

# Quinta Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2012

1. Determine si el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : |x + 3| - |2x + 1| > 3\}$$

es acotado.

2. Sea  $B$  el conjunto de todos los números reales  $x$  que están a distancia menor igual que  $\frac{1}{2}$  del real  $-7$ . ¿Es  $B$  un conjunto acotado?. En caso de ser acotado, muestre una cota superior y una cota inferior.

3. ¿Es cierto que el conjunto

$$A = \left\{ \frac{n - 3}{2n + 5} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es acotado?.

4. Considere el conjunto

$$A = \left\{ \frac{3n + 5}{7n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Muestre que  $A$  es un conjunto acotado. Encuentre el supremo e ínfimo de  $A$ . Justifique su respuesta.

5. ¿Es cierto que el conjunto

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es acotado?. ¿Podría usted encontrar su supremo y su ínfimo?. ¿A tiene máximo y mínimo?.

6. ¿Es cierto que todo conjunto finito tiene mínimo y máximo?.

7. ¿Es cierto que todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  tiene un menor elemento?.

8. Si  $A \subseteq B$  y  $B$  es acotado superiormente, ¿es cierto que

$$\text{Sup}(A) \leq \text{Sup}(B).?$$

9. Si  $A \subseteq B$  y  $A$  es acotado inferiormente, ¿es cierto que

$$\text{Inf}(A) \leq \text{Inf}(B).?$$

10. Si  $A \subseteq \mathbb{R}$  es acotado superiormente, defina  $C = \{c : c \geq a, \forall a \in A\}$  el cual es un conjunto acotado inferiormente (¿Por que?). ¿Es cierto que  $\text{Inf}(C) = \text{Sup}(A)$ ?

11.  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , tales que  $a \leq b$ , para todo  $a \in A$  y para todo  $b \in B$ . ¿Es cierto que  $\text{Sup}(A) \leq \text{Inf}(B)$ ?

12. ¿Es cierto que todo conjunto de números racionales acotado superiormente tiene supremo en  $\mathbb{Q}$ ?

13. Para  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ , defina  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ . ¿Es cierto que  $A$  y  $B$  son acotados superiormente si y solamente si  $A + B$  lo es?. ¿Es cierto que  $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$ . Si su respuesta es negativa agregue condiciones para asegurar la igualdad.

14. Sea  $x \in \mathbb{R}$ , fijo. Defina  $A_x = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$  el cual es acotado superiormente (¿Por que?). Denote el supremo de  $A_x$  por  $\text{Sup}(A_x) = [x]$ . A ese número le llamaremos *la parte entera de  $x$* .

(a) Muestre que  $[x] \in \mathbb{Z}$ .

(b) Muestre que si  $x \in \mathbb{Z}$  entonces  $[x] = x$ .

(c) ¿Es cierto que  $[x + y] = [x] + [y]$ ?

(d) ¿Es cierto que cualquier número entero se puede escribir de la forma  $(-1)^n \left[\frac{n}{2}\right]$ , para un único  $n \in \mathbb{N}$ ?

(e) ¿Es cierto que  $[n + x] = [x] + n$ , para cualquier valor de  $n \in \mathbb{N}$  y de  $x \in \mathbb{R}$ ?