Control 8 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 28 Mayo, 2012

1. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 2x - 1$.

   Determine $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y demuestre su conjetura.

   Solución:
   Conjetura: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Demostración: $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ tal que $|x - 2| < \delta$

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   $\Longrightarrow |f(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = |2x - 4| = 2|x - 4| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$

   $\boxed{\text{2.5 puntos.}}$

   $\therefore\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3.$

   $\boxed{\text{0.5 punto.}}$

2. Demuestre que el $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 2}{x - 1}$, no existe.

   Solución:

   Primera forma: "Por contradicción".

   Supongamos que existe el límite, es decir, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 2}{x - 1} = L.$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Tenemos que: $\lim\limits_{x\to 1} x+2 = 3.$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

y $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0.$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Así, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\dfrac{(x+2)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} x+2 = 3.$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Usando álgebra de límites se tiene que:

$$3 = \lim_{x\to 1} x-1 \cdot \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1} = 0\cdot L = 0.$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Contradicción,

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}$, no existe.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Segunda Forma:

Calculando límites laterales. **Primero:**

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1}$,

$\boxed{\text{1 punto.}}$

tenemos que $x>1$ luego $x+2>0$ y $x-1>0$

$\boxed{\text{2 punto.}}$

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = +\infty.$$

$$\boxed{2 \text{ punto.}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1}. \ \text{ no existe.}$$

$$\boxed{1 \text{ punto.}}$$

o

Segundo:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{x-1},$$

$$\boxed{1 \text{ punto.}}$$

tenemos que $x < 1$ luego $x + 2 > 0$ y $x - 1 < 0$

$$\boxed{2 \text{ punto.}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = -\infty.$$

$$\boxed{2 \text{ punto.}}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1}. \ \text{ no existe.}$$

$$\boxed{1 \text{ punto.}}$$