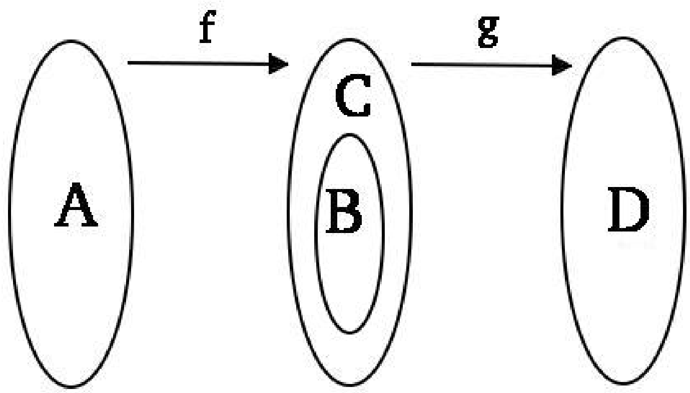
Composición de Funciones.

Pensemos en cuatro subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacios, A, B, C y D con $B \subseteq C$, y dos funciones , $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$, como en el siguiente diagrama:



La pregunta inmediata sería:

¿Cómo podemos relacionar un elemento de A con un elemento de C?.

Bueno, lo que sabemos es que por ser f es una función de A en B, cada elemento $a \in A$ está relacionado con el elemento $f(a) \in B \subseteq C$. Además por ser g una función de C en D, el elemento $f(a) \in C$ esta relacionado con el elemento $g(f(a)) \in D$. De esta forma relacionamos a cada elemento $a \in A$ en elemento $g(f(a)) \in D$ y resolvemos nuestra pregunta.

A está función que relaciona a cada elemento de $a \in A$ con el elemento $g(f(a)) \in D$ se le llama la función composición de g con f y la denotaremos $g \circ f$, en otras palabras:

$$\begin{array}{rrl} g \circ f: & A \longrightarrow & D \\ & x \rightarrow & (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Para pensar: Notemos que para componer f con g solo basta que $Rec(f) \subseteq Dom(g)$.

Ahora veremos en contreto como se componen funciones.

1. Consideremos las funciónes $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $h(x) = 1/x^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = 1/|x|$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x + 3$, y calculemos las funciones:

   a) $(h \circ g)(x)$

$$\begin{array}{rrl} h \circ g: & \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x \rightarrow & h(g(x)) \end{array}$$

   donde, $h(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)^2} = \dfrac{1}{(x+3)^2} = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 9}$

b) $(h \circ f)(x)$

$$\begin{aligned} h \circ f : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \ h(f(x)) \end{aligned}$$

donde $h(f(x)) = \dfrac{1}{f(x)^2} = \dfrac{1}{(|x|)^2} = \dfrac{1}{x^2}$

c) $(g \circ h)(x)$

$$\begin{aligned} g \circ h : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \ g(h(x)) \end{aligned}$$

donde $g(h(x)) = h(x) + 3 = \dfrac{1}{x^2} + 3 = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2}$

d) $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned} g \circ f : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \ g(f(x)) \end{aligned}$$

donde $g(f(x)) = f(x) + 3 = \dfrac{1}{|x|} + 3 = \dfrac{3|x| + 1}{|x|}$

e) $(f \circ h)(x)$

$$\begin{aligned} f \circ h : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \ f(h(x)) \end{aligned}$$

donde $f(h(x)) = \dfrac{1}{|h(x)|} = \dfrac{1}{|1/x^2|} = \dfrac{1}{1/x^2} = x^2$

f) $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned} f \circ g : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{R}^+ \\ x &\rightarrow \ f(g(x)) \end{aligned}$$

donde $f(g(x)) = \dfrac{1}{|g(x)|} = \dfrac{1}{|x + 3|}$

Observación: Notemos que en los ejemplo no se cumple que $f \circ g = g \circ f$ ni tampoco se cunple en la compocición de h con g, ni en la de h con f. Bueno esto es algo que en general no se cumple, es decir, "La composición de funciones no es conmutativa".