Séptima Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Mayo, 2012

1. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. ¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$?.

2. Grafique la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$. ¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$?.

3. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x + 5$ y considere el intervalo $U = (-10^{-2}, 10^{-2})$. Encuentre un intervalo abierto V centrado en -1 tal que $f(x) \in U$ para cualquier valor de $x \in V$.

4. ¿Es cierto que si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$?.

5. ¿Es cierto que si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}$ no existe?.

6. ¿Es cierto que si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = M$ entonces $\lim_{x \to a} g(x) = M - L$?.

7. Muestre que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

   (a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

   (b) $\lim_{x \to a} f(x) - L = 0$

   (c) $\lim_{x \to a} |f(x) - L| = 0$

8. Calcule los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2-|x|}{2+x}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 3} (2x + |x-3|)$

   (c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{1-x}$

   (e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

   (f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3(3+x)-9}{x}$

   (g) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

   (h) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

9. Calcule los siguientes límites (si existen):

   (a) $\lim\limits_{x \to -1} x^3 + 7x - 1$

   (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

   (c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

   (e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

   (f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{2x}$

10. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{si } x < 1 \\ Ax + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine el o los valores de $A \in \mathbb{R}$, de manera que f posea límite en $x = 1$.

11. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. ¿Es cierto que el gráfico de f es una curva que se dibuja sin levantar el lápiz?.

12. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y biyectiva tal que $f(0) = 0$. Muestre que $f(1) = 1$.

13. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Muestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \neq 0$ y $f(\pi) = -1$. Demuestre que $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq 4x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en cero. (Ayuda: Pruebe que $f(0) = 0$).

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^3 + x + 1$. Encuentre un intervalo de largo $1/4$ que contenga una raíz de esa función polinomial.

17. Calcular el $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ para:

    (a) $f(x) = x^2$.
    (b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 \neq 0$.
    (c) $f(x) = x^{1/3}$.

18. Halle las asíntotas verticales y horizontales (si existen) de:

    (a) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$
    (b) $f(x) = \frac{2-x}{(x-1)^2}$
    (c) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

19. Determine si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x] - x$ tiene puntos de discontinuidad.