

## Pauta prueba global

1. a) Sea  $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x^2 + x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$   
¿Es  $f$  una función continua en  $x = 0$ ?

solución:

Para que  $f$  sea una función continua en 0, se debe cumplir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Ahora calcularemos el límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x(x+1)} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} \frac{1}{x+1} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Luego como el  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \neq 1 = f(0)$  entonces  $f$  no es continua en 0.

- b) Demuestre que existe  $x_0 \in ]0, 1[$  tal que  $\cos(x_0) = x_0$ .

solución:

Consideremos la función

$$g(x) = \cos(x) - x$$

La función  $g$  es una función continua por algebra de funciones continuas, pues la función  $\cos(x)$  y la función  $x$  son continuas.

Además note que

$$g(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0 \quad , \quad g(1) = \cos(1) - 1 < 0$$

Así por el teorema de Bolzano, existe un  $x_0 \in ]0, 1[$  tal que  $g(x_0) = 0$ , luego

$$\cos(x_0) = x_0$$

2. a) Sea  $f$  una función derivable tal que  $f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = x^2$ . Calcule  $f'(1)$ .

solución:

Considere la función  $h(x) = \frac{x}{2x+1}$ .

Luego la igualdad  $f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = x^2$  se puede escribir como

$$f(h(x)) = x^2$$

Como se pide calcular la derivada de la función  $f$  en el punto 1, tendremos que derivar la expresión anterior.

La expresión la podemos derivar sin problema pues las funciones  $f$ ,  $h$  y  $(f \circ h)$  son derivables. Debemos tener el cuidado de que al derivar la expresión  $f \circ h$  tenemos que ocupar la regla de la cadena y además respetar la igualdad.

$$\begin{aligned} ((f \circ h)(x))' &= (x^2)' \\ f'(h(x))h'(x) &= 2x \\ f'\left(\frac{x}{2x+1}\right)\left(\frac{x}{2x+1}\right)' &= 2x \\ f'\left(\frac{x}{2x+1}\right)\left(\frac{1(2x+1) - x(2)}{(2x+1)^2}\right) &= 2x \\ f'\left(\frac{x}{2x+1}\right)\left(\frac{1}{(2x+1)^2}\right) &= 2x \\ f'\left(\frac{x}{2x+1}\right) &= 2x(2x+1)^2 \end{aligned}$$

Como queremos calcular  $f'(1)$  debemos encontrar el valor de  $x$ , para el cual

$$\frac{x}{2x+1} = 1$$

lo que equivale a escribir  $x = 2x + 1$  es decir  $x = -1$ .

Así reemplazando  $x = -1$  tenemos

$$\begin{aligned} f' \left( \frac{-1}{2(-1) + 1} \right) &= 2(-1)(2(-1) + 1)^2 \\ f'(1) &= -2 \end{aligned}$$

- b) Sea  $f$  una función continua en  $[3, 5]$  y derivable en  $]3, 5[$ , tal que  $f(3) = 6$  y  $f(5) = 10$ . Defina  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ , con  $x \in [3, 5]$ . Demuestre que existe  $x_0 \in ]3, 5[$  tal que  $g'(x_0) = 0$ . Además muestre que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $x_0$  pasa por el punto  $(0, 0)$ .

solución:

La función  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  es una función derivable en  $]3, 5[$  por álgebra de funciones derivables, pues por hipótesis la función  $f$  lo es y la función  $x$  también lo es y lo importante es que nunca es 0 en  $]3, 5[$ .

Ahora como  $f(3) = 6$  y  $f(5) = 10$ , tenemos que :

$$g(3) = g(5) = 2$$

Luego se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle, así existe un  $x_0 \in ]3, 5[$  tal que

$$g'(x_0) = 0$$

Hasta ahora solo hemos probado la primera parte del problema. Recordemos que la recta tangente que pasa por el punto  $x_0$  es de la forma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Para que esta recta pase por el punto  $(0, 0)$ , debemos probar que se tiene la siguiente igualdad

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0)$$

Lo único que sabemos es que  $g'(x_0) = 0$ , luego como  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ , se tiene

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

ahora reemplazando por  $x_0$  se tiene:

$$0 = \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$$

y lo anterior es equivalente a

$$0 = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$$

que es la condición para que la recta tangente en  $x_0$  pase por el punto  $(0, 0)$ .

3. Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$ . Grafique  $f$  indicando intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad, de convexidad, puntos de inflexión, máximos, mínimos, asíntotas e intersecciones con los ejes.

solución:

Haciendo los respectivos cálculos se obtiene que

$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x(x^2 - 6)}{(x^2 + 2)^3} = \frac{6x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})}{(x^2 + 2)^3}$$

Los puntos críticos son  $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ .

Los puntos de inflexión son  $\{0, \sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$ .

Ahora construiremos una tabla en la cual representaremos los signos de la derivada para así saber los intervalos de crecimiento, decrecimientos, concavidad, convexidad y asíntotas.

	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{2}$		$0$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'$		-		-		+		+		-		-	
$f''$		-		+		+		-		-		+	

Intervalos de crecimiento:  $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ .

Intervalos de decrecimiento  $] -\infty, -\sqrt{2}[ \cup ] \sqrt{2}, +\infty[$ .

Intervalos de convexidad (concava hacia arriba):  $] -\sqrt{6}, 0[ \cup ] \sqrt{6}, +\infty[$ .

Intervalos de concavidad (concava hacia abajo):  $] -\infty, -\sqrt{6}[ \cup ] 0, \sqrt{6}[$ .

Como  $f''(-\sqrt{2}) > 0$  entonces  $-\sqrt{2}$  es un mínimo local.

Como  $f''(\sqrt{2}) < 0$  entonces  $\sqrt{2}$  es un máximo local.

Ahora calcularemos las asíntotas. Primero si  $y = ax + b$  es una asíntota en dirección  $+\infty$  se tiene que

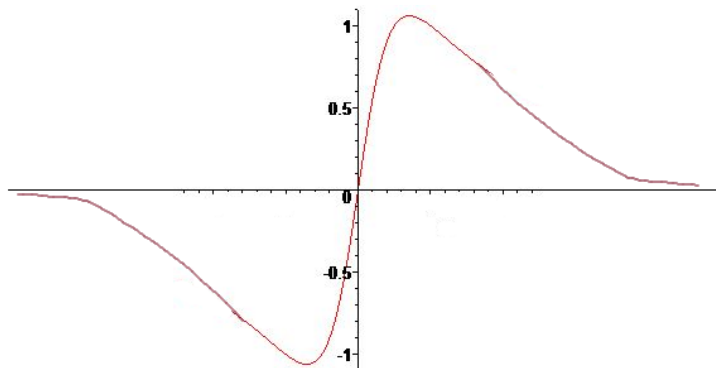
$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 1} = 0$$

y así:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Luego la ecuación de nuestra asíntota en dirección  $+\infty$  es  $y = 0$ .  
Ahora debemos hacer los cálculos en dirección  $-\infty$ . En este caso, es claro que los cálculos son similares, así la asíntota sera  $y = 0$ .

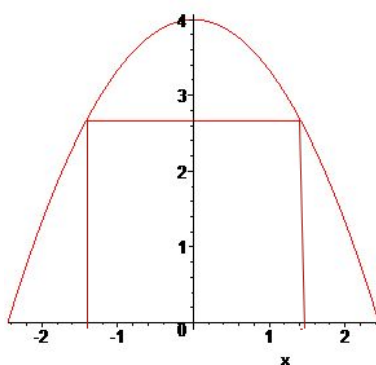
Finalmente el gráfico de la función es:



4. Un rectángulo tiene su base sobre el eje  $X$  y los vértices del lado paralelo a la base se encuentran sobre la parábola  $y = 2 - \frac{2}{3}x^2$  con  $y \geq 0$ .  
¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima?

solución:

Tenemos la siguiente situación gráfica.



Para  $x \in [0, \sqrt{6}[$ , se tiene que el área del rectángulo será:

$$A(x) = 2x \left( 4 - \frac{2}{3}x^2 \right) = 8x - \frac{4}{3}x^3$$

Ahora si  $x \in ]-\sqrt{6}, 0]$ , se tiene que el área del rectángulo será la misma que de  $-x \in [0, \sqrt{6}[$ .

De esta forma consideraremos la función  $A(x)$  con  $x \in [2, \sqrt{6}[$ .

Derivaremos la función para obtener los puntos críticos de ella:

$$A'(x) = 8 - 4x^2$$

Así en  $[0, \sqrt{6}[$  hay solo un punto crítico, y este es  $\sqrt{2}$ .

Es muy necesario saber de que tipo es este punto critico, ya que no necesariamente un punto critico siempre es un máximo o un mínimo.

$$A''(x) = -8x$$

y así evaluando en  $x = \sqrt{2}$  se tiene que este punto es un máximo pues  $A''(\sqrt{2}) < 0$ .

Luego las longitudes del rectángulo con área máxima son

$$2\sqrt{2} \text{ y } f(\sqrt{2}) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$