Segundo Control de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2006

Tiempo: 20 minutos.

Nombre:

Elija solo un problema de entre los siguientes.

1. Encuentra el valor de la suma de todos los números impares entre $n(n+1)$ y $(n+1)(n+2)$. ¿Es cierto que esa suma es el cubo de un número entero?

   Solución:

   Si k es un número entero, entonces entre k y $k+1$ uno de ellos es par, por lo tanto $k(k+1)$ es par, luego tanto $n(n+1)$ como $(n+1)(n+2)$ son números pares.

   [1 punto]

   Entonces los números impares entre $n(n+1)$ y $(n+1)(n+2)$ son:

   $n(n+1)+1,\ n(n+1)+3,\ n(n+1)+5, \ldots, (n+2)(n+1)-1 = n(n+1)+2(n+1)-1$

   [2 punto]

   Entonces la suma de esos nḿeros es

$$\sum_{k=1}^{n+1} n(n+1) + 2k - 1$$

   [1 punto]

$$\sum_{k=0}^{n+1} n(n+1) + 2k - 1 = n(n+1)(n+1) + 2\frac{(n+2)(n+1)}{2} - (n+1)$$

   [1 punto]

$$= (n+1)[n(n+1)+n+2-1] = (n+1)[n^2+2n+1] = (n+1)(n+1)^2 = (n+1)^3$$

La suma de los números impares entre $n(n+1)$ y $(n+1)(n+2)$ es el cubo de $n+1$.

[1 punto]

2. En una fiesta hay n hombres y m mujeres. Como es costumbre en Chile, las mujeres saludan a todos los presentes con un beso en la mejilla, en cambio los hombres entre ellos se dan la mano. En la fiesta, ¿cuántos saludos se hicieron dando un beso ?

Solución:

Cada mujer da $m-1$ besos a mujeres, como son m mujeres se tiene que el nmero de besos entre mujeres es la mitad de $m(m-1)$. La mitad surge debido, a que cada beso est contado dos veces en la cuenta $m(m-1)$.

[2,5 puntos]

Cada hombre da m besos, como son n hombres, entonces el número de besos "mixtos" son nm.

[2,5 puntos]

En total en saludos se dieron $nm + \frac{m(m-1)}{2}$ besos.

[1 punto]