Breve resumen

1 Deducción, inducción

En general, y en matemáticas en particular, hay afirmaciones generales y afirmaciones particulares.

Afirmaciones generales son:
- todo chileno y chilena tiene derecho a educación.
- Todos los números que terminan en 0 son divisibles por 5.

Afirmaciones particulares son:
- María tiene derecho a educación.
- 140 es divisible por 5.

Concluir afirmaciones particulares a partir de afirmaciones generales se llama **deducción**.

Por ejemplo:
- todo chileno y chilena tiene derecho a educación.
- María es chilena.
- María tiene derecho a educación.

Así, la afirmación particular "María tiene derecho a educación", ha sido deducida de la afirmación general "todo chileno y chilena tiene derecho a educación".

Pasar de afirmaciones particulares a una afirmación general se llama **inducción**. En este caso, se debe tener cuidado.

Veamos dos ejemplos.

- Como 140 es divisible por 5 entonces todo número de 3 dígitos es divisible por 5. Esto es evidentemente falso.

- Puesto que $n^2 + n + 41$ es un número primo para $n = 1, 2, 3, \cdots, 39$ (compruébelo) entonces n^2+n+41 es un número primo para todo número natural n. (Observe que para $n = 41$ no resulta un número primo: $41^2+41+41 = 41\times 43$).

Con estos ejemplos vemos que aunque muchos casos particulares sean verdaderos, una generalización a partir de ellos puede ser falsa.

Veamos otro ejemplo. Consideremos una afirmación que depende de $n \in \mathbf{N}$.

Por ejemplo, Af_n : "$n^2 + n$ es un número par". Y se desea saber si la afirmación Af_n es verdadera cualquiera sea el valor de $n \in \mathbf{N}$.

Hemos dicho que no sacamos nada con comprobar que la afirmación es verdadera para muchos valores de n Por ejemplo $Af_1 : 1^2 + 1 = 2$ es un número par. $Af_2 : 2^2 + 2 = 6$ es un número par. $Af_3 : 3^2 + 3 = 12$ es un número par. Y así sucesivamente, podríamos verificar que la afirmación Af_n es verdadera para $n = 4, 5, 6$, hasta 100 o más. ¿Significa esto que Af_n es verdadera para todo $n \in \mathbf{N}$?. La respuesta es no.

Un método para demostrar que Af_n es verdadera para todo $n \in \mathbf{N}$ es el Principio de Inducción.

2 Principio de inducción

Una forma válida de inferir una afirmación general a partir de afirmaciones particulares verdaderas es el Principio de Inducción.

Supongamos que se tiene una afirmación Af_n que depende de $n \in \mathbf{N}$.

El Principio de Inducción dice lo siguiente:

1) Si Af_1 es verdadera.

2) Si $Af_k \Rightarrow Af_{k+1}$ para algún $k \in \mathbf{N}$.

Entonces, la afirmación Af_n es verdadera para todo $n \in \mathbf{N}$.

Dicho de otra forma:
1) si verificamos que Af_1 es verdadera;
2) y si suponemos que para $n = k$ la afirmación es verdadera (Hipótesis de Inducción) , y con esto probamos que la afirmación es verdadera para $n = k+1$,
Entonces la afirmación es verdadera para todo $n \in \mathbf{N}$.

Consideremos la afirmación anterior Af_n : "$n^2 + n$ es un número par" y apliquemos el Principio de Inducción.

Veamos que Af_1 es verdadera. De hecho $1^2 + 1 = 2$ es un número par.

Supongamos ahora que para $n = k$ se tiene que $k^2 + k$ es un número par. (Es decir, estamos suponiendo que Af_k es verdadera). Esta es la hipótesis de inducción.

Con esto probemos que $(k + 1)^2 + k + 1$ es un número par.

Probando:
Tenemos que $\quad (k + 1)^2 + k + 1 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + k + 2(k + 1)$

Puesto que $k^2 + k$ es par (hipótesis de inducción) y $2(k+1)$ es par (todo múltiplo de 2 es par), y como la suma de número pares es par, se tiene que
$(k+1)^2 + k + 1 = k^2 + k + 2(k+1)$ es par.

El Principio de Inducción nos dice entonces que $n^2 + n$ es par para todo $n \in \mathbf{N}$.

3 Un ejemplo de inducción

Definamos

$$u_0 = 1, \;\; u_1 = u_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \;\; u_2 = u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}^2}, \cdots, \;\; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

y probemos que

$$Af_n : u_n = \frac{\sqrt{2}^{n+1} - 1}{\sqrt{2}^{n+1} - \sqrt{2}^n} \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Para probar esto usaremos entonces el Principio de Inducción.

1) Probemos primero para $n = 1$. Es decir, probemos que Af_1 es verdadera.

Por definición $u_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ahora calculemos $\frac{\sqrt{2}^{n+1}-1}{\sqrt{2}^{n+1}-\sqrt{2}^n}$ para $n = 1$.

$$\frac{\sqrt{2}^2 - 1}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}} = \frac{2-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esto prueba que la Af_1 es verdadera.

2) Ahora supongamos que Af_k es verdadera (hipótesis de inducción), y probemos Af_{k+1}.
Es decir: supongamos que

$$u_k = \frac{\sqrt{2}^{k+1} - 1}{\sqrt{2}^{k+1} - \sqrt{2}^k} \quad \text{(hipótesis de inducción)}$$

y probemos que

$$u_{k+1} = \frac{\sqrt{2}^{k+2} - 1}{\sqrt{2}^{k+2} - \sqrt{2}^{k+1}}$$

Probando:

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_k + \frac{1}{\sqrt{2}^{k+1}} \quad (\text{reemplazando} u_k) \\
&= \frac{\sqrt{2}^{k+1} - 1}{\sqrt{2}^{k+1} - \sqrt{2}^{k}} + \frac{1}{\sqrt{2}^{k+1}} \quad (\text{sumando}) \\
&= \frac{\sqrt{2}^{k+1}(\sqrt{2}^{k+1} - 1) + \sqrt{2}^{k+1} - \sqrt{2}^{k}}{\sqrt{2}^{k+1}(\sqrt{2}^{k+1} - \sqrt{2}^{k})} \quad (\text{simplificando por} \sqrt{2}^{k}) \\
&= \frac{2(\sqrt{2}^{k+1} - 1) + 2 - 1}{2(\sqrt{2}^{k+1} - \sqrt{2}^{k})} \\
&= \frac{\sqrt{2}^{k+2} - 1}{\sqrt{2}^{k+2} - \sqrt{2}^{k+1}}
\end{aligned}
$$

Esto termina la inducción. Hemos probado entonces que

$$u_n = \frac{\sqrt{2}^{n+2} - 1}{\sqrt{2}^{n+2} - \sqrt{2}^{n+1}} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}$$

Observe que aquí se ha usado propiedades de las potencias, que usted debe conocer bien.

Por ejemplo:

$$a^{n+m} = a^n a^m; \quad (a^n)^m = a^{nm}; \quad \sqrt{a}^n = a^{\frac{n}{2}}$$

4 Sumatorias

Recuerde que por definición del símbolo $\sum$ se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

O más general, si $n < m$,

$$\sum_{j=n}^{m} a_i = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m$$

De estas definiciones resultan algunas propiedades simples, que debe comprender bien.

- $$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=n}^{m} a_j &= a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j
\end{aligned}
$$

- $$\sum_{j=1}^{m} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=n+1}^{m} a_j$$

- $$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=n}^{m+1} a_j &= a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m + a_{m+1} \\ &= \textstyle\sum_{j=n}^{m} a_j + a_{m+1} \end{aligned}$$

- $$\sum_{j=n}^{m+1} (a_j + b_j) = \sum_{j=n}^{m+1} a_j + \sum_{j=n}^{m+1} b_j$$

- $$\sum_{j=n}^{m+1} \lambda a_j = \lambda \sum_{j=n}^{m+1} a_j$$

5 Algunas sumatorias para recordar

En clases hemos visto algunas fórmulas para sumatorias que se debe recordar y tener presentes.

Aquí van algunas.

- $$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

- $$\sum_{j=0}^{n} r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{suma geométrica}$$

- $$\sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a - 1 \quad \text{suma telescópica}$$

- $$\sum_{j=1}^{n} K = K + K + \cdots + K = nK$$

Recuerde que todas estas sumatorias deben adaptarse cuando los límites de las sumas cambian.

Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} r^j = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} - 1$$

6 Un ejemplo de sumatoria

Calcule

$$\sum_{j=0}^{5} (2 + j - 4 \times 3^j)$$

Calculando:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=0}^{5}(2 + j - 4 \times 3^j) &= \textstyle\sum_{j=0}^{5} 2 + \sum_{j=0}^{5} j - 4 \sum_{j=0}^{5} 3^j \\
&= 6 \times 2 + \tfrac{5 \times 6}{2} - 4 \tfrac{1-3^6}{1-3} \\
&= 12 + 15 + 2 \times (1 - 3^6)
\end{aligned}$$