Pauta Control 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 19 de Marzo, 2012

1. Utilice el principio de Inducción para demostrar que:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n = \frac{5+(4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecto:

(1) Para $n = 1$, tenemos que $1 \cdot 5^1 = 5$ y $\frac{5+(4 \cdot 1 - 1) \cdot 5^{1+1}}{16} = \frac{5+3 \cdot 25}{16} = \frac{80}{16} = 5$, luego $1 \cdot 5^1 = \frac{5+(4 \cdot 1 - 1) \cdot 5^{1+1}}{16}$.

Por lo tanto la proposición se cumple para $n = 1$.

1 punto.

- (2) Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir,

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + k \cdot 5^k = \frac{5+(4k-1) \cdot 5^{k+1}}{16} \quad (\text{Hipótesis}).$$

1 punto.

- (3) Por demostrar que se cumple para $n = k + 1$, es decir,

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + (k + 1) \cdot 5^{k+1} = \frac{5+(4k+3) \cdot 5^{k+2}}{16}$$

1 punto.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + (k + 1) \cdot 5^{k+1} &= 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + k \cdot 5^k + (k + 1) \cdot 5^{k+1} \\ &= \frac{5 + (4k - 1) \cdot 5^{k+1}}{16} + (k + 1) \cdot 5^{k+1} \end{aligned}$$

(usando la hipótesis)

1 punto.

Sumando al lado derecho tenemos que:

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + (k+1) \cdot 5^{k+1} = \frac{5+(4k+3) \cdot 5^{k+2}}{16}$$

1 punto.

Luego se cumple para $n = k + 1$, por lo tanto

$$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + \dots + n \cdot 5^n = \frac{5+(4n-1) \cdot 5^{n+1}}{16}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1 punto.

2. Utilice el principio de Inducción para demostrar que la suma de cubos de tres números naturales consecutivos:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ es divisible por } 9, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indicación: Recuerde

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En efecto:

(1) Para $n = 1$, tenemos que, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, el cual es divisible por 9.

1 punto.

(2) Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir,

$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ es divisible por 9, es decir existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9m$

1.5 punto.

(3) Por demostrar que se cumple para $n = k + 1$, es decir,

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ es divisible por 9

1 punto.

Demostración: $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$

Ordenado los términos

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3) = 9m + 9(k^2 + 3k + 3) = 9(m + k^2 + 3k + 3)$$

1 punto.

Observando el lado derecho de la igualdad tenemos:

Suma de números enteros es entero, así, $(m + k^2 + 3k + 3) \in \mathbb{Z}$ Luego $(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3$ es múltiplo de 9.

1 punto.

Por lo tanto, $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ es divisible por 9, $\forall n \in \mathbb{N}$.

0.5 punto.