que implica que $(a-2)^2 = (b-2)^2$. Entonces $a = b$.

Si $b \in]-\infty, 2[$ y $a \in [2, \infty[$ tal que $f(a) = f(b)$ entonces tenemos:

$$\begin{aligned} -a^2 + 4a - 4 &= \frac{1}{2-b} \\ -a^2(2-b) + 4(2-b)a - 8 + 4b &= 1 \\ -a^2(2-b) + 4(2-b)a + 4b - 9 &= 0 \end{aligned}$$

notemos que esta última igualdad es una ecuación cuadrática con incógnita a . El discriminante de esta ecuación es:

$$16(2-b)^2 + 4(2-b)(4b-9) = 4(2-b)(4(2-b) + 4b - 9) = 4(2-b)(-1) = 4(b-2)$$

y esta expresión es negativa en nuestro caso, pues $b \in]-\infty, 2[$, luego no hay valores de a que cumplan esta igualdad, por lo tanto $f(a) \neq f(b)$. El caso Si $a \in (-\infty, 2)$ y $b \in [2, \infty)$ es similar y se obtienen las mismas conclusiones.

Por tanto f es una función inyectiva.

Ahora notemos que si $x < 2$ entonces $x-2 < 0$, luego $\frac{1}{x-2} < 0$, lo que equivale a decir que $\frac{-1}{x-2} > 0$ y es claro que toma todos los valores en

\mathbb{R}^+ . Si $x \geq 2$ entonces $x - 2 \geq 0$, luego $(x - 2)^2 \geq 0$, lo que equivale a decir que $-(x - 2)^2 \leq 0$ y es claro que se obtiene todos los valores en \mathbb{R}^- .

Por tanto $Im(f) = \mathbb{R}$, es decir f es una función epiyectiva.

Entonces f es una función biyectiva lo que implica que f es una función invertible.

Ahora determinemos f^{-1} .

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$, con $x \in Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, 2) \cup [2, \infty)$.

Si $y = f(x) > 0$ entonces $x \in (-\infty, 2)$ y se tiene que

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{-1}{x-2} \Leftrightarrow y(x-2) = -1 \Leftrightarrow xy - 2y = -1 \Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{y}$$

Si $y = f(x) \leq 0$ entonces $x \in [2, \infty)$ y se tiene que

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -(x-2)^2 \Leftrightarrow -y = (x-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{-y} + 2 = x$$

Luego afirmamos que $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, es la función definida por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

En efecto vemos que $f^{-1} \circ f = id$ y $f \circ f^{-1} = id$.

Notar que la biyectividad también se puede demostrar usando el gráfico de la función justificando de forma apropiada.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cos(x) - x^2$.

(a) ¿Existe $x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) = x_0^2$?

Solución:

Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) = x_0^2$ entonces $x_0^2 \cos(x_0) - x_0^2 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 \cos(x_0) = 2x_0^2 \Leftrightarrow \cos(x_0) = 2$, lo que no puede ser, puesto que $|\cos(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego no existe $x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) = x_0^2$.

(b) ¿Es f una función inyectiva?

Solución:

Consideremos $a = 0$ y $b = 2\pi$ entonces $a \neq b$ y se tiene que $f(a) = 0 = f(b)$. Por tanto f no es inyectiva.

Notar que en esta pregunta tambien se puede justificar indicando que f es una función par.

(c) ¿Es cierto que $f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$?

Solución:

Sabemos que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que $-x^2 \leq x^2 \cos(x) \leq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto último implica que $-2x^2 \leq x^2 \cos(x) - x^2 \leq 0$, es decir $f(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Considere los polinomios $p(x) = x^5 - 6x + 7$ y $q(x) = x^2 + 2x$.

(a) Si $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$, con $\deg(r(x)) < 2$, calcule todas las raíces del polinomio $d(x)$.

Solución:

Usando algoritmo de la división se tiene que $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$, donde $d(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ y $r(x) = 10x + 7$.

Como $d(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, veamos si tiene raíces racionales.

Los divisores de 8 son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ y ± 8 y los divisores de 1 son ± 1 . Luego las posibles raíces racionales de $d(x)$ son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ y ± 8 .

Notamos que $d(2) = 0$ entonces $x - 2$ divide a $d(x)$ y por tanto $d(x) = (x - 2)d_1(x)$, donde $d_1(x) = x^2 + 4$.

Como $x^2 + 4 > 4 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x^2 + 4 \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto la única raíz (real) de $d(x)$ es 2.

(b) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{q(x)}$? Justifique su respuesta.

Solución:

Supongamos que existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x + 7}{x^2 + 2x}$, digamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x + 7}{x^2 + 2x} = L$, con $L \in \mathbb{R}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2x = 0$, se tiene que por álgebra de límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10x + 7}{x^2 + 2x} \right) (x^2 + 2x) = L \times 0 = 0$$

Por otro lado se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10x + 7}{x^2 + 2x} \right) (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} 10x + 7 = 7$$

Luego por unicidad del límite se tiene que $0 = 7$, lo cual es una contradicción.

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{q(x)}$ no existe.

4. Analice la existencia de los siguientes límites y calcule en caso de que exista.

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, donde a es un número real positivo.

Solución:

Notar que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ existe y su valor es $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 17} \frac{[x]}{x}$

Solución:

Notar que $\lim_{x \rightarrow 17^+} \frac{[x]}{x} = \frac{17}{17} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 17^-} \frac{[x]}{x} = \frac{16}{17}$.

Por tanto como los límites laterales existen y son distintos, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 17} \frac{[x]}{x}$ no existe.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \tan(2x)}$

Solución:

Notar que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \tan(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(2x))(1 + \cos(2x))}{x \tan(2x)(1 + \cos(2x))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{x \tan(2x)(1 + \cos(2x))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x \tan(2x)(1 + \cos(2x))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos(2x)}{x(1 + \cos(2x))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} \frac{\cos(2x)}{(1 + \cos(2x))}
 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} = 2$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{1 + \cos(2x)} = \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \tan(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} \frac{\cos(2x)}{(1 + \cos(2x))} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \tan(2x)}$ existe y su valor es 1.