Novena Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Junio, 2012

1. Grafique $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donde D está dado en cada caso y f se define en cada caso.

   a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, donde $D = \mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, donde $D = \mathbb{R}$.

   c) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, donde $D - \{1\}$.

   d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$, donde $D = \mathbb{R}$.

   e) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, donde $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

2. Herón de Alejandría en el siglo I de nuestra era, aseguró que el área de un triángulo es
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
donde p es el semiperímetro del triángulo de lados a, b y c. ¿Está usted de acuerdo con Herón?.

3. El teorema del Seno dice que
$$K = \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$
donde a, b y c son los lados de un triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es α, el ángulo en B es β y el ángulo en C es γ. De una interpretación geométrica a K.

4. Si x es tal que $cos(x) \neq 0$, muestre que $tan(x) = tan(x + \pi)$.

5. Si $tan(x) = 1$, sin hacer cálculos encuentre el valor de $cos(x) - sen(x)$.

6. Demuestre que $|sen(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

7. Encuentre una interpretación geométrica para $tan(x)$. Haga lo mismo para $cot(x), sec(x)$ y $csc(x)$.

8. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ tale que $sen(x) + cos(x) = 0$.

9. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $3sen^2(x) + cos^2(x) + cos(x) = 0$.

10. Calcule los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{sen(x)}$

    b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{sen^3(t)}{(2t)^3}$

    c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tan(x)}{x}$

    d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x}$

    e) $\lim\limits_{x \to a} |sen(x) - sen(a)|$

    f) $\lim\limits_{x \to a} cos(x) - cos(a)$

    g) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{sen(a + h) - sen(a)}{h}$

    h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{cos(a + h) - cos(a)}{h}$

    i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tan(x) - sen(x)}{x^3 tan(x)}$

j) $\lim_{x\to 0} arcsen\left(\frac{sen(x)}{x}\right)$

k) $\lim_{x\to 0} arctg\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

l) $\lim_{x\to -\infty} arctg\left(\frac{(1+3x)^3}{x^2}\right)$

11. Demuestre que si $|x-y|<\epsilon$ entonces $|sen(x)-sen(y)|<\epsilon$. Ayuda: Note que

$$|sen(x)-sen(y)| = \left|2sen\left(\frac{x-y}{2}\right) cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$$

12. Demuestre que para cualquier valor de $x\in\mathbb{R}$, se tiene la igualdad

$$cos^4(x) - sen^4(x) = 1 - 2cos^2(x)$$

13. Encuentre $sen(2x)$ conocidos $sen(x)$ y $cos(x)$. Haga lo mismo para $cos(2x)$ y $tan(2x)$.

14. ¿Es cierto que $sen(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$, para cualquier $x\in[-1,1]$?.

15. Grafique las funciones siguientes:

(a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.
(b) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
(c) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen(x)+cos(x)$.

16. Una rueda de radio 2 metros gira a razón de 10 vueltas por minuto, en torno al origen. En el instante $t=0$ hay un punto A en la ubicación $(2,0)$. Describa la altura $y(t)$ del punto A con respecto al tiempo. Grafique la función $y(t)$.

17. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(2x)}{3x} & \text{si } x\neq 0 \\ A & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Determine el o los valores de A de manera que f sea una función continua.

18. Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{tan(x)}{sen(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

una función continua. ¿Cuál es el valor de A?.

19. Considere la función $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = arctan(\sqrt{x^2 - 1})$$

Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(2, f(2))$.

20. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = tan^2(sec^3(\sqrt{\pi x}))$

b) $f(x) = x - 3sen(x)$

c) $f(x) = xsen(3x) + cos(x^2)$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{sen(x)}} + \frac{1}{tan(x)}$

e) $f(x) = sen\left(tan\left(\sqrt{1 + x^3}\right)\right)$

f) $f(x) = arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

g) $f(x) = x^2cos(arcsen(x^2 - 3))$

21. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

22. Sea $f : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{tan(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable.

23. Un mecanismo circular hace mover un pistón, de tal forma que en el segundo t su posición es

$$x(t) = 5 + 3cos(2t)$$

(a) Calcule la velocidad del pistón en cada segundo t.
(b) Determine la máxima velocidad del pistón.

24. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es la Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5,4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0 y su brillantez cambia en $\pm 0{,}35$. En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t, donde éste se mide en días, se modela por la función:

$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35 sen\left(\frac{2\pi}{5{,}4}t\right)$.

(a) Halle la razón de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Grafique B.

25. Se ha modelado la duración de la luz del día (en horas) en la ciudad de Filadelfia en función del día t del año por:

$L(t) = 12 + 2{,}8 sen\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$.

Use este modelo para comparar cómo aumenta el número de horas de luz de día en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

26. Encuentre los puntos sobre la curva $y = \frac{cos(x)}{2+sen(x)}$, en los cuales la tangente es horizontal.

27. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y luego, se deja en ibertad, vibra verticalmente en un movimiento armnico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2cos(t) + 3sen(t)$, $t \geq 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tomando la dirección positiva la correspondiente hacia abajo).

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) Grafique las funciones velocidad y posicin.

Polinomios

28. ¿Existe una función polinomial que cuya gráfica pase por los puntos $(1,1),(0,1)$ y $(2,2)$?.

29. Considere una función polinomial de grado 3, ¿es siempre estrictamente creciente?.

30. ¿Es cierto que si un polinomio no tiene raíces en $\mathbb{R}$ no se puede descomponer como producto de polinomios?.

31. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios de grado n y m respectivamente. ¿Es cierto que al componer las funciones polinomiales asociadas a esos polinomios resulta una función polinomial de grado nm?.

32. ¿Es cierto que el polinomio x^4+1 no se puede descomponer como un produnto de dos polinomios de grado menor que 4?.

33. Muestre que c es una raíz de $f(x)$ y factorice por $(x-c)$.

    (a) $f(x)=x^3+x^2-2x+12, \quad c=-3$
    (c) $f(x)=4x^3-6x^2+8x-3, \quad c=1/2$
    (d) $f(x)=27x^4-9x^3+3x^2+6x+1, \quad c=-1/3$

34. Determine las raíces racionales del polinomio:

    (a) $p(x)=x^6+x^5+x^4-2x^2-1$.
    (b) $p(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{6}x^2-\frac{1}{9}x$.

35. Encuentre un polinomio de primer grado que dividido por $x-1$ y $x+3$ da de resto 6 y 2, respectivamente.

36. Encuentre el valor m para que el polinomio $2x^4+9x^3+2x^2-6x+m$ tenga resto 12 al dividirlo por $x+2$.

37. Encuentre los números reales k para los cuales $f(x)$ es factorizable por $q(x)$.

    (a) $f(x)=kx^3+x^2-3k^2+11, \quad q(x)=x+2$
    (b) $f(x)=x^3-4kx+3, \quad q(x)=x-1$.

38. Determine el polinomio $p(x)=ax^2+bx+4$ sabiendo que es divisible por $x+2$ y que los restos obtenidos al dividirlo por $x+1$ y $x+3$ son iguales.

39. Descomponga el polinomio $p(x)=x^5-x$ en la forma más reducida posible.

40. Pruebe que un polinomio de grado n en $\mathbb{R}[x]$ tiene a lo más n raíces.