Segunda Guia de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Marzo, 2012

1. Demuestre usando inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple:

   a) $2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

   b) $1 + 2 + 4 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$

   c) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{5}\left[1 - \frac{1}{(-4)^n}\right]$

   e) Los números de la forma $3^{2n} - 1$ son divisibles por 8

   f) Los números de la forma $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ son divisibles por 54

2. Conjeture fórmulas para las siguientes expresiones y luego demuéstrelas usando inducción.

   a) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^{2^2}) \cdots (1 + x^{2^n})$.

   b) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1})$.

3. Pruebe que

   $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdots (n + p - 1)$

   es divisible por p, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

4. Determine si cada una de las siguientes sumas son verdaderas o falsas.

   a)
   $$\sum_{n=0}^{100}(n + 1)^2 = \sum_{i=0}^{99} i^2$$

b)

$$\sum_{k=1}^{100} k^3 = (\sum_{k=1}^{100} k^2)(\sum_{k=1}^{100} k)$$

c)

$$\sum_{k=0}^{100} (2+k) = 2 + \sum_{k=1}^{100} k$$

d)

$$\sum_{k=0}^{100} 2 = 200$$

5. Calcule las siguientes sumas.

a)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k^2+5k+6}$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

6. Demuestre las siguientes igualdades usando las propiedades de las sumatorias.

a)

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}[1-(n+1)r^n + nr^{n+1}], \quad r \neq 1$$

c)

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1}k^2 = (n+1)(2n+1)$$

d)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{1+k^2+k^4} = 1 - \frac{1}{1+n+n^2}$$

7. Calcule el valor de las siguientes sumas.

a)
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}7^i$$

b)
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}7^k$$

c)
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}7^n$$

d)
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{n}(k+2i)$$

e)
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{2^j}{3^k}\right)$$

f)
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{7}(2i^2k-20)$$