Pauta Control 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 19 de Marzo, 2012

1. Utilice el principio de Inducción para demostrar que:

   $1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + ... + n \cdot 5^n = \frac{5+(4n-1)\cdot 5^{n+1}}{16}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

   En efecto:

   (1) Para $n = 1$, tenemos que $1 \cdot 5^1 = 5$ y $\frac{5+(4\cdot 1-1)\cdot 5^{1+1}}{16} = \frac{5+3\cdot 25}{16} = \frac{80}{16} = 5$, luego $1 \cdot 5^1 = \frac{5+(4\cdot 1-1)\cdot 5^{1+1}}{16}$.

   Por lo tanto la proposición se cumple para $n = 1$.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   (2) Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir,

   $1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + ... + k \cdot 5^k = \frac{5+(4k-1)\cdot 5^{k+1}}{16}$ (Hipótesis).

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Por demostrar que se cumple para $n = k + 1$, es decir,

   $1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + ... + (k+1) \cdot 5^{k+1} = \frac{5+(4k+3)\cdot 5^{k+2}}{16}$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Demostración:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + ... + (k+1) \cdot 5^{k+1} &= 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + ... + k \cdot 5^k + (k+1) \cdot 5^{k+1} \\ &= \frac{5 + (4k-1) \cdot 5^{k+1}}{16} + (k+1) \cdot 5^{k+1} \end{aligned}$$

   (usando la hipótesis)

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Sumando al lado derecho tenemos que:

$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + ... + (k+1) \cdot 5^{k+1} = \frac{5+(4k+3)\cdot 5^{k+2}}{16}$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego se cumple para $n = k+1$, por lo tanto
$1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + ... + n \cdot 5^n = \frac{5+(4n-1)\cdot 5^{n+1}}{16}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Utilice el principio de Inducción para demostrar que la suma de cubos de tres números naturales consecutivos:

   $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   Indicación: Recuerde

   $$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

   En efecto:

   (1) Para $n = 1$, tenemos que, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, el cual es divisible por 9.

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   (2) Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir,

   $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ es divisible por 9,es decir existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9m$

   $\boxed{\text{1.5 punto.}}$

   Por demostrar que se cumple para $n = k+1$, es decir,

   $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ es divisible por 9

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

   Demostración: $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27$

   Ordenado los términos

   $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3) = 9m + 9(k^2 + 3k + 3) = 9(m + k^2 + 3k + 3)$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Observando el lado derecho de la igualdad tenemos:

Suma de números enteros es entero, así, $(m + k^2 + 3k + 3) \in \mathbb{Z}$ Luego $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ es múltiplo de 9.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por lo tanto, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{0.5 punto.}}$