Pauta Control 10 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 11 Junio, 2012

Elija sólo un problema.

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x - 3|x|$. Demuestre utilizando la definición que la función no es diferenciable en $x = 0$.

   En efecto:
   Una función f es diferenciable en $x = 0$ si $f'(0)$ existe, así:

   $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 3|h|}{h}$$

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   Por otra parte:

   $$\lim_{h\to 0^+} \frac{h - 3|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h - 3h}{h} \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h}{h} = -2$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   $$\lim_{h\to 0^-} \frac{h - 3|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h + 3h}{h} \lim_{h\to 0^-} \frac{4h}{h} = 4$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Como los límites laterales son distintos, se tiene,

   $$\lim_{h\to 0} \frac{h - 3|h|}{h}, \text{ no existe}, \ \therefore\ f \text{ no es diferenciable en } x = 0.$$

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

2. De las siguientes funciones **elija sólo una** y encuentre su derivada.

(a) $f(x) = (2x)^{10} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^4} + 1}$

Solución:

Aplicaremos regla del producto y composición de funciones para derivar.

$$f'(x) = [(2x)^{10}]' \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^4} + 1} + (2x)^{10} \cdot \left((2x^{-4} + 1)^{1/3}\right)'$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 10(2x)^9 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^4} + 1} + (2x)^{10} \cdot \frac{1}{3}\left(2x^{-4} + 1\right)^{-2/3} \cdot -8x^{-5}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 20(2x)^9 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^4} + 1} - \frac{2^{13}}{3}x^5 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{x^4+2}\right)^2}$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

(b) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^3+5}\right)^{50}$

Solución:

Aplicaremos regla de la cadena y cuociente de funciones para derivar.

$$f'(x) = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^3+5}\right)^{49} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^3+5}\right)'$$

$\boxed{\text{2 punto.}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^3+5}\right)^{49} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x+1})' \cdot (x^3+5) - \sqrt{x+1} \cdot (x^3+5)'}{(x^3+5)^2}\right)$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^3+5}\right)^{49} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x^3+5) - \sqrt{x+1} \cdot (3x^2)}{(x^3+5)^2}\right)$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^3+5}\right)^{49} \cdot \left(\frac{x^3+5-2(x+1) \cdot 3x^2}{2\sqrt{x+1}(x^3+5)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^3+5}\right)^{49} \cdot \left(\frac{-5x^3-6x^2+5}{2\sqrt{x+1}(x^3+5)^2}\right)$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$