Pauta Prueba Parcial 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 24 Abril, 2012

Tiempo : 120 **minutos .**

Nombre:

Sección:

1. *a*) Un estudiante de Bachillerato se propone ahorrar dinero con el fin de comprar un auto, de 10 millones de pesos, en dos años más. Para esto decide comenzar en Marzo ahorrando 200 pesos y cada mes ir duplicando el ahorro del mes anterior. Indique cuanto ahorra en el mes n-ésimo, ¿logrará su objetivo al final del periodo?.

   Ayuda: $2^{10} = 1024$.

   Solución:

   $a_1 = a = 200$
   y $S_1 = 200$ acumulado el mes 1 ....(1 punto)

   $a_2 = a_1 r = ar = 200 * 2$
   y $S_2 = 200 + 400 = 200(1 + 2) = 200(2^2 - 1)$ acumulado el mes 2 ....
   (1 punto)

   $a_3 = a_2 r = ar^2 = 200 * 2^2$
   y $S_3 = 200(1 + 2 + 2^2) = 200(2^3 - 1)$ acumulado el mes 3.............
   (1 punto)
   ......
   ......
   $a_n = ar^{n-1} = 200 * 2^{n-1}$

y $S_n = 200(1 + 2 + ... + 2^{n-1}) = 200(2^n - 1)$ acumulado el mes n .... (1punto)

Notar que para $n = 10$ se tiene
$S_{10} = 200(2^{10} - 1) = 200 * 1023 = 204{,}600$

Y para $n = 16$ se tiene:
$S_{16} = 200(2^{16} - 1) = 200(1024 * 64 - 1) = 13{,}107{,}000$ .... (1 punto)

O sea que a los 16 meses de ahorro acumulado, se habra logrado superar la meta de alcanzar los 10 millones de pesos.....................(1 punto)

NOTA: Si el alumno calcula S_{24}, el ahorro acumulado despues de 24 meses, le dara una cifra millonaria que tambien es respuesta correcta.

Nombre:

Sección:

b) Usando Principio de Inducción demuestre que: $n^2 \leq 2^n, \ \forall\, n \geq 5$.

ayuda: Demuestre primero que, $(n-1)^2 > 2$.

Solución:

Primera forma:

Demostración de la ayuda por inducción:

Basta probar que $n^2 \geq 2n+1$ para $n \geq 5$.

<u>Probamos para $n = 5$:</u>

$$5^2 = 25 \geq 11 = 2 \cdot 5 + 1.$$

<u>Hipótesis de Inducción:</u> Es cierto, para $n = k$, que

$$k^2 \geq 2k+1.$$

<u>Por demostrar:</u>

$$(k+1)^2 \geq 2(k+1)+1.$$

Hasta aquí [**1 punto**].

En efecto,

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&\geq 2k+1+2k+1 && \text{por hipótesis de inducción.} \\
&= 2(k+1) + 2k \\
&\geq 2(k+1) + 1 && \text{pues es claro que } 2k \geq 1 \text{ si } k \geq 5.
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción se concluye que $n^2 \geq 2n+1$ para todo $n \geq 5$. [**1 punto**]

$\square$ *Demostración del ejercicio por inducción:*

<u>Probamos para $n = 5$:</u>

$$5^2 = 25 \leq 32 = 2^5.$$

Hipótesis de Inducción: Es cierto, para $n = k$, que

$$k^2 \leq 2^k.$$

Por demostrar:

$$(k+1)^2 \leq 2^{k+1}.$$

Hasta aquí [**1 punto**].

En efecto,

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 && \\
&\leq k^2 + k^2 && \text{ya que } 2k+1 \leq k^2 \text{ por la ayuda.}[\textbf{1.5 puntos}] \\
&\leq 2^k + 2^k = 2^{k+1} && \text{por hipótesis de inducción.}
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción se concluye que $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \geq 5$.
[**1.5 puntos**]

$\square$

Segunda forma:

Probamos para $n = 5$:

$$5^2 = 25 \leq 32 = 2^5.$$

Hipótesis de Inducción: Es cierto, para $n = k$, que

$$k^2 \leq 2^k.$$

Por demostrar:

$$(k+1)^2 \leq 2^{k+1}.$$

Hasta aquí [**1 punto**].

En efecto,

$$\begin{aligned}
k^2 &\leq 2^k && \text{por hipótesis de inducción.} \\
k^2 + 2k + 1 &\leq 2^k + 2k + 1 && \text{sumando } 2k+1 \text{ a ambos lados.}[\textbf{1.5 puntos}] \\
(k+1)^2 &\leq 2^k + 2^k = 2^{k+1} && \text{ya que } 2k+1 \leq 2^k \text{ (demostrado a continuación).}
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción se concluye que $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \geq 5$.
[**1.5 puntos**]

$\square$

Demostración de el hecho que $2n + 1 \leq 2^n$:

Basta probar que $2n+1 \leq 2^n$ para $n \geq 5$.

Probamos para $n = 5$:

$$2 \cdot 5 + 1 = 11 \leq 32 = 2^5.$$

Hipótesis de Inducción: Es cierto, para $n = k$, que

$$2k + 1 \leq 2^k.$$

Por demostrar:

$$2(k+1) + 1 \leq 2^{k+1}.$$

Hasta aquí [**1 punto**].

En efecto,

$$\begin{array}{rcll} 2k+1 & \leq & 2^k & \text{por hipótesis de inducción.} \\ 2k+1+2 & \leq & 2^k+2 & \text{sumando 2 a ambos lados.} \\ 2(k+1)+1 & \leq & 2^k+2^k = 2^{k+1} & \text{es claro que } 2 \leq 2^k \text{ si } k \geq 5. \end{array}$$

Así, por el principio de inducción se concluye que $2n+1 \leq 2^n$ para todo $n \geq 5$. [**1 punto**]

$\square$

Tercera forma:

Demostración de la ayuda:

$n > 3 \Rightarrow n - 1 > 2 \Rightarrow (n-1)^2 > 2^2 > 2$. Se usa el siguiente hecho $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.[**2 puntos**]

Observación: $(n-1)^2 > 2 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 > 2 \Leftrightarrow n^2 > 2n + 1$.

Demostración del ejercicio por inducción:

Probamos para $n = 5$:

$$5^2 = 25 \leq 32 = 2^5.$$

Hipótesis de Inducción: Es cierto, para $n = k$, que

$$k^2 \leq 2^k.$$

Por demostrar:

$$(k+1)^2 \leq 2^{k+1}.$$

Hasta aquí [**1 punto**].

En efecto,

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2+2k+1 \\
&\leq k^2+k^2 && \text{ya que } 2k+1 \leq k^2 \text{ por la ayuda.}[\textbf{1.5 puntos}] \\
&\leq 2^k+2^k = 2^{k+1} && \text{por hipótesis de inducción.}
\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción se concluye que $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \geq 5$. [**1.5 puntos**]

□

Notas: El criterio usado para la demostración por inducción es el siguiente:

1) Probar para el primer elemento ($n = 5$ en este caso)+hipótesis de inducción+tesis = 1 punto.
2) Usar la hipótesis de inducción+algún paso en la dirección correcta = 1,5 puntos.
3) Hacer los pasos necesarios para terminar la demostración y concluir = 1,5 puntos.

La demostración de la ayuda son dos puntos.

Nombre:

Sección:

2. *a*) Determine el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que los coeficientes de x^7 y de x^6 en el desarrollo de $(x+a)^5 \cdot (x-2a)^3$ sean iguales.

Solución:

Primera respuesta posible:
Tenemos que el primer factor es:

$$\begin{array}{rcl} (x+a)^5 & = & x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5 \\ & & (\mathbf{1}\text{punto}) \end{array}$$

y que el segundo factor es:

$$\begin{array}{rcl} (x-2a)^3 & = & x^3 + 3x^2(-2a) + 3x(-2a)^2 + (-2a)^3 \\ & = & x^3 - 6x^2a + 12xa^2 - 8a^3 \\ & & (\mathbf{1}\text{punto}) \end{array}$$

Al multiplicar ambos factores debemos encontrar los coeficientes de x^7 y x^6.

Sabemos que en general $x^{n+m} = x^n x^m$.

De modo que en el producto final encontraremos la potencia x^7 al multiplicar:
i) x^5 del primer factor por $-6x^2a$ del segundo factor;
y al multiplicar:
ii) $5x^4a$ del primer factor por x^3 del segundo factor.

Se obtiene entonces que en el producto aparece el término: $(-6a + 5a)x^7$.
Es decir, el coeficiente de x^7 es: $-a$. (**1**punto)

De la misma forma, encontraremos la potencia x^6 al multiplicar:
i) x^5 del primer factor por $12xa^2$ del segundo factor;
al multiplicar:
ii) $5x^4a$ del primer factor por $-6x^2a$ del segundo factor;
y al multiplicar:
iii) $10x^3a^2$ del primer factor por x^3 del segundo factor.

Se obtiene entonces que en el producto aparece el término:
$(12a^2 - 30a^2 + 10a^2)x^6$.
Es decir, el coeficiente de x^6 es: $-8a^2$. (**1**punto)

Luego, para que los coeficientes de x^7 y x^6 sean iguales,
se debe cumplir que: $-a = -8a^2$ (**1**punto).
De donde: $a = 0$ o $a = 1/8$. (**1**punto)

Segunda respuesta posible:
Tenemos que el primer factor es:

$$\begin{aligned}
(x+a)^5 &= \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} x^{5-j} a^j \\
&= \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 a + \binom{5}{2} x^3 a^2 + ... \\
&\quad ... + \binom{5}{3} x^2 a^3 + \binom{5}{4} x a^4 + \binom{5}{5} a^5 \\
&= x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5xa^4 + a^5
\end{aligned}$$

(**1**punto)

y que el segundo factor es:

$$\begin{aligned}
(x-2a)^3 &= x^3 + 3x^2(-2a) + 3x(-2a)^2 + (-2a)^3 \\
&= x^3 - 6x^2 a + 12xa^2 - 8a^3
\end{aligned}$$

(**1**punto)

De donde:

$$\begin{aligned}
x^3(x+a)^5 &= x^8 + 5x^7 a + 10x^6 a^2 + 10x^5 a^3 + 5x^4 a^4 + x^3 a^5 \\
-6x^2 a(x+a)^5 &= -6x^7 a - 30x^6 a^2 - 60x^5 a^3 - 60x^4 a^4 - 30x^3 a^5 - 6x^2 a^6 \\
12xa^2(x+a)^5 &= 12x^6 a^2 + 60x^5 a^3 + 120x^4 a^4 + 120x^3 a^5 + 60x^2 a^6 + 12xa^7 \\
-8a^3(x+a)^5 &= -8x^5 a^3 - 40x^4 a^4 - 80x^3 a^5 - 80x^2 a^6 - 40xa^7 - 8a^8
\end{aligned}$$

(**1**punto)

De donde, se obtiene que en la suma aparecen los términos:

$$5x^7 a - 6x^7 a \qquad \text{y} \qquad 10x^6 a^2 - 30x^6 a^2 + 12x^6 a^2$$

Por lo tanto, reduciendo términos semejantes, en la suma aparecen los términos

$$-ax^7 \qquad \text{y} \qquad -8a^2x^6.$$

De modo que el coeficiente de x^7 es $-a$ y el de x^6 es $-8a^2$. (**1**punto)

Luego, para que los coeficientes de x^7 y x^6 sean iguales,
se debe cumplir que: $-a = -8a^2$, es decir: $a(8a-1) = 0$. (**1**punto).

De donde: $a = 0$ o $a = 1/8$. (**1**punto)

Nombre:

Sección:

b) Se lanzan 21 monedas, ¿en cuántos de los resultados posibles, el número de veces que sale cara es par?.

Solución:

Primera Forma:

Por defecto se considerarán monedas normales, donde las opciones son cara o sello en cada una, representaremos por K al número de éxitos de caras al lanzar $n = 21$ monedas.

Así el número de maneras distintas de obtener k caras con $k = 0, ..., 21$ está dado por:

$$\binom{21}{k}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

De acuerdo al enunciado del problema, el objetivo es determinar:

$$\sum_{j=0}^{10} \binom{21}{2j} = \binom{21}{0} + \binom{21}{2} + ... + \binom{21}{20}.$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Usando la propiedad que:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Esta nos indica que la suma de dos coeficientes binomiales consecutivos dá como resultado el coeficiente binomial de la fila siguiente en el desarrollo del triángulo de Pascal.

Por lo tanto la suma de los éxitos pares equivale a la suma de todos los coeficientes binomiales en el desarrollo del triángulo de Pascal de la fila anterior y sabemos como resultado que dicha suma equivale $2^{n-1} = 2^{20}$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Finalmente establecemos el resultado:

$$\sum_{j=0}^{10} \binom{21}{2j} = 2^{20}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Segunda Forma:

Por defecto se considerarán monedas normales, donde las opciones son cara o sello en cada una, representaremos por K al número de éxitos de caras al lanzar $n = 21$ monedas.

Así el número de maneras distintas de obtener k caras con $k = 0, ..., 21$ está dado por:

$$\binom{21}{k}$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

De acuerdo al enunciado del problema, el objetivo es determinar:

$$\sum_{j=0}^{10} \binom{21}{2j} = \binom{21}{0} + \binom{21}{2} + ... + \binom{21}{20}.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Sabemos que:

$$\sum_{k=0}^{21} \binom{21}{j} = 2^{21}.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Usando la simetría de los coeficientes binomiales, se tiene que un coeficiente binomial con k par es equivalente a otro coeficiente con j impar tal que la suma $k + j = 21$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Así
$$\sum_{k=0}^{21} \left(\begin{array}{c} 21 \\ k \end{array} \right) = 2 \cdot \sum_{j=0}^{10} \left(\begin{array}{c} 21 \\ 2j \end{array} \right) = 2^{21}.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Por lo tanto
$$\sum_{j=0}^{10} \left(\begin{array}{c} 21 \\ 2j \end{array} \right) = 2^{20}.$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Tercera Forma:

Por defecto se considerarán monedas normales, donde las opciones son cara o sello en cada una, representaremos por K al número de éxitos de caras al lanzar $n = 21$ monedas.

Así el número de maneras distintas de obtener k caras con $k = 0, ..., 21$ está dado por:

$$\left(\begin{array}{c} 21 \\ k \end{array} \right)$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

De acuerdo al enunciado del problema, el objetivo es determinar:

$$\sum_{j=0}^{10} \left(\begin{array}{c} 21 \\ 2j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 21 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 21 \\ 2 \end{array} \right) + ... + \left(\begin{array}{c} 21 \\ 20 \end{array} \right).$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Hacer el cálculo de cada coeficiente binomial.

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

Sumar los coeficientes binomiales.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

$$\sum_{j=0}^{10} \binom{21}{2j} = 2^{20} = 1048576.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Nombre:

Sección:

3. *a*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $0 < a < 1,\ 0 < b < 1,$. Demostrar que $a+b < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

En efecto:

Datos $0 < a < 1,\ o < b < 1$

$a + b < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff (a+b) < \frac{b+a}{ab} / \cdot \frac{1}{a+b} > 0$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

$\iff 1 < \frac{1}{ab} / \cdot ab > 0$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

$\iff\ ab < 1$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como $0 < a < 1 / \cdot b > 0\ \iff\ 0 < ab < b$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por hipótesis $b < 1$, aplicando transitividad $0 < ab < 1$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

O también:

$0 < a < 1 \implies\ \frac{1}{a} > 1$ [0.5 punto] $\implies\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1 + \frac{1}{b}$ [0.5 punto].

$0 < b < 1 \implies\ \frac{1}{b} > 1$ [0.5 punto] $\implies\ \frac{1}{b} + 1 > 1 + 1$ [0.5 punto].

luego por transitividad $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1 + 1$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como $1 > a\ \implies\ 1 + 1 > a + 1,$ [0.5 punto] y $1 > b\ \implies\ 1 + a > b + a$ [0.5 punto]

Además tenemos $1 + 1 > b + a,$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Nuevamente como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1 + 1$ y $1 + 1 > b + a$

tenemos $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > b + a$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

O también:

$a + b < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b > 0$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como $0 < a < 1$ entonces $1 < \frac{1}{a}$ [1 punto] $\implies 1 - a < \frac{1}{a} - a$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como $0 < a < 1$ entonces $1 - a > 0$, por transitividad $0 < 1 - a < \frac{1}{a} - a$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Análogamente $\frac{1}{b} - b > 0$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como $\frac{1}{a} - a$ y $\frac{1}{b} - b$ son positivos, tenemos $\frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b > 0$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Nombre:

Sección:

b) Determine los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen la siguiente desigualdad:

$|x+1| + 3 < |2x+6|$

Solución:
Notemos que las raices de los binomios dentro de los valores absolutos son:

$$x = -1 \;\; \wedge \;\; x = -3.$$

Sabiendo esto podemos formamos una tabla (como la que sigue) parar conocer los cambios de signo de estos binomios:

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < \infty$
$x+1$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$2x+6$	$(-)$	$(+)$	$(+)$

Por lo tanto tendremos 3 casos, cada uno con una solución S_i y la solución final será la unión de ellas.
(1.0 punto.)

- Caso 1: $(-\infty < x < -3)$
  En este intervalo $(x+1) < 0$ y $(2x+6) < 0$, luego la desigualdad se transforma en:

$$\begin{aligned}
-(x+1)+3 &< -(2x+6) \\
-x-1+3 &< -2x-6 \\
-x+2 &< -2x-6 \qquad / + (x+6) \\
8 &< -x \\
-8 &> x
\end{aligned}$$

$$\therefore S_1 =]-\infty, -8[\cap]-\infty, -3[=]-\infty, -8[$$

(1.5 puntos.)

- <u>Caso 2:</u> $(-3 \leq x < -1)$
  En este intervalo $(x+1) < 0$ y $(2x+6) \geq 0$, luego la desigualdad se transforma en:

$$\begin{aligned} -(x+1)+3 &< (2x+6) \\ -x-1+3 &< 2x+6 \\ -x+2 &< 2x+6 \qquad /+(x-6) \\ -4 &< 3x \\ -4/3 &< x \end{aligned}$$

$$\therefore S_2 =]-4/3, \infty[\cap [-3, -1[=]-4/3, -1[$$

  (1.5 puntos.)

- <u>Caso 3:</u> $(-1 \leq x < -\infty)$
  En este intervalo $(x+1) \geq 0$ y $(2x+6) > 0$, luego la desigualdad se transforma en:

$$\begin{aligned} (x+1)+3 &< (2x+6) \\ x+1+3 &< 2x+6 \\ x+4 &< 2x+6 \qquad /-(x+6) \\ -2 &< x \end{aligned}$$

$$\therefore S_3 =]-2, \infty[\cap [-1, -\infty[= [-1, -\infty[$$

  (1.5 puntos.)

  Finalmente la solución de la desigualdad es:

  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$
  $=]-\infty, -8[\cup]-4/3, -1[\cup [-1, \infty[=]-\infty, -8[\cup]-4/3, \infty[$

  (0.5 puntos.)