

# Complemento Guia N2

## Con corrección

### 1 Sumas

1. Escriba las siguientes sumas con símbolo de sumatoria:

- $$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1}$$
- $$\frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{5}{6^5} + \cdots + \frac{10}{11^{10}}$$
- $$\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{4} + 4 + \cdots + \frac{1}{20} + 20$$
- $$3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 21$$

2. Verifique las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_j = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{j+1}; \quad \sum_{j=1}^{j=8} (2j-1) = \sum_{j=0}^{j=7} (2j+1); \quad \sum_{i=n}^{i=m} i r^i = \sum_{k=0}^{k=m-n} (k+n) r^{k+n}$$

3. Verifique la igualdad:

$$\sum_{j=n}^{j=m} a_j = \sum_{j=1}^{j=m} a_j - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_j \quad \text{donde } 2 \leq n < m.$$

4. Calcule las siguientes sumas

$$\sum_{k=1}^{k=45} (2k^2 - 3k + 2); \quad \sum_{l=5}^{l=10} (5l^3 - 2^l + \frac{4}{l(l+1)})$$

Indicación: recuerde las propiedades de  $\sum$  y recuerde sumas telescópicas y geométricas.

## 2 Suma telescópica

1. Calcule

$$\sum_{j=0}^{j=12} \frac{k-1}{(k+1)(k+2)}$$

Observe que  $\frac{k-1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2}$

2. Calcule

$$\sum_{j=5}^{j=15} \frac{k-1}{(k+1)(k+2)}$$

3. Calcule

$$\sum_{j=1}^{j=10} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

Indicación: Separe  $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$  en una diferencia de fracciones.

4. Encuentre una fórmula (que depende de  $n$ ) para calcular la suma

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

## 3 Suma geométrica

1. Calcule la suma

$$\sum_{j=0}^{j=n} (r^j - r^{j+1})$$

de dos formas distintas.

Como suma telescópica; y usando propiedades de  $\sum$ .

Para esto, observe que  $r^j - r^{j+1} = r^j(1-r)$ .

De esto deduzca que

$$\sum_{j=0}^{j=n} r^j = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

2. Calcule

$$\sum_{j=1}^{j=5} 2^j; \quad \sum_{j=5}^{j=7} 3^j; \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

3. Demuestre que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2 \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}$$

Indicación: use la fórmula obtenida para una suma geométrica.

## 4 Sucesiones recursivas

1. Se define la sucesión  $u_n, n \in \mathbf{N}$ , por la relación  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ .

Demuestre que

$$u_n + 1 = 2^{n-1}(u_1 + 1) \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}$$

2. La sucesión  $a_n, n \in \mathbf{N}$ , se define por

$$4 = \frac{3}{a_1} = a_1 + \frac{3}{a_2} = a_2 + \frac{3}{a_3} = \dots$$

Pruebe que

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 3}{3^{n+1} - 1} \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}$$

3. Defina  $v_1 = v_2$  y  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$  para todo  $n \geq 3$ .

Pruebe que  $\sum_{j=1}^n v_j = v_{n+2} - 1$ .

4. Defina  $v_0 = 2$ ,  $v_1 = 3$  y

$$v_{n+1} = 3v_n - 2v_{n-1}.$$

Pruebe que

$$v_n = 2^n + 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Se necesita probar para  $n = 0$  y  $n = 1$ ; y suponer verdadero para  $n = k-1$  y  $n = k$ . Y luego probar para  $n = k+1$ .

Es decir, para la hipótesis de inducción se necesita suponer la fórmula válida para dos subíndices naturales consecutivos. La inducción estandar no resulta.

5. Defina  $u_0 = 1, u_1 = 4$  y  $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$  para todo  $n \geq 2$ .

Pruebe que

$$u_n = 3n + 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}.$$

6. Se dice que una sucesión  $a_n, n \in \mathbf{N}$ , tiene la propiedad  $\mathcal{S}$  si verifica la relación  $\mathcal{S} : a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$  para todo  $n \geq 3$  donde  $\alpha^2 + 4\beta$  es positivo.

Demuestre que existen dos números reales  $\lambda_1, \lambda_2$  tales que las sucesiones  $a_n = \lambda_1^n$  y  $b_n = \lambda_2^n$  tienen la propiedad  $\mathcal{S}$ .