

Cuarta Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Abril, 2012

1. Si $x > 0$, ¿es cierto que $x^{-1} > 0$?
2. ¿Es cierto que si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} > 2$? ¿Puede encontrar una relación similar para $x < 0$?
3. Muestre que no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + x + 1 = 0$.
4. Muestre que si $x > 0$ e $y > 0$ entonces $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. ¿En cuales casos se cumple la igualdad?
5. Sea $A \in \mathbb{R}$, muestre que el conjunto $\{A - x^2 : x \in \mathbb{R}\}$ tiene un elemento que es el más grande de todos.
6. Considere un rectángulo de perímetro P . Muestre que los lados del rectángulo se pueden escribir en la forma $\frac{P}{4} + a$ y $\frac{P}{4} - a$. Describa a en términos de los lados del rectángulo.
7. Muestre que entre los rectángulos de perimetro P , el cuadrado es el que tiene mayor área.
8. ¿Cuáles son los números reales que están a distancia menor que 2 del -3 ?
9. ¿La ecuación $x^2 + xy + y^2 = 0$ tiene solución nula?
10. Si $x < y$, ¿es cierto que $x^2 < y^2$?

11. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_k : k \in \{1, \dots, n\}\}$ un conjunto de números reales. ¿Es cierto que

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|?$$

12. Sean x e y números reales. Considere el número

$$M(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Muestre que $M(x, y)$ es el máximo entre x e y . Encuentre una expresión similar para el mínimo entre x e y .

13. (a) Si $0 < r < 1$, muestre que existe $c > 0$ tal que $r = \frac{1}{1+c}$.

(b) Muestre que si $c > 0$ entonces $(1 + c)^n \geq 1 + nc$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Muestre que si $0 < r < 1$, existe $c > 0$ tal que para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $r^n \leq \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{n}\right)$.

14. Sean a, b, δ y ϵ números positivos. Suponga que $|x - a| < \delta$ y que $|y - b| < \epsilon$. Demuestre que

(a) $|x + y - (a + b)| < \delta + \epsilon$

(b) $|xy - ab| < \delta(b + \epsilon) + a\epsilon$

(c) $|x^2 - a^2| < \delta^2 + 2\delta a$

15. Resuelva las siguientes desigualdades en $\mathbb{R}$.

(a) $x < x^2 - 12 < 4x$

(b) $\frac{x-1}{x^2-3x} \geq 0$

(c) $|2x - 3| + |4 - x| < 2$

$$(d) |x + 1| - |x - 1| \geq 3x + 2$$

$$(e) 2 < |x^2 - 1| < 3$$

$$(f) \sqrt{\frac{3x-9}{2x+4}} \geq 1$$

$$(g) \frac{3}{x-9} > \frac{2}{x+2}$$

$$(h) \left| \frac{6-5x}{3+x} \right| < \frac{1}{2}$$

16. Problemas de Planteo.

- a) Las utilidades de un fabricante de cierto producto "A" están determinadas por la expresión: $U(x) = (120 - x)(x - 20)$, en miles de pesos, donde x representa el precio de venta de cada artículo. Determina entre qué valores se debe vender los productos de manera que las utilidades sean superiores a 1600000.
- b) Los ingresos de la empresa "A" están determinados por la expresión $I_A(x) = (5 - 2x)^2$, y los ingresos de la empresa "B" por la expresión $I_B(x) = (x + 3)^2$, donde x es la cantidad de artículos vendidos (en miles). Determine el intervalo para x en el cual los ingresos de "B" superan a los de "A".
- c) El departamento de recursos humanos de una institución emplea un test de 30 preguntas para determinar la aptitud de un postulante en una sección que atiende público. De acuerdo al tiempo t , en minutos, que emplea en responder el test se calcula un coeficiente de aptitud mediante la fórmula:

$$C.A. = \frac{5,5t - 3(30-t) + 135}{200}.$$

Se ha establecido considerar como aptitud normal a toda persona cuyo $C.A.$ no sea inferior a 0,85 ni mayor de 1,20.

- (a) Determine el tiempo mínimo que debe emplear un postulante para obtener un $C.A.$ normal.
- (b) Determine el tiempo máximo que debe emplear un postulante para obtener un $C.A.$ normal.