

Control 8 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 28 Mayo, 2012

1. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 2x - 1$.

Determine $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y demuestre su conjetura.

Solución:

Conjetura: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

1 punto.

Demostración: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ tal que $|x - 2| < \delta$

2 puntos.

$$\implies |f(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2.5 puntos.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3.$$

0.5 punto.

2. Demuestre que el $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1}$, no existe.

Solución:

Primera forma: "Por contradicción".

Supongamos que existe el límite, es decir, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1} = L$.

0.5 punto.

Tenemos que: $\lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 3$.

0.5 punto.

y $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$.

0.5 punto.

Así, $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot \frac{(x + 2)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 3$.

2 puntos.

Usando álgebra de límites se tiene que:

$$3 = \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x - 1} = 0 \cdot L = 0.$$

2 puntos.

Contradicción,

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x - 1}$, no existe.

0.5 punto.

Segunda Forma:

Calculando límites laterales. **Primero:**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2}{x - 1},$$

0.5 punto.

tenemos que $x > 1$ luego $x + 2 > 0$ y $x - 1 > 0$

1 punto.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

1 punto.

Segundo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1},$$

0.5 punto.

tenemos que $x < 1$ luego $x+2 > 0$ y $x-1 < 0$

1 punto.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = -\infty.$$

1 punto.

Como ambos límites laterales son distintos, se concluye que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x-1}, \text{ no existe.}$$

1 punto.