Capítulo 3

Sucesiones, inducción y sumatorias

3.1. Sucesiones

Definición 1

Una sucesión es una *función* definida de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que se acostumbra a denotar por a_n en lugar de $f(n)$, costumbre que también adoptaremos en este texto, así,

$$a_n \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

a_n: se llama término n–ésimo o término de lugar n.
a_1: es el primer término de la sucesión.
a_k: es el k–ésimo término de la sucesión.

Las sucesiones se encuentran presentes en casi todos los tópicos de las matemáticas, de ahí su importancia. Eventualmente, $n \in \mathbb{N}_0$, $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejemplo 1

Vamos a dar algunas sucesiones definidas por su término n–ésimo, o bien, en forma recursiva.

1. $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$
2. $a_n = 2n - 1$
3. $a_n = (-1)^n$
4. $a_n = \cos(n\pi)$
5. $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
6. $a_n = \frac{1}{n}$
7. $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
8. $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Dada la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$, su k–ésimo término es a_k, el siguiente término es a_{k+1} también llamado *sucesor*, el anterior al k–ésimo término es a_{k-1} también llamado *antecesor*.

Ejemplo 2

Dada la sucesión $a_n = \frac{2^{n-1}}{3n+1}$, determine el k–ésimo término, su siguiente y anterior término.

De inmediato se tiene que:

$a_k = \frac{2^{k-1}}{3k+1}$ es el k–ésimo término.

$a_k = \frac{2^{k-1-1}}{3(k-1)+1} = \frac{2^{k-2}}{3k-2}$ es su anterior término.

$a_k = \frac{2^{k+1-1}}{3(k+1)+1} = \frac{2^k}{3k+4}$ es su siguiente término.

El gráfico de una sucesión, aunque no es relevante, es un conjunto discreto de puntos que siempre se encuentran en el primer o en el cuarto cuadrante de los ejes cartesianos, es decir:

DIBUJO

Observación.

Los conceptos de sucesiones crecientes, no crecientes, acotadas, convergentes, etc., no se abordarán en este texto. Para ellos consultar en el texto de **Cálculo Integral y Diferencial en una Variable**.

3.2. Ejercicios resueltos

1. Dada la sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

    a) Determine su término n–ésimo.

    b) Pruebe que $a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

    c) Calcule $a_1 - a_{n+1}$.

    Solución.

    a) De inmediato $a_n = \frac{1}{n}$

    b) $a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

    c) $a_1 - a_{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

2. Dada la sucesión $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$

    a) Determine el término de lugar n.

    b) Determine el siguiente término al n–ésimo.

    c) Demuestre que $a_{n+1} > a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

    Solución.

    a) De inmediato se tiene que:
    $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

    b) $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

c) $a_{n+1}-a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, pero como $n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1}-a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$.

3. Dada la sucesión: $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$

   a) Determine el término n–ésimo.

   b) Determine el anterior y siguiente término al n–ésimo.

   c) Calcule $a_{2k} - a_{2k+1}$.

   Solución.

   a) $a_n = \frac{1}{2n-1}$.

   b) $a_{n-1} = \frac{1}{2n-3}$ y $a_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$

   c) $a_{2k} - a_{2k+1} = \frac{1}{2(2k)-1} - \frac{1}{2(2k+1)-1} = \frac{2}{16k^2-1}$

4. Desarrolle la siguiente sucesión definida recursivamente y de aquí deduzca el n–ésimo término: $a_1 = 2, \ldots, a_{n+1} = 2a_n + 1$.

   Solución.

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 2\\
&a_2 = 2a_1 + 1 = 2\cdot 2 + 1 = 2^2 + 1\\
&a_3 = 2a_2 + 1 = 2(2^2+1) + 1 = 2^3 + 2 + 1\\
&a_4 = 2a_3 + 1 = 2(2^3+2+1) + 1 = 2^4 + 2^2 + 2 + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2^n + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1
\end{aligned}
$$

   Más adelante, en el capítulo de progresiones, estaremos en condiciones para efectuar esta suma, cuyo resultado es $a_n = 3\cdot 2^{n-1} - 1$.

5. Si $a_1 = 1 \ldots a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$ demuestre que:

   a) $a_1 + a_2 = 3(a_3 - 1)$ y que $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3}$

   b) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

Solución.

a)
$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1 + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \\ a_3 &= a_2 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{11}{6} \\ a_1 + a_2 &= 1 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2} \quad \text{y} \quad 3(a_3 - 1) = 3\left(\tfrac{11}{6} - 1\right) = \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

luego, $a_1 + a_2 = 3(a_3 - 1)$, finalmente, $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3}$.

b)
$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \tfrac{1}{2} \\ a_3 - a_2 &= \tfrac{1}{3} \\ a_4 - a_3 &= \tfrac{1}{4} \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= \tfrac{1}{n-1} \\ a_n - a_{n-1} &= \tfrac{1}{n} \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro se tiene:

$$a_n - a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

3.3. Ejercicios propuestos

1. Escriba los cuatro primeros términos, el término k–ésimo, el término anterior y siguiente del término k–ésimo de las siguientes sucesiones cuyo término n–ésimo es:

a) n^2

b) $2^n - n$

c) $\dfrac{3n-5}{n+2}$

d) $(-1)^n n$

e) $(-1)^{n+1} 3^{2n}$

f) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Respuestas.

a) $1^2, 2^2, 3^2$ y 4^2; $k^2, (k-1)^2$ y $(k+1)^2$

b) $1, 2, 5, 12$; $2^k - k$, $2^{k-1} - (k-1)$ y $2^{k+1} - (k+1)$

c) $-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}$; $\frac{3k-5}{k+2}, \frac{3k-8}{k+1}, \frac{3k-2}{k+3}$

d) $-1, 2, -3, 4$; $(-1)^k k$, $(-1)^{k-1}(k-1)$, $(-1)^{k+1}(k+1)$

e) $3^2, -3^4, 3^6, -3^8$; $(-1)^{k+1}3^{2k}$, $(-1)^k 3^{2k-2}, (-1)^k 3^{2k+2}$

f) 2, $\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4$; $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}, \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$.

2. Escriba el término n–ésimo de las siguientes sucesiones:

a) $1, 3, 5, 7, \ldots$

b) $3, -9, 27, -81, \ldots$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

d) $5\cdot 1, 11\cdot 3, 17\cdot 5, 23\cdot 7, \ldots$

e) $\frac{3}{1\cdot 2}, \frac{-7}{3\cdot 3}, \frac{11}{5\cdot 4}, \frac{-15}{7\cdot 5}, \ldots$

f) $1 - x^2, 5 + x^3, 9 - x^4, 13 + x^5, \ldots$

g) $1\cdot(p-1), 3\cdot(p-2), 5\cdot(p-3), \ldots$, p constante.

Respuestas.

a) $a_n = 2n - 1$

b) $a_n = (-1)^{n-1}3^n$

c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

d) $a_n = (6n-1)(2n-1)$

e) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}(4n-1)}{(2n-1)(n+1)}$

f) $a_n = 4n - 3 + (-1)^n x^{n+1}$

g) $a_n = (2n-1)(p-n)$;

$1 \leq p \leq n$

3. Desarrollar las siguientes sucesiones definidas recursivamente y determine el término k–ésimo:

a) $a_0 = 0$, $a_{n+1} = (1-x)a_n + nx$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

b) $\mu_0 = 1; \mu_n = n\mu_{n-1}$

Respuestas.

a) $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = x, a_3 = (1-x)x + 2x, \dots$
$a_k = (1-x)^{k-2}x + (1-x)^{k-3}2x + (1-x)^{k-4}3x + \dots +$
$(1-x)(k-2)x + (k-1)x$

b) $\mu_0 = 1$
$\mu_1 = 1\mu_0 = 1$
$\mu_2 = 2\mu_1 = 2 \cdot 1$
$\mu_3 = 3\mu_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$
$\mu_4 = 4\mu_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
....
$\mu_k = k\mu_{k-1} = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!$

4. Determine el término n–ésimo de las siguientes sucesiones definidas recursivamente:

a) $\mu_1 = 2, \dots, \mu_n = \mu_{n-1} + 2$

b) $\mu_0 = 2, \mu_1 = 3, \dots, \mu_{n+1} = 3\mu_n - 2\mu_{n-1}$

c) $\mu_1 = \sqrt{2}, \mu_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \dots, \mu_{n+1} = \sqrt{2\mu_n}$

Respuestas.

a) $\mu_n = 2n$

b) $2, 3, 5, 9, 17, \dots, \mu_n = 2^n + 1,\ n \geq 0$

c) $\mu_1 = 2^{\frac{1}{2}}, \mu_2 = 2^{\frac{3}{2^2}}, \mu_3 = 2^{\frac{7}{2^3}}, \dots, \mu_n = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$, es decir, $\mu_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

5. En cada una de las siguientes sucesiones, cuyo término general es a_n, determine si son consecutivos o no los dos términos que se indican, en caso de no serlo indique cuales son:

a) $a_n = 2n$; $2k-2$ y $2k$

b) $a_n = 2n-1$; $2k$ y $2k+1$

c) $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$; $\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$ y $\sqrt{k-1} + \sqrt{k}$

Respuestas.

a) y c) son consecutivos.

b) no son consecutivos, los posibles consecutivos son: $2k+1$ y $2k+3$ ó $2k-1$ y $2k+1$.

3.4. Inducción

Axioma de Inducción. Sean $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y A el conjunto de los naturales que son iguales o mayores que m, es decir:

$$A = \{n \ / \ n \geq m, m \in \mathbb{N}_0\}.$$

Si S es un subconjunto de A con las siguientes dos propiedades:

1. Contiene a m,
2. $\forall \ k \in A$: si $k \in S$,

entonces $(k+1) \in S$, luego el conjunto S es igual a A. En muchas aplicaciones de este axioma se tiene que $m = 1$, por tanto $\mathbb{N} = A$.

Cuando se use este axioma para demostrar propiedades del tipo que estamos considerando, el conjunto A y la forma proposicional $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, nos lo dan en la proposición de la propiedad. Se toma S como el subconjunto de A que contiene aquellos naturales para los cuales $p(n)$ es verdad. Así podemos volver a formular el axioma como un proceso operacional que se acostumbra a llamar *Principio de Inducción Matemática.*

Principio de Inducción. Sea $A = \{n \ / \ n \geq m, m \in \mathbb{N}_0\}$ una proposición de la forma $\forall \ n \in A : p(n)$, probaremos la verdad de esta proposición estableciendo lo siguiente:

1. $p(m)$ es verdad.

2. $\forall\, n \in A$, la implicación $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ es verdad.

Notemos que usualmente $m = 1$, luego $A = \{n \ / \ n \geq 1\}\} = \mathbb{N}$. También suponer la verdad de $p(n)$, se acostumbra a llamar hipótesis inductiva (H.I).

Ejemplo 3

Demostrar $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Demostración.

Se tiene que: $m = 1$, $A = \{n \ / \ n \geq 1\}$,

$$p(n) : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1. $p(1)$ es verdad, pues $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$
2. $p(n)$ es verdad, es decir, se cumple

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \text{(H.I.)}$$

entonces $p(n+1)$, es decir, debemos establecer que:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{(T.)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Demostrar $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que

$$a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

es divisible por 133.

Demostración.

Se tiene que: $m = 1$, $A = \{n \;/\; n \geq 1\}$

$$a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133p, \qquad \forall\, p \in \mathbb{Z}^+$$

1. $a_1 = 11^3 + 12^3 = 3059 = 133 \cdot 23$, es verdad.
2. Sea
$$a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133p, p \in \mathbb{Z}^+ \qquad \text{(H.I.)}$$
entonces,
$$a_{n+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3} \text{ sea divisible por } 133 \qquad \text{(T.)}$$
En efecto:
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 11^{n+2} \cdot 11 + 12^{2n+1} \cdot 12^2 \\ a_{n+1} &= 11(11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 12^{2n+1}12^2 - 11 \cdot 12^{2n+1} \\ a_{n+1} &= 11a_n + 12^{2n+1}(12^2 - 11) \\ a_{n+1} &= 11 \cdot 133p + 12^{2n+1} \cdot 133 \\ a_{n+1} &= 113 \cdot (11p + 12^{2n+1}) \end{aligned}$$
lo que prueba la tesis.

Principio General de Inducción.

3.5. Ejercicios Resueltos

1. Demuestre que si n es cualquier entero positivo, $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

   Demostración.

   Sea $S = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \frac{1}{3}(n^3+2n) \text{ es un entero}\}$.

   i) $1 \in S$, pues $\frac{1}{3}(1^3 + 2 \cdot 1) = 1$ y 1 es un entero.

   ii) Si $n \in S$ se tiene que $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero. (H.I.)
   Por demostrar que $(n+1) \in S$.

   En efecto,

   $$\begin{aligned} \frac{1}{3}[(n+1)^3 + 2(n+1)] &= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2) \\ &= \frac{1}{3}(n^3 + 2n) + (n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

   es un entero, pues $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ lo es por (H.I.) y n^2+n+1 es un entero, pues n lo es, así $n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$, por tanto, $S = \mathbb{N}$.

   Nota: en adelante vamos a dejar de formular al conjunto A o bien S, dejándolo sobreentendido, pero el lector, si es su deseo, bien puede hacerlo.

2. Si $u_{i+1} = 2u_i + 1$, $i \in \mathbb{N}$. Demostrar que $u_n + 1 = 2^{n-1}(u_1 + 1)$.

   Demostración.

   i) Para $n = 1 \Rightarrow u_1 + 1 = 2^{1-1}(u_1 + 1) = u_1 + 1$.

   ii) Hipótesis Inductiva: para $n = k \Rightarrow u_k + 1 = 2^{k-1}(u_1 + 1)$.
   Por demostrar para $n = k+1$, o sea, $u_{k+1} + 1 = 2^k(u_1 + 1)$.

   En efecto, en la hipótesis del problema hagamos $i = k$, luego

   $$u_{k+1} = 2u_k + 1 \Rightarrow u_{k+1} + 1 = 2u_k + 2 = 2(u_k + 1),$$

   usando la hipótesis inductiva:

   $$\Rightarrow u_{k+1} + 1 = 2(2^{k-1}(u_1 + 1)) = 2^k(u_1 + 1).$$

3. Sabiendo que: $4 = \frac{3}{u_1} = u_1 + \frac{3}{u_2} = u_2 + \frac{3}{u_3} = \ldots = u_n + \frac{3}{u_{n+1}}$.

   Demostrar: $u_n = \frac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}$.

   Demostración.

   i) Para $n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{4}$; $u_1 = \frac{3^{1+1}-3}{3^{1+1}-1} = \frac{9-3}{9-1} = \frac{3}{4}$.

   ii) Hipótesis inductiva: para $n = k \Rightarrow u_k = \frac{3^{k+1}-3}{3^{k+1}-1}$, por demostrar para $n = k+1$, o sea, $u_{k+1} = \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+2}-1}$.

   En efecto, por hipótesis del problema tenemos:

$$4 = u_k + \frac{3}{u_{k+1}} \Rightarrow u_{k+1} = \frac{3}{4 - u_k};$$

   ahora, usando la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{3}{4 - (3^{k+1}-3)/(3^{k+1}-1)} \\ &= \frac{3(3^{k+1}-1)}{4 \cdot 3^{k+1} - 4 - 3^{k+1} + 3} \\ u_{k+1} &= \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+1}(4-1)-1} \\ &= \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+2}-1} \end{aligned}$$

4. Si $u_1 = 0$ y $u_{n+1} = (1+x)u_n - nx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, demostrar que:

$$u_n = \frac{1}{x}[1 + nx - (1+x)^n], \quad x \neq 0.$$

   Demostración.

   i) Para $n = 1$, $u_1 = 0$; $u_1 = \frac{1}{x}[1 + x - (1+x)] = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$.

   ii) Hipótesis inductiva. Para $n = k \Rightarrow u_k = \frac{1}{x}[1 + kx - (1+x)^k]$, por demostrar para $n = k+1$, o sea,

$$u_{k+1} = \frac{1}{x}[1 + (k+1)x - (1+x)^{k+1}].$$

En efecto, hacemos $n = k$ en la hipótesis del problema $u_{k+1} = (1+x)u_k - kx$, ahora reemplazando la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= (1+x)\frac{1}{x}[1+kx-(1+x)^k]-kx \\
\Rightarrow u_{k+1} &= \frac{1}{x}[(1+x)+(1+x)kx-(1+x)(1+x)^k]-kx \\
&= \frac{1}{x}[1+x+kx+kx^2-(1+x)^{k+1}-kx^2] \\
\Rightarrow u_{k+1} &= \frac{1}{x}[1+x+kx-(1+x)^{k+1}] \\
&= \frac{1}{x}[1+(1+k)x-(1+x)^{k+1}]
\end{aligned}$$

5. Demuestre $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que: $2^{n+4} > (n+4)^2$.

Demostración.

i) Para $n = 1$; $2^{1+4} > (1+4)^2 \Rightarrow 2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow 2^{k+4} > (k+4)^2$.
Por demostrar para $n = k+1$, o sea, $2^{k+5} > (k+5)^2$.

En efecto, como
$2^{k+4} > (k+4)^2 \Rightarrow 2^{k+4} \cdot 2 > (k+4)^2 \cdot 2$
$\Rightarrow 2^{k+5} > 2k^2 + 16k + 32$
$\Rightarrow 2^{k+5} > k^2 + 10k + 25 + k^2 + 6k + 7$ y como

$k^2 + 10k + 25 + k^2 + 6k + 7 > k^2 + 10k + 25 \Rightarrow$
$2^{k+5} > k^2 + 10k + 25 \Rightarrow 2^{k+5} > (k+5)^2$.

6. Demuestre $\forall\, n \in \mathbb{Z}$; $n \geq 1$; $h \geq -1$; que:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

Demostración.

i) Para $n = 1$; $(1+h)^1 \geq 1 + h \Rightarrow 1 + h = 1 + h$.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow (1+h)^k \geq 1 + kh$.
Por demostrar para $n = k+1$, o sea, $(1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h,$.

En efecto, como $(1+h) \geq 0$, tenemos:

$(1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h)$

$\Rightarrow (1+h)^{k+1} \geq 1 + h + kh + kh^2 \geq 1 + h + kh$ pues $kh^2 \geq 0$

$\Rightarrow (1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h$

7. Demostrar que los números de la forma $u_n = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ son divisibles por 54.

Demostración.

i) Para $n = 1$; $u_1 = 2^3 - 9 + 3 - 2 = 0$ y 0 es divisible por 54.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow u_k = 2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2$ es divisible por 54.
Por demostrar para $n = k+1$, o sea que $u_{k+1} = 2^{2k+3} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2$ sea divisible por 54.

En efecto:

$$u_{k+1} - u_k = 2^{k+1}(2^2 - 1) - 18k - 6 = 3(2^{2k+1} - 6k - 2),$$

sumando y restando $27k^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= 3[2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2] + 27k^2 - 27k \\ \Rightarrow u_{k+1} - u_k &= 3u_k + 27(k)(k-1) \end{aligned}$$

ahora como el producto de dos números consecutivos es par, podemos poner

$$k(k-1) = 2S, (S \in \mathbb{N}),$$

luego:

$$u_{k+1} - u_k = 3u_k + 54S \Rightarrow u_{k+1} = 4u_k + 54S$$

como por hipótesis inductiva

$$4u_k = 54p, (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow u_{k+1} = 54(S+p)$$

con lo que u_{k+1} es divisible por 54.

8. Demostrar que $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es múltiplo de 14.

Demostración.

i) Para $n = 1$, $u_1 = 3^{4\cdot 1+2} + 5^{2\cdot 1+1} = 854$, es múltiplo de 14.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow u_k = 3^{4k+2} + 5^{2k+1}$ es múltiplo de 14.

Por demostrar que para $n = k+1 \Rightarrow u_{k+1} = 3^{4k+6} + 5^{2k+3}$ es múltiplo de 14.

En efecto, sea:

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - u_k &= 80 \cdot 3^{4k+2} + 5^{2k+1} \cdot 24 \\
&= 24(3^{4k+2} + 5^{2k+1}) + 56 \cdot 3^{4k+2} \\
u_{k+1} - u_k &= 24u_k + 14 \cdot 4 \cdot 3^{4k+2} \Rightarrow \\
u_{k+1} &= 25u_k + 14S, S = 4 \cdot 3^{4k+2}
\end{aligned}$$

Como u_k es múltiplo de 14, ambos sumandos son múltiplos de 14, luego u_{k+1} es múltiplo de 14.

9. Demostrar que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $f(n) = 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9.

Demostración.

i) Para $n = 1$; $f(1) = 10^1 + 3 \cdot 4^{1+2} + 5 = 207$.

ii) Por hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow f(k) = 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5$ es divisible por 9.

Por demostrar que para $n = k+1 \Rightarrow f(k+1) = 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5$ sea divisible por 9. En efecto, sea:

$$\begin{aligned}
f(k+1) - f(k) &= 10^k(10-1) + 3 \cdot 4^{k+2}(4-1) \\
&= 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 4^{k+2} \\
\Rightarrow f(k+1) &= 9(10^k + 4^{k+2}) + f(k)
\end{aligned}$$

como $f(k)$ es divisible por 9 y también $9(10^k + 4^{k+2})$, tenemos que $f(k+1)$ es divisible por 9.

10. Demostrar:

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}\alpha=\frac{\operatorname{sen} 2^n\alpha}{2^n\operatorname{sen}\alpha}$$

$(\alpha\neq k\pi, k\in\mathbb{Z})$.

Demostración.

i) Para $n=1$, $\cos\alpha=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}=\cos\alpha$

ii) Hipótesis inductiva, para $n=k$:

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2\alpha^{k-1}\alpha=\frac{\operatorname{sen} 2^k\alpha}{2^k\operatorname{sen}\alpha}$$

Por demostrar, para

$$n=k+1\Rightarrow\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^k\alpha=\frac{\operatorname{sen} 2^{2k+1}\alpha}{2^{k+1}\operatorname{sen}\alpha}$$

en efecto, multiplicando la hipótesis inductiva por $\cos 2^k\alpha$, tenemos

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^{k-1}\alpha\cdot\cos 2^k\alpha &= \frac{\operatorname{sen} 2^k\alpha}{2^k\operatorname{sen}\alpha}\cdot\cos 2^k\alpha\\
\Rightarrow\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^k\alpha &= \frac{2\operatorname{sen} 2^k\alpha\ \cos 2^k\alpha}{2\cdot 2^k\operatorname{sen}\alpha}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 2(2^k\alpha)}{2^{k+1}\operatorname{sen}\alpha}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\operatorname{sen}\alpha}
\end{aligned}$$

11. Demostrar que $\cos(n\pi)=(-1)^n$.

Demostración.

i) Para $n=1$, $\cos\pi=(-1)^1\Leftrightarrow(-1)=(-1)$

ii) Hipótesis inductiva, para $n=k$; $\cos(k\pi)=(-1)^k$.

Por demostrar, para $n = k+1 \Rightarrow \cos[(k+1)\pi] = (-1)^{k+1}$. En efecto, como:

$$\begin{aligned} \cos(k\pi) &= (-1)^k \\ \cos(k\pi)(-1) &= (-1)^k(-1) \\ \cos(\pi + k\pi) &= (-1)^{k+1} \\ \cos[(k+1)\pi] &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

12. Demostrar $\forall\, n \in \mathbb{Z}$; $n \geq 4$, que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! > 2^n$.

Demostración.

i) Para $n = 4$: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 \Rightarrow 24 > 16$.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k$, $k \geq 4$: $k! > 2^k$

Por demostrar, para $n = k+1 \Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}$, en efecto, como

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k > 2^k \quad &\Rightarrow \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) > 2^k(k+1) \\ &\Rightarrow \quad (k+1)! > 2^k(k+1) \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Dado que,

$$\begin{aligned} \forall\, k \geq 4 \quad &\Rightarrow \quad k+1 > 4 \Rightarrow 2^k(k+1) > 4 \cdot 2^k \\ &\Rightarrow \quad 2^k(k+1) > 4 \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k \Rightarrow 2^k(k+1) > 2^{k+1} \qquad (**) \end{aligned}$$

luego, por (*) y (**) concluimos $(k+1)! > 2^{k+1}$.

13. Se definen los números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mediante $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Demostrar que $a_n < 2$ para todo n.

Demostración.

a) Para $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

b) Hipótesis inductiva, para $n = k : a_k < 2$, por demostrar para $n = k+1$, o sea: $a_{k+1} < 2$. En efecto, como $a_k < 2 \Rightarrow 2a_k < 4 \Rightarrow \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} \Rightarrow$ por definición $\sqrt{2a_k} = a_{k+1}$ luego $a_{k+1} < 2$.

14. Demostrar $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

Demostración.

i) Para $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2}=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$ verdadero.

ii) Sea válido para n, o sea se verifica que

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n} \qquad \text{(H.I.)}$$

Por demostrar para $n+1$, o sea que:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}} \qquad \text{(T)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}} &= 2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\\ &= 2-\frac{2(n+2)-(n+1)}{2^{n+1}}\\ &= 2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

15. Si $a_1=1, a_2=3, \ldots, a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$, probar que:

i) $a_1<a_3<a_5<\ldots$ y $a_2>a_4>a_6>\ldots$

ii) $a_n=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

iii) $a_{n+2}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y $a_{n+2}-a_{n+1}=2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

Prueba.

i) Vamos a demostrar que $a_{2n-1}<a_{2n+1}$.

1) Para $n=1$, $a_1<a_3 \Leftrightarrow 1<2$ que es verdad.

2) Sea válido para n, o sea, se cumple $a_{2n-1} < a_{2n+1}$ (H.I.)
En efecto,

$$\begin{aligned} a_{2n-1} < a_{2n+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1}) < \frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n}) \\ &\Leftrightarrow a_{2n+1} < a_{2n+2} \Leftrightarrow 2a_{2n+1} < a_{2n+2} + a_{2n+1} \\ &\Leftrightarrow a_{2n+1} < \frac{1}{2}(a_{2n+2} + a_{2n+1}) \\ &\Leftrightarrow a_{2n+1} < a_{2n+3}, \end{aligned}$$

análogamente se establece:

$$a_2 > a_4 > a_6 > \dots$$

ii) 1) Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = 1$ que es verdad.
2) Sea válido para n, o sea, que se verifica

$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \text{(H.I.)}$$

Por demostrar para $n+1$, o sea, $a_{n+1} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (T)
En efecto, como $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ y tomando en cuenta el principio general de inducción,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \\ a_{n+1} &= \frac{7}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(1-2) \\ a_{n+1} &= \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

iii) Como en ii) está establecida la validez de la fórmula para todo n se tiene:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left[\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \\ &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Análogamente para $a_{n+2} - a_{n+1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

16. Demuestre que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

    Demostración.
    Sea $S = \{n \in \mathbb{N}\ /\ x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y\}$.

    i) $1 \in S$ pues $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ es divisible por $(x + y)$.

    ii) Si $n \in S$ se tiene que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$ (H.I.)

    Por demostrar que $(n+1) \in S$, o sea, $x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)}$ sea divisible por $(x + y)$ (T)

    En efecto:

$$\begin{aligned} x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)} &= x^{2n+2} - y^{2n+2} \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n}) + x^2y^{2n} - y^{2n+2} \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n}) + y^{2n}(x - y)(x + y) \end{aligned}$$

    es divisible por $(x + y)$ pues $x^{2n} - y^{2n}$ lo es por hipótesis y el término que se suma contiene a $(x + y)$, por tanto, $(n + 1) \in S$, luego $S = \mathbb{N}$.

3.6. Ejercicios Propuestos

1. Si $a_1 = 1$ y $a_{k+1} = 2a_k + 1$, probar que $a_n = 2^n - 1$.

2. Si $u_1 = 0$ y $u_{k+1} = (1 - x)u_k + kx$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, pruebe que

$$u_n = \frac{1}{x}[nx - 1 + (1 - x)^n], \quad x \neq 0.$$

3. Probar que si $u_0 = 2$, $u_1 = 3, \ldots, u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1}$, entonces $\forall\ n \geq 0$, $u_n = 2^n + 1$.

4. Siendo $u_1 = c$ y $u_{k+1} = 2u_k + 1$, $\forall\ k \geq 1$, probar que $u_n + 1 = 2^{n-1}(c + 1)$.

5. Se definen los números de Fibonacci inductivamente por:

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \ldots, u_{k+1} = u_k + u_{k-1},$$

    pruebe que:

a) $u_{n+1} \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

b) $u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$

c) $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + 1$

d) $u_{n+p-1} = u_{n-1}u_{p-1} + u_n u_p$

6. Se define $u_1 = 1$ y $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{k+1}$.
Pruebe que $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)u_n - n$.

7. Pruebe que:

a) 9 divide a $(3n+1)7^n - 1$

b) 15 divide a $2^{4n} - 1$

c) 2304 divide a $7^{2n} - 48n - 1$

d) 8 divide a $3^{2n} - 1$

e) 5 divide a $7 \cdot 16^n + 3$

f) 64 divide a $7^{2n} + 16n - 1$

g) 48 divide a $7^{2n} - 1$

h) 64 divide a $9^n - 8n - 1$

8. Pruebe que:

a) $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$

b) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$

9. Demuestre que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, que:

a) $2^n \geq 1 + n$

b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2,\ n > 1$

c) $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n},\ n > 1$

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}$

e) $n! > 2^n,\ n \geq 4$

10. Probar que 24 divide a $n(n^2-1)$ si n es impar.

11. Demuestre: $n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)$ es divisible por p.

12. Pruebe que:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1), \qquad n \geq 0$$

13. Probar que el producto $(2n+1)$ números reales negativos es un número negativo.

14. Probar que para $n > 2$, la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados es $(n-2)\pi$.

15. Determine la falla del método de inducción en la demostración de: $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ la fórmula $p(n) = n^2 - n + 41$ proporciona solo números primos.

16. Demostrar:

    a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$
    b) $2 + 5 + 13 + \ldots + (2^{n-1} + 3^{n-1}) = \frac{1}{2}(2^{n+1} + 3^n - 3)$
    c) $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$
    d) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$
    e) $\frac{5}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{9}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots$ (n términos) $= 1 - \frac{1}{(n+1)3^n}$
    f) $\frac{8}{3\cdot5} - \frac{12}{5\cdot7} + \frac{16}{7\cdot9} - \ldots$ (n términos) $= \frac{1}{3} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+3}$
    g) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{(-4)^n}\right)$

17. Demostrar que:

    a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$
    b) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^n}) = 1 - x^{2^{n+1}}$
    c) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$

18. Demuestre que:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

19. Sean $\mu_1 = 10, \mu_2 = 47 \ldots \mu_n = 23\mu_{n-1} - 60\mu_{n-2}$, $n \geq 3$. Pruebe que: $\mu_n = 20^{n-1} + 3^{n+1}$

20. Dado que $a_0 = 12, a_1 = 11, \ldots, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n,\ n \geq 0$. Demuestre que $a_n = 7 \cdot 3^n + 5(-2)^n$.

21. Sean $a_1 = 0, a_2 = 1, \ldots, a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}),\ n \geq 2$. Demostrar que:
$$a_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

22. $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2), a_4 = \frac{1}{3}(a_2 + 2a_3), \ldots\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$. Demostrar que:
$$a_n = a - \frac{3c}{c+3}\left[\left(-\frac{c}{3}\right)^{n-1} - 1\right], \qquad c = b - a.$$

3.7. Sumatorias

Una sumatoria es un símbolo que se ocupa para denotar en forma comprimida la suma sucesiva de los términos de una sucesión.

Definición 2

Se define el símbolo $\sum$ (que se lee sumatoria) inductivamente, por

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$, donde a_n es una sucesión cualquiera.

De esta definición se desprende fácilmente que,
$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{1} a_i + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}$$

Note que $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa a una suma desde el primer término de la sucesión a_1 para $i = 1$ hasta el último término que en este caso es a_n para $i = n$. Es decir, en $i = 1$ se inicia la suma de los sucesivos términos de a_i e $i = n$ indica donde se finaliza la suma.

Nota. En este texto se estudiarán las sumatorias finitas simples y dobles, que deberían llamarse series finitas.

En un curso posterior es estudiarán las sumatorias infinitas de los términos de una sucesión, a éstas se suelen llamar *series*.

Número de Términos.

Dada $\sum_{i=p}^{n} a_i$ con $0 \leq p \leq n$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el número de términos siempre es igual a $n - p + 1$ para el caso particular de $p = 1$, dicho número es n.

Propiedades.

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$

   El valor de la sumatoria no depende del símbolo que se use como índice.

2. $\sum_{i=p}^{n} c = c(n-p+1)$, $0 \leq p \leq n$, c es una constante real que no depende del índice i.

   Para el caso particular de $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

3. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$, c es una constante.

4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

5. Propiedad Telescópica:

$$\sum_{i=p}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_p;\quad 0\le p\le n,$$

también

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_p-a_{n+1},\quad 0\le p\le n.$$

6. *a*) $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}a_i=\sum_{i=p-r}^{n-r}a_{i+r};\ p-r\ge 0,\ 0\le p\le n$

   b) $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}a_i=\sum_{i=p+r}^{n+r}a_{i-r};\ 0\le p\le n$

7. Sea $p\le n$, entonces $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{p-1}a_i$

Observación.

Todas estas propiedades se prueban en forma sencilla, en base a la definición o bien por inducción.

Sumatorias Notables

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

4. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} r^{k-1} = r^{p-1}\frac{r^{n-p+1}-1}{r-1},\ r \neq 1,\ 0 \leq p \leq n$

Observación.

Todas estas sumas se prueban por inducción, algunas de ellas se encuentran en los ejemplos o bien en los ejercicios resueltos.

Ejemplo 5

Desarrollar las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k(2k-1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\frac{2^k+1}{k+2}$

De la definición se tiene:

a) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k(2k-1) = 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot 11 + 7\cdot 13 + 8\cdot 15,$

note que son $5 = 8-4+1$ términos como debería ser.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\frac{2^k+1}{k+2} = -\frac{2^0+1}{2} + \frac{2^1+1}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{2^{n-1}+1}{n+1}.$

Note que en este caso se tiene $n-1-0+1 = n$ términos.

Ejemplo 6

Escribir usando $\sum$, las siguientes sumas:

1. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots$ (hasta $n+1$ términos)
2. $2\cdot 7 + 5\cdot 9 + 8\cdot 11 + \ldots + 422\cdot 287$
3. $\frac{8}{3\cdot 5} - \frac{12}{5\cdot 7} + \frac{16}{7\cdot 9} - \ldots$ (hasta p términos).

De inmediato se tiene:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$, note que $n-0+1=n+1$ términos.

2. Notemos que $a_k = (3k-1)(2k+5)$, $k = 1, 2, \ldots$ la sumatoria debe terminar en $3k-1 = 422 \wedge 2k+5 = 287$ de donde en ambos casos $k = 141$, por tanto $\displaystyle\sum_{k=1}^{141}(3k-1)(2k+5)$.

3. De inmediato se tiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$.

Ejemplo 7

Sea $a_1 = 3, \ldots, a_n = 6n-3$ calcular $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} a_{k-1}a_{k+1}$.

Note que la sumatoria consta de cuatro términos, así,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{6} a_{k-1}a_{k+1} &= a_2a_4 + a_3a_5 + a_4a_6 + a_5a_7 \\ &= 9\cdot 21 + 15\cdot 27 + 21\cdot 33 + 27\cdot 39 = 2340\end{aligned}$$

Ejemplo 8

Vamos a calcular las siguientes sumatorias, aprovechando para ello la propiedad telescópica.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{i+2}-\frac{1}{i+1}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{i=p}^{n+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)$

Por tanto, se tiene para:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{i+2}-\frac{1}{i+1}\right)=\frac{1}{20+2}-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{22}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{11}$

b) Note que en este caso los términos son consecutivos aunque aparentemente parecen no serlo, lo importante es que:

$$a_i=\frac{1}{2i-1} \quad \text{y} \quad a_{i+1}=\frac{1}{2i+1},$$

así pues,

$$\sum_{i=p}^{n+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)=\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2n+3}$$

3.8. Sumatorias dobles

Sea a_{ij} una sucesión tal que $i,j\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, así se definen

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right); \quad n,m\in\mathbb{N}.$

   Note que en $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)$, la sumatoria entre paréntesis suma sobre j manteniendo i constante, análogamente para $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$ suma sobre i y j la considera constante.

2. Si es el caso que $a_{ij}=b_ic_j$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_ic_j=\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\right)$$

3. Ahora si se trata de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$ entonces,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\right)$$

   y en este caso la sumatoria indicada entre paréntesis es la que se debe efectuar necesariamente en primera instancia.

Nota.

Para el cálculo o desarrollo de una sumatoria doble se aprovechan las propiedades y las sumas notables de las sumatorias simples.

Ejemplo 9

Desarrollaremos y calcularemos

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{j}+k\right)$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} 2ji$

Así, para a) se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{j}+k\right) &= \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{2} k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+k\cdot 2\right) = \sum_{k=1}^{3}\frac{3}{2}+2\sum_{k=1}^{3} k\\
&= \frac{3}{2}\cdot 3+2(1+2+3) = \frac{33}{2}.
\end{aligned}$$

Para b), el desarrollo se puede efectuar como sigue:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} 2ji = \sum_{j=1}^{1} 2j + \sum_{j=1}^{2} 4j = 2\cdot 1 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2 = 14$$

el cálculo también se puede hacer en la forma:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} 2ji &= \sum_{i=1}^{2}\left(2i\sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{2} 2i\frac{1}{2}i(i+1) = \sum_{i=1}^{2} i^2(i+1)\\ &= 1^2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 = 14\end{aligned}$$

3.9. Ejercicios Resueltos

1. Calcular las siguientes sumatorias:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{2n} k \qquad \text{b)}\ \sum_{k=3}^{n} k \qquad \text{c)}\ \sum_{k=n+1}^{2n-1} k$$

Solución.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2}2n(2n+1) = n(2n+1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - (1+2) = \frac{1}{2}n(n+1) - 3$

c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1} k = \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-1+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= n(2n-1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

2. Si $a_k = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ demuestre que $a_k - a_{k-1} = k(k+1)$ y de aquí calcule el valor de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$.

Solución.

$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) - \frac{1}{3}(k-1)(k(k+1)$

$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2-k+1) = k(k+1).$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0 \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}0(0+1)(0+2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

3. Dada $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i-1)$ y $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1} k(k+1)$.

Solución.

Por la propiedad 6), se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(i-1) &= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)(i+1-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ \sum_{k=n}^{2n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{2n+1} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \\ &= \frac{1}{3}(2n+1)(2n+2)(2n+3) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)[(2n+1)\cdot 2(2n+3) - (n-1)n] \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(7n^2+17n+6)\end{aligned}$$

4. Calcular:

$$\text{a)}\quad \sum_{j=1}^{n}(j+1)^3 \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$$

Solución.

a) $$\sum_{j=1}^{n}(j+1)^3=\sum_{j=2}^{n+1}j^3=\sum_{j=1}^{n+1}j^3-1=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2-1$$

b) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1) &= (n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= (n+1)\tfrac{1}{2}n(n+1)-\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

5. Calcule la sumatoria y luego verifique su cálculo por inducción.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1})$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n+1}1+\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}\\ &= (n+1)+1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=n+2^{n+1}\end{aligned}$$

Ahora, por inducción vamos a demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1})=n+2^{n+1}$$

i) Para $n = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1}(1 + 2^{k-1}) = 0 + 2 \Leftrightarrow 1 + 2^0 = 2$ por tanto se cumple.

ii) Sea válido para n, o sea, se verifica que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1 + 2^{k-1}) = n + 2^{n+1} \qquad \text{(H.I.)}$$

Por demostrar para $n + 1$, o sea que:

$$\sum_{k=1}^{n+2}(1 + 2^{k-1}) = n + 1 + 2^{n+2} \qquad \text{(T)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+2}(1 + 2^{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n+1}(1 + 2^{k-1}) + (1 + 2^{n+2-1}) \\ &= n + 2^{n+1} + 1 + 2^{n+1} \\ &= n + 1 + 2 \cdot 2^{n+1} = n + 1 + 2^{n+2}\end{aligned}$$

6. Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Demostración.

i) Para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = p$:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$$

Por demostrar para $n = p + 1 \Rightarrow$:

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{p+2}.$$

En efecto, como:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$

7. Demostrar:

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+3}$$

Demostración.

i) Para $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{1-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 + 3} \Rightarrow$$

$$(-1)^{1-1} \frac{4(1+1)}{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 3)} = \frac{4(2)}{3 \cdot 5} \Leftrightarrow \frac{8}{15} = \frac{8}{15}$$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k+3} \qquad \text{(H.I.)}$$

Por demostrar, para $n = k + 1$:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{k} \frac{1}{2k+5}. \qquad \text{(T.)}$$

En efecto, como:

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)}=\frac{1}{3}+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k+3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)}+(-1)^{k}\frac{4(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{3}+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k+3}+(-1)^{k}\frac{4(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}(2k+5)+(-1)^{k}4(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{3}+(-1)^{k}\frac{(-2k-5+4k+8)}{(2k+3)(2k+5)}=\frac{1}{3}+(-1)^{k}\frac{1}{2k+5}$$

8. Demuestre y calcule: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$.

Demostración.

a) Desarrollando:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 &= -1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-\ldots-(2n-1)^2+(2n)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}(2k)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\\
&= \sum_{k=1}^{n}[(2k)^2-(2k-1)^2]\\
&= \sum_{k=1}^{n}[(2k)^2-(2k)^2+2(2k)-1]\\
&= \sum_{k=1}^{n}(4k-1)
\end{aligned}$$

$$b)\quad \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1$$
$$= 4\tfrac{n(n+1)}{2} - n = 2n^2 + n$$

9. Calcular: $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Solución.

Por fracciones parciales

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1} \Leftrightarrow 1 = A(2k+1) + B(2k-1)$$

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$; $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$, así:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{n}{2n+1}$$

10. Calcular: $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k}$

Solución.

$$\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k} = 1 + \frac{k^2-k+1}{k^4+k} \qquad \text{(división de polinomios)}$$
$$\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k} = 1 + \frac{k^2-k+1}{k^4+k} = 1 + \frac{1}{k(k+1)},$$

así:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{k(k+1)}\right] = \sum_{k=1}^{n}1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = n + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$
$$S = n + \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

11. Calcular: $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

Solución.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k+1-k^2}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)^2}-\frac{k^2}{k^2(k+1)^2}\right]\\
S &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

12. Calcular:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

Solución.

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$, desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned}
S &= \log\frac{2}{1}+\log\left(\frac{3}{2}\right)^2+\log\left(\frac{4}{3}\right)^3+\ldots+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\
S &= \log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdots\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)=\log\frac{(n+1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

13. Calcular:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k^2+2k}\right)$$

Solución.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}[2\log(k+1)-\log(k)(k+2)]\\
S &= \sum_{k=1}^{n}(\log(k+1)-\log k)-\sum_{k=1}^{n}[\log(k+2)-\log(k+1)]\\
S &= \log(n+1)-\log 1-(\log(n+2)-\log 2)=\log\frac{2(n+1)}{(n+2)}
\end{aligned}$$

14. Calcular:
$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+k^2+k^4}$$

Solución.

Haciendo $1+k^2+k^4=1+2k^2+k^4-k^2=(1+k^2)^2-k^2$ se tiene:
$$S=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{(1+k^2-k)(1+k^2+k)}\right).$$

Por otra parte:
$$\frac{k}{(1+k^2-k)(1+k^2+k)}=\frac{Ak+B}{(1+k^2-k)}+\frac{Ck+D}{1+k^2+k}$$

$$\begin{aligned} k &= (Ak+B)(1+k^2+k)+(Ck+D)(1+k^2-k)\\ k &= (A+C)k^3+(A+B-C+D)k^2+(A+B+C-D)k+B+D \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0\\ A+B-C+D=0\\ A+B+C-D=1\\ B+D=0 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} A=C=0\\ B=\frac{1}{2}\\ D=-\frac{1}{2},\quad \text{de donde} \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+k^2-k}-\frac{\frac{1}{2}}{1+k^2+k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+k^2-k}-\frac{1}{1+(k+1)^2-(k+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+n^2+n}\right) \end{aligned}$$

15. Calcular:
$$S=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt{5k+3}-\sqrt{5k-2}}{\sqrt{25k^2+5k-6}}-\frac{3^{k-4}6^k-4}{2^{k+2}}\right)$$

Solución.

$$S = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt{5k+3}}{\sqrt{(5k+3)(5k-2)}} - \frac{\sqrt{5k-2}}{\sqrt{(5k+3)(5k-2)}}\right) - \sum_{k=2}^{n}\frac{3^{k-4}2^{k}3^{k}-2^{2}}{2^{k+2}}$$

$$S = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(5k-2)}} - \frac{1}{\sqrt{(5k+3)}}\right) - \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}3^{2k-4} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k}}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{5n+3}} - \frac{1}{4}\left(\frac{(3^2)^{n-1}-1}{9-1}\right) + \frac{1}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{1}{2}-1}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{5n+3}} - \frac{1}{32}(3^{2n-2}-1) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

16. Calcular:

$$S = \sum_{j=2}^{n+2}(j-1)^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4$$

Solución.

Haciendo $j-1=k$ en la primera sumatoria y para $j=2 \Rightarrow k=1$; $j=n+2 \Rightarrow k=n+1$, luego

$$S = \sum_{k=1}^{n+1}k^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = \sum_{k=1}^{n}k^4 + (n+1)^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = (n+1)^4.$$

17. Calcular: $S = 4\cdot 7 + 7\cdot 12 + 10\cdot 17 + \ldots + 157\cdot 262$.

Solución.

Nótese que $S = \sum_{k=1}^{?}(3k+1)(5k+2)$, tal que:

$$\left.\begin{array}{l} 3k+1 = 157 \\ 5k+2 = 262 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 52,$$

con lo que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{52}(3k+1)(5k+2) \\ S &= \sum_{k=1}^{52}(15k^2+11k+2) \\ S &= 15\frac{52\cdot 53\cdot 105}{6}+11\cdot\frac{52\cdot 53}{2}+2\cdot 52=738712 \end{aligned}$$

18. Calcular:

$$S=\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{6240}$$

Solución.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{78\cdot 80} \\ S &= \sum_{k=1}^{?}\frac{1}{(k+1)(k+3)}, \qquad \text{tal que} \end{aligned}$$

$\left.\begin{array}{l} k+1=78 \\ k+3=80 \end{array}\right\} \Rightarrow k=77$, así:

$$S=\sum_{k=1}^{77}\frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

con ayuda de fracciones parciales:

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+3}\Leftrightarrow 1=A(k+3)+B(k+1)$$

Si $k=-3 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$; si $k=-1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$, luego:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{77}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{77}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{77}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]\\
S &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{79}+\frac{1}{3}-\frac{1}{80}\right]=0{,}404087553
\end{aligned}$$

19. Calcular:

$$S_n=\frac{5}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{9}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots$$

Solución.

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{k(k+1)3^k}$, de donde $\dfrac{2k+3}{k(k+1)}=\dfrac{A}{k}+\dfrac{B}{k+1} \Leftrightarrow$

$A=3$ y $B=-1$, así:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{k}-\frac{1}{k+1}\right]\cdot\frac{1}{3^k}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k3^{k-1}}-\frac{1}{(k+1)3^k}\right]\\
S_n &= \frac{1}{1\cdot 3^0}-\frac{1}{(n+1)3^n}=1-\frac{1}{(n+1)3^n}
\end{aligned}$$

20. Probar por inducción que:

$$*\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j+1}}{j};\quad n\geq 1$$

Prueba.

i) Para $n=1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=2}^{2}\frac{1}{k}=\sum_{j=1}^{2}\frac{(-1)^{j+1}}{j} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ii) Sea válido para n, o sea, se cumple $*\forall\ n \geq 1$. Por probar para $n+1$, o sea,

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j},$$

en efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{(-1)^{(2n+1)+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{(2n+2)+1}}{2n+2} \\
&= \sum_{j=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j}
\end{aligned}$$

Nótese que $(2n+1)+1$ es par y que $(2n+2)+1$ es impar.

21. Sabiendo que $(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$, demostrar que $S = \sum_{k=1}^{n} k^4$ cumple con la ecuación:

$$(n+1)^5 = 1+5S+10\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\frac{n(n+1)}{2}+n$$

encuentre el valor de S cuando $n = 5$.

Solución.

Haciendo $a = 1, a = 2, a = 3, \ldots, a = n$ en el desarrollo dado, tenemos:

$(1+1)^5 = 2^5 = 1^5 + 5\cdot 1^4 + 10\cdot 1^3 + 10\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + 1$

$(2+1)^5 = 3^5 = 2^5 + 5\cdot 2^4 + 10\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + 1$

$(3+1)^5 = 4^5 = 3^5 + 5\cdot 3^4\cdot 4 + 10\cdot 3^3 + 10\cdot 3^2 + 5\cdot 3 + 1$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(n+1)^5 = (n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10 \cdot n^3 + 10 \cdot n^2 + 5n + 1$

sumando miembro a miembro y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(n+1)^5 &= 1 + 5(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4) + 10(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + \\
&\quad +10(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 5(1 + 2 + \ldots + n) + 1 \cdot n \\
(n+1)^5 &= 1 + 5S + 10\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \\
&\quad +5\frac{n(n+1)}{2} + n,
\end{aligned}$$

despejando S y para $n = 5$ se tiene

$$S = \frac{1}{5}\left[6^5 - \left(1 + 10 \cdot \frac{30^2}{4} + 10\frac{330}{6} + 5\frac{30}{2} + 5\right)\right] = 979$$

22. Si $f(k) = \frac{1}{k^2}$

   a) $f(k) - f(k+1) = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

   b) Aproveche a) y calcule la suma de n términos

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} \cdots$$

Solución.

De inmediato,

$$\begin{aligned}
f(k) - f(k+1) &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{(k+1-k)(k+1+k)}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Observe que $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ nos va generando los términos de la suma, luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k+1)\right] \\
&= f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

23. Demuestre por inducción

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Demostración.

i) Para $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} k(2-k) = 1(2-1) = 1 = \frac{1}{6}1(1+1)(1+2)$.

ii) Sea válido para $n = j$, se verifica que:

$$\sum_{k=1}^{j} k(j-k+1) = \frac{1}{6}j(j+1)(j+2)$$

Por demostrar para $n = j+1$, o sea,

$$\sum_{k=1}^{j+1} k(j+1-k+1) = \frac{1}{6}(j+1)(j+2)(j+3)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{j+1} k(j+1-k+1) &= \sum_{k=1}^{j+1}[k(j-k+1)+k] \\
&= \sum_{k=1}^{j+1} k(j-k+1) + \sum_{k=1}^{j+1} k \\
&= \sum_{k=1}^{j} k(j-k+1) + (j+1)(j-(j+1)+1) \\
&\quad + \frac{1}{2}(j+1)(j+2) \\
&= \frac{1}{6}j(j+1)(j+2) + \frac{1}{2}(j+1)(j+2) \\
&= \frac{1}{6}(j+1)(j+2)(j+3)
\end{aligned}$$

24. Si $\sum_{i=1}^{n} u_i = 2n^2 + 3n$, calcule el valor de $\sum_{i=n+1}^{2n} u_i$ y u_n.

Solución.

$$\sum_{i=n+1}^{2n} u_i = \sum_{i=1}^{2n} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i = 2(2n)^2 + 3(2n) - (2n^2 + 3n),$$

así, $\sum_{i=n+1}^{2n} u_i = 3n(2n+1)$, ahora como

$$\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n-1} u_i = u_n \Rightarrow 2n^2 + 3n - [2(n-1)^2 + 3(n-1)] = u_n$$

simplificando se llega a $u_n = 4n + 1$.

25. Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)$$

Demostración.

i) Para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} k^2 = (1+1)(2 \cdot 1 + 1) \Rightarrow 1 - 4 + 9 = (2)(3) \Rightarrow 6 = 6$$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = j$:

$$\sum_{k=1}^{2j+1} (-1)^{k-1} k^2 = (j+1)(2j+1).$$

Por demostrar para $n = j + 1$, o sea,

$$\sum_{k=1}^{2j+3} (-1)^{k-1} k^2 = (j+2)(2j+3).$$

En efecto, como:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2j+1}(-1)^{k-1}k^2 &= (j+1)(2j+1) \Rightarrow \\
\sum_{k=1}^{2j+1}(-1)^{k-1}k^2 &+ (-1)^{(2j+2)-1}(2j+2)^2+(-1)^{(2j+3)-1}(2j+3)^2 \\
&= (j+1)(2j+1)+(-1)^{2j+1}(2j+2)^2+(-1)^{2(j+1)}\cdot(2j+3)^2
\end{aligned}$$

como $2j+1$ es impar y $2(j+1)$ es siempre par, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2j+3}(-1)^{k-1}k^2 &= (j+1)(2j+1)-(2j+2)^2+(2j+3)^2 \\
&= 2j^2+3j+1-(4j^2+8j+4)+(4j^2+12j+9) \\
&= 2j^2+3j+1+4j+5 \\
&= 2j^2+7j+6 \\
&= (j+2)(2j+3)
\end{aligned}$$

26. Se define $0!=1, 1!=1, \ldots, (n+1)!=n!(n+1)$. Por tanto, $(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot(n+1)$.

Calular:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kk!$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!$

Solución.

a)
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kk! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)k!-k!] \\
&= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!] = (n+1)!-1!
\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! &= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-2k]k!\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2k!-2\sum_{k=1}^{n}kk!\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)!-2[(n+1)!-1!]\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}kk!-2(n+1)!+2\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}kk!-1\cdot 1!-2(n+1)!+2\\ &= (n+2)!-1!-1\cdot 1!-2(n+1)!+2\\ &= (n+2)!-2(n+1)!=(n+1)!n\end{aligned}$$

27. Calcular:

a) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{k}{(k+1)!}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1-k^2}{(k+1)!}$

Solución.

a)
$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\ &= \tfrac{1}{(n+1)!}-\tfrac{1}{(2n)!}\end{aligned}$$

b) Con el fin de evitar artificios algebraicos como el efectuado en a), a continuación damos un método similar al de fracciones parciales para separar en fracciones términos que contienen factoriales.

$$\frac{k+1-k^2}{(k+1)!}=\frac{A}{(k+1)!}+\frac{B}{k!}+\frac{C}{(k-1)!} \qquad (1)$$

Tres constantes pues el grado del numerador es dos, dos constantes si el grado es uno como en a) y los denominadores decrecientes a partir de $(k+1)!$ uno por cada constante.

Así, de (1) se tiene que $k+1-k^2 = A + B(k+1) + Ck(k+1)$.
Si $k=-1 \Rightarrow A=-1$.
Si $k=0 \Rightarrow A+B=1 \Rightarrow B=2$.
Si $k=1 \Rightarrow A+2B+2C=1 \Rightarrow C=-1$.
Se obtienen los mismos resultados por igualdad de coeficientes, por tanto queda

$$\frac{k+1-k^2}{(k+1)!} = \frac{-1}{(k+1)!} + \frac{2}{k!} - \frac{1}{(k-1)!},$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1-k^2}{(k+1)!} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1-k^2}{(k+1)!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{-1}{(k+1)!} + \frac{2}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{0!} \\
&= 1 - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

28. Calcular:

$$\frac{1\cdot 2^1}{3!} + \frac{2\cdot 2^2}{4!} + \frac{3\cdot 2^3}{5!} + \dots \qquad (n \text{ términos})$$

Solución.

Notemos que $a_k = \frac{k}{(k+2)!}2^k$, $k = 1, 2, \dots, n$ siguiendo el método del problema anterior se tiene:

$$\frac{k}{(k+2)!} = \frac{A}{(k+2)!} + \frac{B}{(k+1)!},$$

de donde $k = A + B(k+2)$.

Si $k = -2 \Rightarrow A = -2$ y si $k = 0 \Rightarrow B = 1$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k+2)!} 2^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{2}{(k+2)!} \right) 2^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2^k}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!} \right)$$

finalmente para la propiedad telescópica se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k+1)!} 2^k = \left(\frac{2!}{2!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \right) = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

29. Calcular:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}, \qquad p \neq 0.$$

Solución.

Nótese que:

$$\frac{A}{k(k+1)\dots(k+p-1)} + \frac{B}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$$

$$\Leftrightarrow A(k+p) + Bk = 1$$

Si $k = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{p}$ y si $k = -p \Rightarrow B - \frac{1}{p}$, luego:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} \left[\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)} \right] \\ S_n &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \right]. \end{aligned}$$

Nótese que:

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)} \quad \text{y} \quad u_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}$$

30. Calcular: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}(ai+bj),\ a,b$ constantes.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}(ai+bj) &= \sum_{i=1}^{n}\left(ai\sum_{j=2}^{n}1+b\sum_{j=2}^{n}j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[ai(n-1)+b\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}a(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}bn[(n(n+1)-2)]
\end{aligned}$$

31. Calcule: $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{7}(2i^2j-20)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{7}(2i^2j-20)\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(2j\sum_{i=1}^{7}i^2-20\sum_{i=7}^{7}1\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[2j\frac{7(7+1)(14+1)}{6}-20\cdot 7\right]\\
&= 280\sum_{j=1}^{n}j-140\sum_{j==1}^{n}1\\
&= 140n(n+1)-140n\\
&= 140n^2
\end{aligned}$$

32. Calcule: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{2^j}{3^i}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{2^j}{3^i} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{2^j}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3^i}\cdot\sum_{j=1}^{i}2^j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}\cdot 2\frac{2^i-1}{2-1}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i-\left(\frac{1}{3}\right)^i\right]\\
&= 2\left(\frac{2}{3}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\frac{2}{3}-1}\right)-2\frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\frac{1}{3}-1}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n-4\left(\frac{2}{3}\right)^n+3
\end{aligned}$$

33. Calcular la suma de n–términos de:

a) $1\cdot 2+(1\cdot 2+2\cdot 3)+(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4)+\ldots$

b) $2\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2}+3\cdot\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}\right)+4\cdot\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}\right)+\ldots$

c) $\dfrac{n+1}{n(n+1)}+\left[\dfrac{n+2}{n(n+1)}+\dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)}\right]+$
$+\left[\dfrac{n+3}{n(n+1)}+\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{n+3}{(n+2)(n+3)}\right)+\ldots.$

Solución.

$$\begin{aligned}
a)\quad S_n &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}j(j+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}j^2+\sum_{j=1}^{k}j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\right]\\
&= \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

$$b)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{k+1}{j(j+1)} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$c)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n+j-1}-\frac{1}{n+j}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{2}(n+1)$$

34. Calcule:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{2}{1+2}-\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{3}{1+2+3}-\frac{2}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{1+2\ldots+n}-\frac{2}{n}\right).$$

Solución.

Note que la suma se puede expresar por:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sum_{j=1}^{k} j}-\frac{2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\frac{1}{2}k(k+1)}-\frac{2}{k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1}\right) = -\frac{2n}{n+1}$$

35. Calcular:

a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=1}^{i}2^{i+j}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{m}\frac{k+1}{i^2-1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)^{-1}(k+1)$

Solución.

$$a)\quad \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=1}^{i}2^{i+j} = \sum_{i=2}^{n+1}2^i\sum_{j=1}^{i}2^j = \sum_{i=1}^{n+1}2^i\cdot 2\frac{2^i-1}{2-1}$$
$$= 2\sum_{i=2}^{n+1}(2^{2i}-2^i) = 2\sum_{i=2}^{n+1}2^{2i} - 2\sum_{i=2}^{n+1}2^i$$
$$= 2\cdot 2^4\frac{2^{2n}-1}{2^2-1} - 2\cdot 2^2\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$= \frac{1}{3}(2^{2n+5}-2^5) - 2^{n+3} + 2^3$$

$$b)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{m}\frac{k+1}{i^2-1} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{(i-1)(i+1)}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1\right)\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i+1}\right)$$
$$= \left[\frac{1}{2}n(n+1)+n\right]\frac{1}{2}\left[\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right) + \sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}n(n+3)\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}\right)\right]$$

$$c)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)^{-1}(k+1) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{j(j+1)}\right)(k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}2(k+1)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}2(k+1)\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}2k = n(n+1)$$

36. Calcule la suma de todos los números del siguiente cuadro

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
1 & + & 2 & & & & & & \\
1 & + & 2 & + & 3 & & & & \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & + & \dots & + \quad n
\end{array}$$

Solución.

Primera forma: Sumando por filas.

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+n)$$

es decir, expresándolo como doble sumatoria, queda:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}k &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Segunda forma: Sumando por columnas.

$$\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n-1}2+\sum_{k=1}^{n-2}3+\ldots+\sum_{k=1}^{1}n$$

$$=1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-3)+\ldots+n\cdot 1$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i(n-i+1)=(n+1)\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=(n+1)\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

naturalmente da el mismo resultado.

37. Calcular:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}jx^{i-1}\quad \text{con} \quad x\neq 1$$

Expandiendo la doble suma se tiene:

$$\begin{aligned} S_n &= 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} \\ xS_n &= x+3x^2+6x^3+10x^4+15x^5+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}x^{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}x^n. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro, resulta:

$$\begin{aligned} (1-x)S_n &= 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots+nx^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}x^n \\ x(1-x)S_n &= x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+(n-1)x^{n-1}+nx^n-\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro nuevamente:

$$\begin{aligned} (1-x)^2S_n &= 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}x^n \\ &\quad -nx^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1} \\ (1-x)^2S_n &= \frac{x^n-1}{x-1}-\frac{n(n+3)}{2}x^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1} \\ S_n &= \frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{x^n-1}{x-1}-\frac{n(n+3)}{2}x^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1}\right] \end{aligned}$$

38. Calcular la suma del siguiente cuadro:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & 5 & 7 & & \\ & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \\ 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \end{array}$$

$(n+1)$ filas.

Solución.

La suma se puede expresar como sigue:

$$1+(3+5+7)+(9+11+13+15+17)+\ldots$$

o bien,

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)+\sum_{k=2}^{4}(2k-1)+\sum_{k=5}^{9}(2k-1)+\ldots$$

Luego, la suma pedida es:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i^2+1}^{(i+1)^2}(2k-1) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{(i+1)^2}(2k-1)-\sum_{k=1}^{i^2}(2k-1)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}[(i+1)^4-i^4]=(n+1)^4\end{aligned}$$

3.10. Ejercicios Propuestos

1. Desarrollar las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{6}\frac{3^{2k}-1}{k+2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(n+1)k!$ c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{k}{(n-k)}$

Respuesta.

a) $\frac{3^6-1}{5}+\frac{3^8-1}{6}+\frac{3^{10}-1}{7}+\frac{3^{12}-1}{8}$

b) $-(n+1)1!+(n+1)2!-(n+1)3!+\ldots+(-1)^n(n+1)n!$

c) $\frac{n+1}{-1}+\frac{n+2}{-2}+\frac{n+3}{-3}+\ldots+\frac{2n+1}{-(n+1)}$

2. Escribir usando el símbolo $\sum$ las siguientes sumas:

a) $1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 3+\ldots$ hasta n términos.

b) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}$.

c) $-1\cdot 1+3\cdot 2^1+7\cdot 2^2+\ldots+223\cdot 2^{56}$

Respuesta.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)i$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^{k-1}}$

c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{57} (4j-5)2^{j-1}$

3. Calcular:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k-1)(k+1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} (k-3^{-k})$ c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1} (n-k)$

Respuesta.

a) $\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$

b) $\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} - 45 - \frac{1}{2 \cdot 3^9}$

c) $n(n+2) - \frac{1}{2}(3n^2 + 7n + 2)$

4. Calcular:

a) $\displaystyle\sum_{i=20}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right)$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{3}{2k} - \frac{3}{2k+2} \right)$

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a^i - a^{i+1}}{a^{2i+1}} \right)$, $a \neq 0$.

d) $\displaystyle\sum_{k=4}^{60} \frac{k}{(k+1)!}$

Respuesta.

a) $\frac{1}{21} - \frac{1}{n+2}$

b) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$

c) $\frac{1}{a^{n+1}} - 1$

d) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{61!}$

5. Determine el término que falta en las siguientes igualdades:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6k}-?\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6n+6}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(?-\frac{3}{2k+5}\right)=\frac{3}{2n+7}-\frac{3}{7}$

   c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n}2^{2i+1}=\sum_{i=?}^{2n+4}?$

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}=\sum_{k=2}^{n+1}?$

   Respuesta.

   a) $\frac{1}{6k+6}$

   b) $\frac{3}{2k+7}$

   c) $i=4$ y 2^{2i-7}

   d) $\frac{1}{(k-1)(2k-1)}$

6. Calcular:

   a) $2\cdot 5+4\cdot 6+6\cdot 7+\ldots+480\cdot 244$

   b) $2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9+\ldots+28\cdot 57$

   c) $3^3-4^3+5^3-6^3+\ldots-46^3$

   Respuesta.

   a) 9543600

   b) 15831

   c) -50248

7. Calcular:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k k$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k k^2$

Respuesta.

a) $-(n+1)$

b) $(n+1)(2n+1)$

8. Calcule la suma de n términos de:

   a) $1^2 + 2\cdot 2^2 + 3^2 + 2\cdot 4^2 + \ldots + n^2$, para n impar.

   b) $1\cdot n^2 + 2(n-1)^2 + 3(n-2)^2 + \ldots$

   Respuesta.

   a) $\frac{1}{2}(n+1)n^2$

   b) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

9. Sumar $2n$ términos de:

   a) $2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 4\cdot 7 + \ldots$

   b) $3\cdot 6 + 5\cdot 10 + 7\cdot 14 + \ldots$

   Respuesta.

   a) $\frac{4}{3}n(n+2)(2n+5)$

   b) $\frac{4}{3}n(16n^2 + 24n + 11)$

10. Sumar $2n+1$ términos de:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \ldots$$

Respuesta.

$4n^3 + 9n^2 + 6n + 1$

11. Calcular la suma de n términos de:

    a) $\dfrac{3}{1\cdot 3}+\dfrac{17}{2\cdot 4}3+\dfrac{11}{3\cdot 5}3^2+\dfrac{15}{4\cdot 6}3^3+\dots$

    b) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$

    c) $1+\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{3^2}+\dfrac{10}{3^3}+\dots$

    d) $\dfrac{1^2}{2\cdot 3}4+\dfrac{2^2}{3\cdot 4}4^2+\dfrac{3^2}{4\cdot 5}4^3+\dots$

    e) $\dfrac{170}{5\cdot 7}\cdot\dfrac{1}{5^6}+\dfrac{194}{6\cdot 8}\cdot\dfrac{1}{5^7}+\dfrac{218}{7\cdot 9}\cdot\dfrac{1}{5^8}+\dots$

    Respuesta.

    a) $\frac{1}{2}\,\frac{(4n+5)3^n}{(n+1)(n+2)}-\frac{5}{4}$

    b) $\frac{1}{4}\,\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

    c) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\,\frac{3^{n+1}-6n-5}{3^{n-1}}$

    d) $\frac{1}{3}\,\frac{(n-1)4^{n+1}+2n+4}{n+2}$

    e) $\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{6n+35}{(n+5)(n+6)}\cdot\frac{1}{5^{n+5}}$

12. Determine el número natural n para el cual se cumpla:

    $$3\sum_{k=1}^{n-1}(k-4)+6=\sum_{k=n}^{2n-1}(k-4)$$

    Respuesta.

    $n=4$

13. Calcular:

    a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{4j}{i}$

    b) $\displaystyle\sum_{j=4}^{m}\sum_{i=1}^{n}3^{i+j}$

c) $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{4j^2+1}{4j^2-1},\ m>n$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i(k-i)$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$

f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k2^{k+j}$

g) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right)$

Respuesta.

a) $n(n+3)$

b) $\frac{243}{4}(3^{m-3}-1)(3^n-1)$

c) $(m-n)\left(n-\frac{1}{2n-1}\right)$

d) $\frac{1}{2}n^2(n+1)(1-n)$

e) $\frac{1}{2}(n+1)$

f) $\frac{1}{3}(n-1)2^{2n+3}-\frac{32}{9}(2^{2(n-1)}-1)+4(2^n-1)$

g) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+2^{n+1}-5$

14. Demostrar por inducción:

a) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2n}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)}=\frac{1}{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log(n+1)$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{n+1-j}{j}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\operatorname{sen}2nx}{2\operatorname{sen}x}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)=\frac{1}{p+2}n(n+1)\ldots(n+p+1),\ p\in\mathbb{N}.$

15. Calcular:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k^2}{k^2-1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+k^2+1}{k^2+k}$

Respuesta.

a) $\frac{1}{4}(4n+3)-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$

b) $\frac{1}{2}n\left(n+1+\frac{2}{n+1}\right)$

16. Calcule la suma de n–términos de:

a) $1\cdot2+(1\cdot2+2\cdot3)+(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4)+\ldots$

b) $2(-1)+(2(-1)+4\cdot0)+(2(-1)+4\cdot0+6\cdot1)+\ldots$

c) $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots$

Respuesta.

a) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$

b) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n-3)$

c) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

17. Determine la suma de n términos (los que se encuentran entre paréntesis).

    (2+4+6)+(8+10+12+14+16+18)+(20+22+24+26+28+30+32+34+36)+...

    Respuesta.

    $\frac{3}{2}n(n+1)\left[\frac{3}{2}n(n+1)+1\right]$

18. Demostrar:
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}k^2=\sum_{i=1}^{n}i(n-i+1)^2$$

19. Si $S_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{k+1}\right)^{i-1}$; $k=1,2,\ldots,n$. Demuestre que:
$$\sum_{j=n+1}^{2n}S_j=3\sum_{k=1}^{n}(n-k+1).$$

20. Hallar el número de esferas en un apilamiento sobre una base rectangular cuyos lados contienen 15 y 20 esferas, si el tope es una línea.

    Respuesta.

    1840.

21. Demuestre que la suma de todos los naturales impares que son menores que $6n$ y que no son múltiplos de 3, es $6n^2$.

22. Probar que la suma de los productos en parejas (distintas) de los n primeros números naturales impares es:
$$\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1).$$

23. Demuestre que la suma de los productos de todas las parejas de números distintos que se pueden sumar con los n primeros números naturales es:
$$\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2).$$

24. Esferas iguales son apiladas en forma de una pirámide de base cuadrada. Hallar el número de esferas en una pirámide incompleta que tiene n capas si cada lado de la base contiene $2n$ esferas.

    Respuesta.

    $\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$.

25. Sea la sucesión definida por:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = 2a_{n-1}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

    a) Examinando algunos valores, conjeture una fórmula para a_n, luego verifíquela por inducción.

    b) Calcular $\displaystyle\sum_{k=4}^{2n+1} k a_k$ para $n \geq 2$.

    Respuesta.

    b) $n2^{2n+2} - 16$.

26. Calcular:

    a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$

    b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-2}{(k+2)!}$

    c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+5k+5}{(k+4)!}$

    Respuesta.

    a) $\frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$

    b) $-\frac{n}{(n+2)!}$

    c) $\frac{1}{8} - \frac{1}{(n+4)(n+2)!}$

27. Si $a_i = i^2(i-1)^2(2i-1)$, simplifique $a_{i+1} - a_i$ y aplíquela para calcular: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

28. Si $S_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} j$ demuestre que:

$$\sum_{j=1}^{n} S_i S_{n-i+1} = \frac{1}{120} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

29. Ocupe la identidad

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x = -2\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

para demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x}.$$