

Pauta Control 4 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 16 Abril, 2012

1. Determine el coeficiente de x^{14} , en el desarrollo de: $(x + a)^{15} + (x - 2a)^{18}$.

Solución:

Para determinar el coeficiente de x^{14} , hay que calcular la suma de los coeficientes respectivos de x^{14} de los binomios involucrados.

1 punto.

De esta manera, para encontrar el coeficiente de x^{14} en el binomio,

$(x + a)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \cdot (x)^{15-k} \cdot (a)^k$, el valor de k debe ser tal que $15 - k = 14$, por lo tanto $k = 1$.

1.5 punto.

Así el coeficiente es $\binom{15}{1} \cdot a$.

0.5 punto.

De la misma forma, el coeficiente de x^{14} en el binomio,

$(x - 2a)^{18} = \sum_{j=0}^{18} \binom{18}{j} \cdot (x)^{18-j} \cdot (-2a)^j$, el valor de j debe ser tal que $18 - j = 14$, por lo tanto $j = 4$.

1.5 punto.

Así el coeficiente es $\binom{18}{4} \cdot (-2a)^4$.

0.5 punto.

Por lo tanto el coeficiente buscado está dado por: $\binom{15}{1} \cdot a + \binom{18}{4} \cdot (-2a)^4$.

1 punto.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, encuentre el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot (2x)^{3n-3k} \cdot (-8)^k.$$

Solución:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot (2x)^{3n-3k} \cdot (-8)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot ((2x)^3)^{n-k} \cdot (-8)^k.$$

2 punto.

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (8x^3)^{n-k} \cdot (-8)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (8x^3)^{n-k} \cdot (-8)^k - (8x^3)^{n-0} \cdot (-8)^0.$$

2 punto.

Así,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot (2x)^{3n-3k} \cdot (-8)^k = (8x^3 - 8)^n - (8x^3)^n.$$

2 punto.