Pauta Control 6 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 07 Mayo, 2012

1. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = \frac{2n}{3n-2},\ n \in \mathbb{N}\}$.

   En caso que exista, conjeture el valor del Supremo de A y demuestre su afirmación.

   En efecto:
   Primero debemos probar que A posee cota superior.

   $\boxed{\text{0.5 punto.}}$

   Como $x = \frac{2n}{3n-2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3(3n-2)} \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, ya que $\frac{1}{3n-2} \leq 1 \, \forall n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{1.5 punto.}}$

   Por Axioma del Supremo el conjunto A posee Supremo.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Afirmación: $Sup(A) = 2$.

   Ya se demostró que el 2 es cota superior, ahora hay que demostrar que es la menor de las cotas supeiores, es decir:

   Dado $\epsilon > 0,\ \exists\ a \in\ A$, tal que $2 - \epsilon < a$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Tomando $n = 1$ tenemos $a = 2 \in A$ luego la definición se cumple, por lo tanto el 2 es la menor de las cotas superiores, así se concluye que $Sup(A) = 2$.

$\boxed{\text{2 punto.}}$

(en este caso como el 2 $\in A$ y es cota superior, es el máximo de A y equivale al supremo de A)

2. Sea $\phi \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, tales que B es acotado inferiormente. Demuestre que

$$Inf(A) \geq Inf(B).$$

Muestre un ejemplo con $A \neq B$, $A \subseteq B$, pero $Inf(A) = Inf(B)$.

En efecto:

Como B es acotado inferiormente, por axioma, B posee Infimo que denotaremos por $Inf(B) = I_B$,

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Además este es cota inferior de B, por lo tanto $I_B \leq b \; \forall b \in B$, y si $A \subseteq B$ se tiene que: Si $a \in A$ entonces $a \in B \; \forall a \in A$, así $I_B \leq a \; \forall a \in A$ por lo tanto I_B es cota inferior de A, luego posee Infimo que denotaremos por $Inf(A) = I_A$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Ahora demostremos que:

$$Inf(A) \geq Inf(B).$$

Realizaremos la demostración por contradicción:

Supongamos que:
$Inf(A) < Inf(B)$, luego existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $Inf(A) < r < Inf(B)$,

$\boxed{\text{1 punto.}}$

es decir r es cota inferior de B y como $A \subseteq B$ tenemos que $r \leq a \; \forall a \in A$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego r es cota inferior de A e I_A es el ínfimo de A, tenemos que $r \leq I_A$ contradicción ya que $I_A < r$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Así:

$$Inf(A) \geq Inf(B).$$

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Ejemplo:

Sea $A =]2,5]$ y $B = [2,10]$, tenemos que $A \neq B$ con $A \subseteq B$ y $2 = Inf(A) = Inf(B)$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$