Complemento Guia N°5

1. Si $[z]$ denota la parte entera de z, $z \in \mathbf{R}$, demuestre que $[x+y] \geq [x]+[y]$

2. ¿Cuándo $[z] = z$?

   Pruebe que si $n \in \mathbf{Z}$ entonces $[n+r] \geq n$. ¿Cuando se cumple la igualdad?

   Encuentre $z, r \in \mathbf{R}, r > 0$, de modo que $[z+r] < z$.

   Pruebe que si $[a] < b$ entonces $[a+c] < b+c$, para a, b, c números reales.

3. Sea A un subconjunto de $\mathbf{R}$. Denotamos por $-A$ al conjunto $\{-a \mid a \in A\}$.

   (a) Pruebe que si A es acotado superiormente, entonces $-A$ es acotado inferiormente.

   (b) Pruebe que todo conjunto acotado inferiormente, tiene ínfimo.

4. Sean $A = \mathbf{N}$; $B = -\mathbf{N}$; $C = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 9\}$ y $D = \{-5, -10\}$.

   Encuentre $A+B$, $A+C$, $B+C$, $A+D$ y $C+D$.

5. (a) Sea $A = \{x \mid x < \alpha\}$ para algún α real (fijo).
   Pruebe (todo fácil):
   (i) Si $x \in A$ e $y < x$, entonces $y \in A$.
   (ii) $A \neq \emptyset$.
   (iii) $A \neq \mathbf{R}$.
   (iv) Si $x \in A$, entonces existe $x' \in A$ tal que $x < x'$.

   (b) Recíprocamente, pruebe que si un conjunto A verifica las propiedades (i)-(iv), entonces $A = \{x \mid x < SupA\}$.

6. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. (Por ejemplo 10^{-50}). Demuestre que el conjunto $\{n\varepsilon \mid n \in \mathbf{N}\}$ no es acotado superiormente.

7. Sea $a_n, n \in \mathbf{N}$, una sucesión de reales positivos tales que $a_{n+1} \leq a_n/2$ para todo n.

   Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $a_n < \varepsilon$.

8. Encuentre el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:

$$\left\{\frac{n-3}{2n+5} \mid n \in \mathbf{N}\right\}; \quad \left\{\frac{3n+5}{4n+3} \mid n \in \mathbf{N}\right\}; \quad \left\{\frac{n+3}{2n-9} \mid n \in \mathbf{N}\right\};$$

$$\left\{\frac{n-5}{2n-9} \mid n \in \mathbf{N}\right\}; \quad \left\{(-1)^n - \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}.$$

9. Demuestre que $n\sqrt{2} + m$ es irracional cualesquiera sean n, m enteros.

10. Demuestre que $r\sqrt{2} + s$ es irracional cualesquiera sean r, s racionales.

11. Demuestre que si r, s son racionales, y l es irracional, entonces $(1-l)r+ls$ es irracional.

12. Demuestre que si a, b son reales con $a < b$ entonces $a < (1-l)a + lb < b$ para todo l real con $0 < l < 1$.

13. (a) Suponga que x, y son reales con $y - x > 1$. Demuestre que existe un entero k tal que $x < k < y$.

    (b) Suponga que x, y son reales con $x < y$. Demuestre que existe un número racional r tal que $x < r < y$. Indicación: existe un número natural q tal que $\frac{1}{q} < y - x$. ¿Porqué?

    (c) Suponga que r, s son racionales tales que $r < s$. Pruebe que existe un número irracional entre r y s. Indicación: Entre 0 y 1 existe un irracional. ¿Porqué? Y use los ejercicios anteriores.

    (d) Suponga que x, y son reales con $x < y$. Demuestre que existe un irracional entre x e y.

14. Se dice que un subconjunto A de los reales es **denso** en $\mathbf{R}$ si para todo intervalo $]x, y[= \{t \in \mathbf{R} \mid x < t < y\}$ existe $a \in A$ tal que $a \in]x, y[$.

    (a) Pruebe que los números racionales son densos en $\mathbf{R}$.

    (b) Pruebe que los números irracionales son densos en $\mathbf{R}$.

15. Sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbf{R}$ tal que $Inf(A) \notin A$.

    (a) Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

    $$Inf(A) < a < Inf(A) + \varepsilon.$$

    (b) Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ existen $a, b \in A$ tales que $\mid b - a \mid < \varepsilon$.

    (c) Pruebe que A tiene infinitos elementos.

16. Pruebe que si $A \neq \emptyset$ un subconjunto de $\mathbf{R}$ tal que $Sup(A) \notin A$, entonces A tiene infinitos elementos.

    ¿Es cierta la afirmación recíproca? ¿Cuál es la afirmación recíproca?

17. Sea $G \subset \mathbf{R}$ subconjunto propio ($G \neq \mathbf{R}$) con las siguientes propiedades:

    (i) $a, b \in G \Rightarrow a + b \in G$.

    (ii) $0 \in G$.

    (iii) $a \in G \Rightarrow -a \in G$.

    Defina $G_+ = \{g \in G \mid g > 0\}$ los elementos positivos de G.

    Sea $g = Inf(G_+)$.

    Hay dos posibilidades: $g > 0$ ó $g = 0$.

    (a) Encuentre $G \subset \mathbf{R}$ con las propiedades indicadas, de modo que $g > 0$.

    (b) Encuentre $G \subset \mathbf{R}$ con las propiedades indicadas, de modo que $g = 0$.

    (c) Pruebe que si $g > 0$ entonces $G = \{ng \mid n \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}g = g\mathbf{Z}$.

    (d) Pruebe que si $g = 0$ entonces G es denso en $\mathbf{R}$.

    (e) Pruebe que $\{n\sqrt{2} + m \mid n, m \in \mathbf{Z}\}$ es denso en $\mathbf{R}$.

    (f) Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}] < \varepsilon$.