Complemento Sexta Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Mayo, 2012

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Encuentre una expresión para las siguientes fórmulas, y para cada una de ellas, indique los valores de x para los que se puede calcular:

   a) $f(f(x))$.

   b) $f(\frac{1}{x})$.

   c) $f(cx)$.

   d) $f(x+y)$.

   e) $f(x)+f(y)$.

   f) Para qué números c existe un x tal que $f(cx) = f(x)$? (Hay muchos más de lo que parece).

   g) Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para dos números distintos de x?

2. Sea $g(x) = x^2$ y sea $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

   a) Para cuáles y se tiene $h(y) \leq y$?

   b) Para cuáles y se tiene $h(y) \leq g(y)$?

   c) Para cuáles w se tiene $g(w) \leq w$?

   d) Para cuáles ε se tiene $g(g(\varepsilon)) = g(\varepsilon)$?

3. Para qué valores de x están definidas las siguientes funciones?

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}; \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

   Para qué valores de x están definidas las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$?

4. Considere las funciones $f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

   Encuentre las funciones $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

   Indique dominios de las funciones $f, g, f \circ g \quad \text{y} \quad g \circ f$.

5. Encuentre el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

   a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
   b) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.
   c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.
   d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$.
   e) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$.

6. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función.

   a) Pruebe que la función $f_p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f_p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ es una función par.

   b) Pruebe que la función $f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f_i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ es una función impar.

   c) Pruebe que toda función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se puede escribir como la suma de una función par y de una función impar. Estas funciones se llaman respectivamente la **parte par** y **parte impar** de la función f.

   d) Encuentre la parte par y la parte impar de las funciones $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = |2x + 3|$.

7. *a*) Diga si $f + g$ es una función par, una función impar, o ninguna de las dos cosas, en cada una de las cuatro posibilidades considerando f par o impar, y g par o impar. Puede responder convenientemente con una tabla 2×2.

   b) Haga lo mismo que en (a) pero para $f \cdot g$, y para $f \circ g$.

8. Sean f, g dos funciones tales que $f \circ g = Id : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

   Pruebe que g es inyectiva, y que f es epiyectiva.

9. Pruebe que toda función par f puede escribirse en la forma $f(x) = g(|x|)$ para muchas funciones g distintas.

10. Para qué números a, b, c y d la función $g(y) = \dfrac{ay+d}{cy+b}$ verifica $g(g(y)) = y$ para todo y en $\mathbf{R}$?

11. Suponga que f es una función que verifica $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y en $\mathbf{R}$. Pruebe que existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) = cx$ para todo x racional. Siga los siguientes pasos:

    a) Pruebe que $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ para todo conjunto de números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ en $\mathbf{R}$.

    b) Pruebe que $f(n) = f(1)n$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

    c) Pruebe que $f(0) = 0$.

    d) Pruebe que f es impar.

    e) Pruebe que $f(n) = f(1)n$ para todo $n \in \mathbf{Z}$.

    f) Pruebe que $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = f(1)\dfrac{1}{q}$ para todo $q \in \mathbf{Z}$.

    g) Pruebe que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = f(1)\dfrac{p}{q}$ para todo $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$.

12. Considere la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+x+1}$. Para qué valores de x el gráfico de f está bajo el eje X.?

13. *a*) Grafique la función $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$, definida por $f(x) = \frac{1-2x}{x-3}$. Indique intersección con los ejes y asíntotas.

    b) Es f una función biyectiva? Justifique.

    c) Encuentre el $sup\{f(n) \,/\, n \in \mathbb{N},\ n > 3\}$. Justifique.

14. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, una biyección y sea $g(x) = f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$.

    a) Hallar dominio e imagen de g, si se sabe que $f^{-1}(5) = 2$.

    b) Encontrar $g^{-1}(x)$ en función de $f^{-1}(x)$.

15. Si $(fof)(x) = x$, para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = x$.

Materia anterior

1. *a*) Usando el teorema del binomio demuestre que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

    b) Demuestre $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$.

c) Demuestre que si $n, m \in \mathbf{N}$, con $3 \leq n < m$, entonces $m^n < n^m$.

2. Es cierto que todo número entero se puede escribir en la forma $(-1)^n[\frac{n}{2}]$, para un único $n \in \mathbf{N}$?

   Respuesta: Si.

   De hecho, si $m \in \mathbf{N}$, entonces $m = (-1)^{2m}\left[\dfrac{2m}{2}\right]$.

   Por otra parte: $0 = (-1)^0\left[\dfrac{0}{2}\right]$.

   Y si $m \in \mathbf{Z}, m < 0$, entonces $m = (-1)^{2|m|+1}\left[\dfrac{2|m|+1}{2}\right]$.

   Observe que como $m < 0$ se tiene que $m = -|m|$.

3. Pruebe que
$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{n!} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

4. En una reunión hay n personas, $n < 365$.

   (a) De cuántas formas distintas puede combinarse las fechas de cumpleaños de las n personas? (Suponga que todos los años tienen 365 días).

   (b) De todas las combinaciones posibles, en cuántas tienen las n personas todas cumpleaños en días diferentes.

   (c) De todas las combinaciones posibles, cuántas tienen exactamente un par con cumpleaño el mismo día, y todas las demás en dás diferentes?

   (d) De todas las combinaciones posibles, cuántas tienen al menos un par con cumpleaño el mismo día? O sea, de cuántas formas distintas puede haber al menos dos personas con cumpleaños el mismo día.

   (e) Cuál es el menor número n de personas de modo que la probabilidad de que haya al menos un par de personas con cumpleaño el mismo día sea mayor que 1/2?

   Respuesta (a) Una persona tiene 365 posibilidades para su fecha de cumpleaño. Independientemente, para otra persona sucede lo mismo, y así sucesivamente.

   Luego, el número de combinaciones de cumpleaños para n personas es:
$$C_n = 365^n.$$

Respuesta (b) Si todas cumplen año en días distintos, entonces hay n días en el año en que hay un (único) cumpleañero. El número de combinaciones para elegir n días en el año es:

$$\binom{365}{n} = \frac{365!}{n!(365-n)!}$$

Respuesta (c) Si hay un único par de personas con cumpleaño el mismo día, y todas las demás en días diferentes, entonces habrá $n-1$ días de cumpleaño. Sólo en uno de esos días habrá doble celebración. El número de combinaciones para elegir $n-1$ días en el año es:

$$\binom{365}{n-1} = \frac{365!}{(n-1)!(365-n+1)!}$$

Respuesta (d) El número de combinaciones en que un par específico de las n personas tienen cumpleaño el mismo día, y las demás en algún día del año, es 365^{n-1}. (Hay que ver todas las $n-1$ combinaciones de días de cumpleaños, una para el par, y otras para las $n-2$ personas restantes).

Considerando que hay $\binom{n}{2}$ formas distintas de elegir un par de personas entre la n, se tiene que el número de formas de tener al menos un par de personas con cumpleaño el mismo día es

$$\binom{n}{2} 365^{n-1}.$$

Respuesta (e) Se debe encontrar el menor n de modo que

$$\frac{\binom{n}{2} 365^{n-1}}{365^n} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 365} = \frac{n(n-1)}{730}$$

sean mayor que 1/2.

Vemos que

$$\frac{19 \cdot 18}{730} = 0,47 \quad \text{y} \quad \frac{20 \cdot 19}{730} = 0,52.$$

Por lo tanto, si hay al menos 20 personas en la reunión, la probabilidad de que haya dos personas con cumpleaño el mismo día, es mayor que 1/2.

5. Considere una n-tupla ordenada (digamos $(1, 2, 3, \cdots, n)$ si se quiere). Cuántas permutaciones de esta n-tupla no dejan ninguna coordenada fija?

   Este problema resuelve el problema 6 de la Guia 3.

   Respuesta: Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea K_n el número de permutaciones que no dejan ninguna coordenada fija. Dado n, para cada $j = 1, 2, 3, \cdots, n$ sea F_j el número de permutaciones que dejan exactamente j coordenadas fijas.

   Obsérvese que $F_{n-1} = 0$ y $F_n = 1$. No hay permutaciones que fijen todas menos una coordenada. La identidad es la única permutación que fija todas las coordenadas.

   También, $F_2 = 1$ y $F_3 = 2$ como se puede constatar fácilmente.

   Como el número total de permutaciones es $n!$ se tiene entonces que

$$K_n = n! - F_1 - F_2 - \cdots - F_{n-2} - 1$$

   Debemos calcular los F_j.

   Sabemos que existe $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ formas de elegir j coordenadas fijas.

   Dadas j coordenadas fijas, las demás $n-j$ no quedan fijas, y hay K_{n-j} permutaciones de la $n-j$ coordenadas que no fijan a ninguna.

   Por lo tanto:

$$F_j = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} K_{n-j}.$$

   De modo que, para todo $n \geq 3$ se tiene

$$K_n = n! - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} K_{n-1} - \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} K_{n-2} - \cdots - \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} K_2 - 1$$

   De modo que para calcular los K_n hemos obtenido una fórmula recursiva.

   Sabemos que $K_2 = 1$. Usemos esta fórmula para calcular K_3, K_4, K_5 K_6, y de esta forma resolver el problema 6 de la Guia N3.

$$K_3 = 3! - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} K_2 - 1 = 6 - 3 - 1 = 2$$

Estas dos permutaciones son (123) y (132).

$$K_4 = 4! - \binom{4}{1} K_3 - \binom{4}{2} K_2 - 1 = 24 - 8 - 6 - 1 = 9$$

Estas 9 permutaciones son:

$(12)(34); (13)(24); (14)(23); (1234); (1243); (1324); (1342); (1423)$ y (1432).

$$K_5 = 5! - \binom{5}{1} K_4 - \binom{5}{2} K_3 - \binom{5}{3} K_2 - 1 = 120 - 45 - 20 - 10 - 1 = 44$$

Estas 44 permutaciones son:

$(12)(345); (12)(354); (13)(245); (13)(254); (14)(235); (14)(253); (15)(234);$

$(15)(243); (23)(145); (23)(154); (24)(135); (24)(153); (25)(134); (25)(143);$

$(34)(125); (34)(152); (35)(124); (35)(142); (45)(123); (45)(132);$

$(12345); (12354); (12435); (12534); (12453); (12543);$

$(13245); (13254); (13425); (13452); (13524); (13542);$

$(14235); (14253); (14325); (14352); (14523); (14532);$

$(15234); (15243); (15324); (15342); (15423); (15432).$

$$K_6 = 6! - \binom{6}{1} K_5 - \binom{6}{2} K_4 - \binom{6}{3} K_3 - \binom{6}{4} K_2 - 1$$
$$= 720 - 264 - 135 - 40 - 15 - 1 = 265$$

De modo que, respondiendo el problema 6 de la Guía N3, hay 265 formas distintas en que los seis profesores se pueden reordenar en las salas, de modo a tomar la prueba sin que ninguno de ellos quede en la sala de su curso.