# Pauta Control 2 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 02 de Abril, 2012

1. Sea $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, ..., $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   *a*) A partir de la definición recursiva conjeture una fórmula para $a_n$ con $n \in \mathbb{N}$, calculando $a_2, a_3, a_4,$ y $a_5$.

   Recuerde: $\sqrt{a} = a^{1/2}$.

   <u>En efecto:</u>

   $$a_2 = \sqrt{2 \cdot a_1} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = (2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2}})^{1/2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}} = 2^{1-\frac{1}{2^2}}.$$

   $\boxed{\text{0.5 punto.}}$

   $$a_3 = \sqrt{2 \cdot a_2} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^2}}} = (2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^2}})^{1/2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}} = 2^{1-\frac{1}{2^3}}.$$

   $\boxed{\text{0.5 punto.}}$

   $$a_4 = \sqrt{2 \cdot a_3} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^3}}} = (2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^3}})^{1/2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^4}} = 2^{1-\frac{1}{2^4}}.$$

   $\boxed{\text{0.5 punto.}}$

   $$a_5 = \sqrt{2 \cdot a_4} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^4}}} = (2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^4}})^{1/2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^5}} = 2^{1-\frac{1}{2^5}}.$$

   $\boxed{\text{0.5 punto.}}$

   Por lo tanto nuestra conjetura es: $a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   *b*) Demuestre usando el principio de inducción su conjetura.
   <u>En efecto:</u>

   (1) Para $n = 1$, tenemos que, $a_1 = 2^{1-\frac{1}{2}} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$, por lo tanto se cumple.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

(2) Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir,

$a_k = 2^{1-\frac{1}{2^k}}$.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Por demostrar que se cumple para $n = k+1$, es decir,

$a_{k+1} = 2^{1-\frac{1}{2^{k+1}}}$.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

Dem:

$$a_{k+1} = \sqrt{2 \cdot a_k} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^k}}} = (2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^k}})^{1/2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}}$$
$$= 2^{1-\frac{1}{2^{k+1}}}.$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por lo tanto se cumple para $n = k+1$. Así $a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$

2. Usando propiedades de sumatorias y sumas notables, calcule:

$\sum_{k=5}^{100} \left[\frac{4}{k} - \frac{4}{k+1} - 2^k + (k+2)^2\right]$.

<u>Solución:</u>

$$\sum_{k=5}^{100} \left[\frac{4}{k} - \frac{4}{k+1} - 2^k + (k+2)^2\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \left[\frac{4}{k} - \frac{4}{k+1} - 2^k + (k+2)^2\right] - \sum_{k=1}^{4} \left[\frac{4}{k} - \frac{4}{k+1} - 2^k + (k+2)^2\right]$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

$$= 4\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] - \sum_{k=1}^{100} 2^k + \sum_{k=1}^{100} k^2 + 4\sum_{k=1}^{100} k + \sum_{k=1}^{100} 4$$
$$-4\sum_{k=1}^{4} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] + \sum_{k=1}^{4} 2^k - \sum_{k=1}^{4} k^2 - 4\sum_{k=1}^{4} k - \sum_{k=1}^{4} 4.$$

$\boxed{\text{2.5 punto.}}$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1-2^{101}}{1-2} - 1\right) + \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} + \frac{4 \cdot 100 \cdot 101}{2} + 4 \cdot 100$$
$$-4\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1-2^5}{1-2} - 1\right) - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} - \frac{4 \cdot 4 \cdot 5}{2} - 4 \cdot 4.$$

$\boxed{\text{2.5 punto.}}$