Capítulo 6
Combinatoria

6.1 Introducción

Se trata de contar el número de elementos de un conjunto finito caracterizado por ciertas propiedades.

Principios fundamentales

1. Principio de la multiplicación

Supongamos que un procedimiento, (1) puede hacerse de n maneras. Supongamos que un segundo procedimiento (2), se puede hacer de m maneras.También supongamos que cada una de las maneras de efectuar (1) puede ser seguida por cualquiera de las maneras de efectuar (2). Entonces el procedimiento que consta de (1) seguido por (2) se puede efectuar de nm maneras.

2. Principio de la suma

Supongamos que un procedimiento, (1) puede hacerse de n maneras. Supongamos que un segundo procedimiento, (2) puede hacerse de m maneras. Supongamos además que no es posible que $ambos$, (1) y (2), se hagan juntos. Entonces el número de manerascomo se puede hacer (1) o (2) es $n+m$.

6.2 Permutaciones

Sea S un conjunto con k elementos y $0 \leq k \leq n$.

Definición 1.

Llamaremos una k-permutación de los elementos de S a cualquier relación de k elementos de S en el cual importa el orden relativo. El número total de k-permutaciones que se puede formar se denotará por P_k^n.

Teorema 1.

$$P_k^n = n(n-1)(n-2)\ \cdot\ \cdot\ \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Demostración.

Se desea escoger k de esos elementos u objetos, $0 \leq k \leq n$ y permutamos el k elegido. Se trata de llenar una caja que tiene n compartimentos, y nos detenemos después que se ha llenado el compartimento k-ésimo. Así, el primer compartimento puede llenarse de n maneras, el segundo de $(n-1)$ maneras, ... y el k-ésimo compartimento de $n-(k-1)$ maneras. Por tanto por el principio de la multiplicación se puede efectuar el proceso completo de

$$n(n-1)(n-2)\ \cdot\ \cdot\ \cdot (n-k+1)$$

y usando la notación factorial se puede escribir

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definición 2.

En el caso $k = n$, la k-permutación se llama permutaciones y su número se denota simplemente por P_n.

Teorema 2.

$$P_n = n!$$

La demostración es inmediata, se deja propuesta.

Permutaciones con repetición.

Sea $\overline{P_k^n}$ el número de permutaciones en el caso en que se acepta repetición de los elementos.

Teorema 3

$$\overline{P_k^n} = n^k$$

Demostración.

Es análoga a la demostración del teorema 1, solo que como se acepta la repetición de los elementos, entonces el primer compartimento puede llenarse de n maneras, el segundo de n maneras, ... y el k-ésimo compartimento de n maneras. Por tanto por el principio de la multiplicación

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \cdot \cdot n}_{k\text{-veces}} = n^k$$

Si los elementos de S no son todos distintos si no que hay n_1 iguales entre si, n_2 iguales entre si, hasta n_k iguales con $0 \leq n_i \leq n$ y $n_1 + n_2 + \cdot \cdot \cdot + n_k = n$, entonces el número de permutaciones de los n elementos es: $P^n_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$

Teorema 4.

$$P^n_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdot \cdot \cdot n_k!}$$

Demostración.

Se deja propuesta.

6.3 Combinaciones

Sea S un conjunto con k elementos y $0 \leq k \leq n$.

Definición 3

Llamaremos una k-combinación de los elementos de S a cualquier selección de k elementos de S en la cual no importa el orden relativos. El número de k-combinaciones que se forman se denotará por C^n_k o $\binom{n}{k}$

Teorema 5

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} P^n_k = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

Demostración.

El número de maneras de elegir k objetos entre n y permutar los k elegidos es igual a $\frac{n!}{(n-k)!}$. Sea C el número de maneras de elegir k entre n, sin considerar el orden. Observe que una vez que se han escogido los k objetos, hay $k!$ maneras de permutarlos. Por tanto, aplicando nuevamente el principio de la multiplicación, se tiene

$$k!\, C = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Así el número de maneras de elegir k entre n objetos diferentes, sin considerar el orden está dado por

$$C = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Sea $\overline{C_k^n}$ el número de combinaciones de k elementos que se puede formar con n elementos en el caso en que está permitido la repetición de los elementos.

Teorema 6.

$$\overline{C_k^n} = C_k^{n+k-1}$$

Demostración.

La demostración se deja propuesta.

6.4 Particiones

Los problemas que intentaremos tratar conducen a las particiones de un conjunto, es decir que los elementos u objetos que intervienen deben particionarse en dos o más conjuntos que verifican ciertas condiciones. Es usual confundirlas con las permutaciones y combinaciones con repetición, por la similitud de sus fórmulas, pero los problemas en si son distintos.

Es conveniente, en lugar de dividir los elementos de un conjunto es pensar que deben ser separados en cajas.

Teorema 7.

El número de maneras en que se puede dividir n objetos distintos en k cajas, de modo que la primera contenga n_1 elementos, la segunda $n_2, \ldots,$ la última n_k elementos, de modo que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

Demostración.

Se debe seleccionar n_1 elementos de los n objetos, esto es posible hacerlo de $\binom{n}{n_1}$ maneras; de los restantes debemos seleccionar n_2 mediante $\binom{n-n_1}{n_2}$ y así sucesivamente. Luego por el principio de la multiplicación, el número de maneras es

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

Teorema 8.

El núnero de maneras en que se puede dividir n objetos distintos en k cajas distintas es n^k.

Demostración.

Se deja propuesta.

Teorema 9.

El número de maneras en que se pueden repartir n objetos iguales en k conjuntos ordenados es

$$C_{k-1}^{n+k-1}$$

Demostración.

Notemos que podemos pensarlo que son permutaciones con repetición de $(n+k-1)$ elementos, en que se repiten n y $k-1$ elementos, o sea que

$$P_{n,k-1}^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = C_{k-1}^{n+k-1}$$

6.3 Ejercicios Resueltos

1. ¿Cuántos números de 3 cifras con $0,1,2,3,4$ se pueden formar?

   a) Sin repetición.
   b) Con repetición.
   c) Cuántos son impares.
   d) Cuántos son pares

Solución.

a) Primera forma.

Vamos a calcular P_3^5 pues importa el orden, éste es el número total de números con 3 cifras, a los que debemos restar aquellos números de 3 cifras y cuya primera cifra es el 0, es decir

$$P_3^5 - P_2^4 = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$$

Segunda forma.

Llenamos los casilleros $\boxed{4}\boxed{4}\boxed{3}$ el primer casillero lo podemos llenar de 4 maneras(pues el cero no debe estar), el segundo de de 4 maneras(el cero puede estar) y el tercero de 3 maneras, y por el principio de la multiplicación se obtiene 48 maneras.

b)

Llenamos los casilleros $\boxed{4}\boxed{5}\boxed{5}$ el primer casillero lo podemos llenar de 4 maneras(no incluye el 0) el segundo y tercero de 5 (incluye el cero) y podemos repetir los dígitos, entonces el número total es de 100 maneras.

c)

Se debe tener dos grupos (hay dos impares):

$$(P_2^4 - P_1^3) + (P_2^4 - P_1^3) = 2(P_2^4 - P_1^3) = 18$$

d)

De inmediato: $48 - 18 = 30$

2. ¿Cuántos números menores que 5000 y divisibles por 5 se pueden formar con los dígitos: $0, 1, 2, 3, 4$?.

   a) Sin repetición.

   b) Con repetición.

Solución.

a) Vamos a separar en dos grupos, los que terminan en 5 y los que lo hacen en 0, además note que el 0 no puede iniciar ninguno de estos números y luego aplicamos ambos principios.

	Terminan en 5	Terminan en 0
Con una cifra	$\boxed{1} = 1$	$\boxed{1} = 1$
Con dos cifras	$\boxed{4}\boxed{1} = 4$	$\boxed{5}\boxed{1} = 5$
Con dos cifras	$\boxed{4}\boxed{4}\boxed{1} = 16$	$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{1} = 20$
Con tres cifras	$\boxed{4}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{1} = 48$	$\boxed{4}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{1} = 48$

luego el número total de números es:

$$(1 + 4 + 16 + 48) + (1 + 5 + 20 + 48) = 143$$

b)

Si terminan en 5 o 0, en ambos casos se dá el esquema siguiente:

$\boxed{1}$

$\boxed{5}\boxed{1}$

$\boxed{5}\boxed{6}\boxed{1}$

$\boxed{4}\boxed{6}\boxed{6}\boxed{1}$

Por tanto el total de números es: $2(1+5+30+144)=360$

3. De un naipe de 52 cartas, se extraen al azar 3. Se pide:

   a) El número de maneras de hacerlo.

   b) El número de maneras de extraer exactamente un As.

   c) El número de maneras de extraer a lo menos un As.

   d) El número de maneras de extraer a lo más un As.

   Solución.

   a) Como no importa el orden se trata de combinaciones en grupos de 3, o sea

$$\binom{52}{3}=\frac{52\cdot 51\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3}=22100\,\text{maneras.}$$

   b) Podemos escoger un As de $\binom{4}{1}$ maneras y las dos restantes de $\binom{48}{2}$, luego por la regla de la multiplicación $\binom{4}{1}\binom{48}{2}=4512\,\text{maneras.}$

   c) Pensando en la misma forma, a lo menos un As significa que uno, dos o tres, luego:

$$\binom{4}{1}\binom{48}{2}+\binom{4}{2}\binom{48}{1}+\binom{4}{3}\binom{48}{0}=4804\ \text{maneras.}$$

   También podría pensarse del total menos que salgan tres cartas distintas o que no salga ningún As, es decir

$$\binom{52}{3}-\binom{4}{0}\binom{48}{3}=4804$$

   d) De inmediato:

$$\binom{4}{1}\binom{48}{2}+\binom{4}{2}\binom{48}{1}=4800$$

4. Cuántas cantidades distintas de dinero pueden formarse con n monedas diferentes.

   Solución.

   Se trata de combinaciones en grupos de: $1,\ 2,\ \ldots,n$ o sea que

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +\binom{n}{n}=2^n-1$$

5. Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados. ¿Cual es el polígono que tiene el mismo número de diagonales que lados?.

Solución.

Primera forma

Como un polígono de n lados tiene n vértices, podemos trazar de un vértice cualquiera $(n-3)$ diagonales (no consideramos los dos vértices adyacentes ni al mismo). Como son n vértices por el principio de la multiplicación se debe tener $n(n-3)$, pero en este razonamiento estamos considerando 2 veces cada diagonal, luego el número de diagonales es $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Para la segunda cuestión hacemos $\frac{1}{2}n(n-3) = n$ de donde $n = 5$ por tanto solo el pentágono tiene 5 diagonales y 5 lados.

Segunda forma

Podemos pensar que son todas las combinaciones 2 puntos tomados del total de n, menos las lineas entre 2 vértices sucesivos(lados) que son n, o sea que

$$\binom{n}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3).$$

6. Cuántas fichas componen un dominó que incluye desde la blanca doble al n doble.

Solución.

Simplemente se trata de combinaciones de $(n+1)$ elementos tomados de a 2 más los $(n+1)$ dobles, es decir

$$\binom{n+1}{2} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Es claro que para $n = 6$ el dominó tiene 28 fichas según este resultado, como debe ser.

7. En un plano hay n puntos de los cuales p son colineales, $p \leq n$.

a) Determine cuántas rectas se pueden trazar uniendo estos puntos y sabiendo que excluyendo los p puntos mencionados no hay conjuntos de más de 2 puntos colineales.

b) ¿Cuántos triángulos se formarán?

Solución

a) Son todas las combinaciones de n puntos tomados de 2 menos las combinaciones de los p puntos colineales tomados de 2, más la recta que une los puntos colineales, o sea

$$\binom{n}{2} - \binom{p}{2} + 1$$

b) Razonando de igual manera, el número de triángulos es

$$\binom{n}{3} - \binom{p}{3}$$

8. Calcular la suma de todos los números de cinco cifras diferentes que se pueden formar con los dígitos: $1, 2, 3, 4$ y 5

Solución.

Con el núnero 1, hay $4!$ maneras de colocar el resto de los números (el 1 puede ir en: unidades, decenas, centenas, miles, decimil). Por ejemplo: $abcd1$, $abc1d$, $ab1cd, \ldots$.

Sumando estos números suponiendo las cifras son ceros, se tiene

$$S_1 = 4!(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)$$
$$S_2 = 4!(2 + 20 + 200 + 2000 + 20000)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

luego la suma pedida resulta

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = 4!(1 + 2 + 3 + 4 + 5)(1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)$$
$$S = 3999960$$

9. De cuántas maneras pueden sentarse 8 personas alrededor de una mesa redonda si 2 personas desconocidas insiten en sentarse una al lado de otra.

Solución.

El número de escoger 2 personas desconocidas de un total de 8 es $\binom{8}{2}$, supongamos una de estas 2 personas se sienta en cualquier lugar, su acompañante tiene 2 posibilidades, luego $2\binom{8}{2}$ y el resto tiene una permutación de $6!$ maneras, luego por la regla de la multiplicación $2\binom{8}{2}6!$.

10. De cuántas maneras pueden arreglarse en un estante 5 libros de Construcción, 8 de Arquitectura, 3 de Economía y 4 Astronomía de modo que todos los libros de una materia queden juntos.

Solución.

Considerando que queden juntos, los de construcción se pueden ordenar de $5!$, los de Arquitectura $8!$, los de Economía $3!$ y los de Astronomía $4!$, a su vez estos 4 grupos se pueden ordenar de $4!$ maneras, entonces por el principio de la multiplicación los libros pueden arreglarse de $4!(5!\,8!\,3!\,4!)$.

11. Cuántas señales diferentes de pueden hacer con 10 banderines; si 2 son rojos, 3 azules, 2 blancos y 3 negros.

    Solución.

    Son permutaciones de 10 objetos, de los cuales 2, 3, 2 y 3 repetidos, entonces

$$P_{2,3,2,3}^{10} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,3!} = 25200$$

12. En una pastelería se venden 5 tipos de pasteles ¿De cuántas maneras se pueden comprar una docena?, ¿De cuántas maneras si cierto pastel debe estar siempre contenido en la docena?.

    Solución

    En este problema se aplica el teorema 6, con $n = 5$ y $k = 12$, así

$$\overline{C_k^n} = C_k^{n+k-1} = C_{12}^{16} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$$

    Considerando que un tipo de pastel siempre conforma el grupo de 12, quedan por elegir 11 de los 4 tipos restantes, esto es $n = 4$ y $k = 11$, así

$$C_{11}^{14} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364$$

13. ¿Cuántos grupos de 4 personas se pueden formar con 7 damas y 5 varones, debiendo haber por lo menos un varón en cada grupo?.

    Solución.

    Una forma de resolver este problema es $\binom{12}{4} - \binom{7}{4} = 460$

    Otra manera de resolver el problema es

$$\binom{7}{0}\binom{5}{4} + \binom{7}{1}\binom{5}{3} + \binom{7}{2}\binom{5}{2} + \binom{7}{3}\binom{5}{1} = 460$$

14. De 6 personas $A, B, C, D, E,$ y F detalle los grupos si en cada caso se eligen se eligen 3 personas.

    a) Sin restricciones

    b) Si A es elegido.

    c) Si A o B son elegidos.

    d) Si A y B son elegidos.

    Solución.

a) De inmediato $\binom{6}{3} = 20$

$$\begin{aligned} U = \{&ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF, \\ &BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF, DEF\} \end{aligned}$$

b) $\binom{5}{2} = 10$

$$U = \{ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF\}$$

c) $\binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 16$

$$\begin{aligned} U = \{&ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF, \\ &BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF\} \end{aligned}$$

d) $\binom{4}{1} = 4$

$$U = \{ABC, ABD, ABE, ABF\}$$

15. Hay 12 maneras en las cuales un artículo manufacturado puede tener un pequeño defecto y 10 maneras en las cuales puede tener un defecto mayor. ¿De cuántas maneras puede ocurrir un defecto menor y uno mayor? ¿2 defectos menores y 2 defectos mayores?

Solución.

Un defecto menor y otro mayor puede ocurrir de $\binom{10}{1}\binom{12}{1} = 120$

Dos defectos menores y dos mayores puede ocurrir de $\binom{10}{2}\binom{12}{2} = 2970$

16. De cuántas maneras se pueden ubicar 10 personas en 3 puestos de trabajo, si en el primer puesto deben haber 2 personas, en la segunda 3 y en la tercera las restantes.

Solución.

Se deben seleccionar 2 personas de entre las 10, es decir $\binom{10}{2}$, de las restantes debemos seleccionar 3, o sea $\binom{8}{3}$ y finalmente $\binom{5}{5}$, y por el principio de la multiplicación, el número de maneras en que las 10 personas se pueden ubicar es: $\binom{10}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{5} = 2520.$

17. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 5 juguetes de tipo I, 3 de tipo II y 2 de tipo III, entre 5 niños?

Solución. (Ejercicio que ilustra el teorema 9)

Repartiendo primero los juguetes tipo I, según el teorema 9 dicho número es $\binom{9}{4}$. En forma análoga los juguetes tipo II de $\binom{7}{4}$ y los de tipo III de $\binom{6}{4}$ y por la regla de la multiplicación el número de maneras resulta

$$\binom{9}{4}\binom{7}{4}\binom{6}{4} = 40950$$

18. ¿En cuántas formas pueden ordenarse en una de las repisas de un estante, 8 libros diferentes si tres libros determinados siempre deben quedar juntos?

Solución.

Como tres de ellos siempre deben quedar juntos estos sepueden considerar como un solo elemento y se pueden ordenar entre ellos de 3! formas, entonces todas las ordenaciones son $3! \cdot 5!$

19. Cuántas palabras, no necesariamente pronunciables, de 5 letras cada una se pueden formar con 8 consonantes diferentes y 3 vocales diferentes, si las vocales y consonantes deben ir alternadas sin repetición.

Solución.

Se puede pensar en dos grupos los que empiezan en consonante y los que empiezan en vocal, por el principio de la suma, se tiene:

$$8 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1 = 2352$$

20. Sebastián invita a cenar a su casa cada vez exáctamente a 10 amigos que se encuentran en dos grupos, el primer grupo consta de 15 personas y el segundo es más exclusivo de solo 8 personas. El tiene la costumbre de invitar siempre a lo menos 3 personas de cada grupo. ¿Cuál es el número total de grupos que pueden formarse en estas condiciones

Solución.

Evidentemente se trata de selecciones, puede invitar 3 del primer grupo y 7 del otro, 4 y 6, y así . . . entonces el total de grupos resulta ser

$$\binom{15}{3}\binom{8}{7} + \binom{15}{4}\binom{8}{6} + \binom{15}{5}\binom{8}{5} + \binom{15}{6}\binom{8}{4} + \binom{15}{7}\binom{8}{3}$$

21. De un conjunto de 100 alumnos, de los cuales 25 son mujeres, se seleccionan 40 alumnos. ¿De cuántas maneras distintas puede ocurrir que en el grupo seleccionado haya exactamente 15 mujeres?

Solución.

Si se seleccionan 40 alumnos, debemos contar de cuántas maneras 15 de ellos son mujeres, por tanto el resto deben ser hombres es decir 25.

Como no importa el orden en los grupos seleccionados, la selección de las mujeres se hace de $\binom{25}{15}$ maneras y para los hombres de $\binom{75}{25}$ maneras y por el principio de la multiplicación el número de maneras es

$$\binom{25}{15}\binom{75}{25}$$

6.4 Ejercicios Propuestos

1. Cuántos números inferiores a 5000 y que sean múltiplos de 5 pueden formarse con las cifras $0, 2, 3, 4, 5$. Sin repetir los dígitos.

   Respuesta.

   66.

2. Dados los números $1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Cuántos números de 4 dígitos divisibles por 5 se pueden formar

   a) Sin repetición.

   b) Con repetición.

   c) De los números contabilizados en b), ¿Cuantos tienen repetida una cifra?

   Respuesta.

   a) 24. b) 125. c) 101.

3. Suponga que en una fiesta hay n personas, al terminar la fiesta todos se dan la mano. ¿Cuántos apretones de manos se efectuaron al término de la fiesta.

   Respuesta.

   $\frac{1}{2}n(n-1)$.

4. De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse las letras de la palabra CARACAS.

   Respuesta.

420.

5. Cuatro personas entran a un vagón del Metro en el que hay 40 asientos desocupados.

   a) ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse?.

   b) Suponga que hay 16 asientos dobles y 8 simples. ¿De cuántas maneras pueden sentarse si las dos personas que entran primero deben quedar juntas?.

   Respuesta.

   a) 2193360. b) 44992

6. De doce libros. ¿De cuántas maneras puede hacerse una selección de 5?.

   a) Si un libro determinado se incluye siempre.

   b) Si un libro determinado se excluye siempre

   Respuesta.

   a) 330. b) 462.

7. Con 7 consonantes y 4 vocales. ¿Cuántas palabras pueden formarse?

   a) Conteniendo cada una 3 consonantes 2 vocales.

   b) De modo que no haya 2 consonantes juntas.

   c) De modo que no haya 2 vocales juntas.

   Respuesta.

   a) 252000. b) 2520 c) 15120

8. Florencia desea invitar a comer a 6 de sus amigos de los cuales 4 son ingenieros y 2 arquitectos. ¿Cuántas habitaciones diferentes puede hacer si desea que uno de los ingenieros asista a todas las invitaciones?.

   Respuesta.

   21.

9. Cuántos números pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$ tales que los dígitos impares ocupen siempre los lugares impares.

   Respuesta.

   18.

10. Determine cuántos números enteros positivos y menores que 5000 pueden formarse con los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7. Sin repetir los dígitos.

    Respuesta.

1821.

11. De un grupo formado por 7 hombres y 4 mujeres hay que escoger un comité de 6 personas.

    a) ¿De cuántas maneras puede hacerse si en el comité debe haber por lo menos dos mujeres?

    b) ¿Cuántos comités se pueden formar en que no estén juntos el señor X y la señorita Y?.

    Respuesta.

    a) 371. b) 84.

12. Cierta sustancia química se forma mezclando 5 líquidos distintos. Se propone verter un líquido en un estanque y agregar sucesivamente los otros líquidos. Todas las combinaciones posibles se deben probar para establecer cuál da mejor resultado. ¿Cuántas pruebas deben hacerse?

    Respuesta.

    120

13. Un mecanismo complejo puede fallar en 15 partes diferentes. Si falla en 3 partes ¿de cuántas maneras puede suceder?

    Respuesta.

    455

14. Determine el número de maneras en las cuales n objetos, de los cuales k son similares, pueden arreglarse en orden circular.

    Respuesta.

    $\dfrac{(n-1)!}{k!}$ siempre que $k < n$

15. De un conjunto de n elementos, de los cuales m tienen cierta característica. Se seleccionan u elementos del conjunto y se quiere determinar de cuántas maneras puede haber exáctamente s elementos con la característica dentro de la muestra seleccionada.

    Respuesta.

    $\binom{m}{s}\binom{n-m}{u-s}$

16. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse n jóvenes en una fila si 3 ellos deben estar separados

    Respuesta.

$3!\,(n-3)!\binom{n-2}{3}$

17. Sean un conjunto de 7 niños y 4 niñas. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse?

a) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en una fila?

b) ¿De cuántas maneras pueden hacerlo, si los niños deben estar juntos y las niñas deben estar juntas?

c) ¿De cuántas maneras si las niñas deben estar juntas?

Respuesta.

a) $11!$ b) $2\cdot 7!\cdot 4!$ d) $8\cdot 7!\cdot 4!$

18. Doce jugadores de tenis de mesa van a jugar 6 partidos. ¿De cuántas maneras pueden elegirse los rivales?

Respuesta.

10395

19. ¿De cuántas maneras pueden repartise las 28 fichas de un dominó entre 4 jugadores?

Respuesta.

$\dfrac{28!}{(7!)^4}$

20. Calcular la suma de todos los números de n cifras diferentes que se pueden formar con los dígitos: $1, 2, 3, \ldots\ldots, n$

Respuesta.

$\dfrac{1}{18}n(n+1)(n-1)!\,(10^n-1)$