Complemento Guia N2

Con corrección

1 Sumas

1. Escriba las siguientes sumas con símbolo de sumatoria:

   - $$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}$$
   - $$\frac{3}{4^3}+\frac{4}{5^4}+\frac{5}{6^5}+\cdots+\frac{10}{11^{10}}$$
   - $$\frac{1}{2}+2+\frac{1}{3}+3+\frac{1}{4}+4+\cdots+\frac{1}{20}+20$$
   - $$3-4+5-6+\cdots+21$$

2. Verifique las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_j = \sum_{j=0}^{j=n-1} a_{j+1}; \qquad \sum_{j=1}^{j=8}(2j-1) = \sum_{j=0}^{j=7}(2j+1); \qquad \sum_{i=n}^{i=m} ir^i = \sum_{k=0}^{k=m-n}(k+n)r^{k+n}$$

3. Verifique la igualdad:

$$\sum_{j=n}^{j=m} a_j = \sum_{j=1}^{j=m} a_j - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_j \quad \text{donde} \quad 2 \leq n < m.$$

4. Calcule las siguientes sumas

$$\sum_{k=1}^{k=45}(2k^2-3k+2); \qquad \sum_{l=5}^{l=10}(5l^3-2^l+\frac{4}{l(l+1)})$$

   Indicación: recuerde las propiedades de $\sum$ y recuerde sumas telescópicas y geométricas.

2 Suma telescópica

1. Calcule
$$\sum_{j=0}^{j=12} \frac{k-1}{(k+1)(k+2)}$$
Observe que $$\frac{k-1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2}$$

2. Calcule
$$\sum_{j=5}^{j=15} \frac{k-1}{(k+1)(k+2)}$$

3. Calcule
$$\sum_{j=1}^{j=10} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$
Indicación: Separe $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ en una diferencia de fracciones.

4. Encuentre una fórmula (que depende de n) para calcular la suma
$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

3 Suma geométrica

1. Calcule la suma
$$\sum_{j=0}^{j=n} (r^j - r^{j+1})$$
de dos formas distintas.
Como suma telescópica; y usando propiedades de $\sum$.
Para esto, observe que $r^j - r^{j+1} = r^j(1-r)$.
De esto deduzca que
$$\sum_{j=0}^{j=n} r^j = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

2. Calcule
$$\sum_{j=1}^{j=5} 2^j; \quad \sum_{j=5}^{j=7} 3^j; \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$$

3. Demuestre que
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}$$
Indicación: use la fórmula obtenida para una suma geométrica.

4 Sucesiones recursivas

1. Se define la sucesión $u_n, n \in \mathbf{N}$, por la relación $u_{n+1} = 2u_n + 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

   Demuestre que

   $$u_n + 1 = 2^{n-1}(u_1 + 1) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}$$

2. La sucesión $a_n, n \in \mathbf{N}$, se define por

   $$4 = \frac{3}{a_1} = a_1 + \frac{3}{a_2} = a_2 + \frac{3}{a_3} = \cdots$$

   Pruebe que

   $$a_n = \frac{3^{n+1} - 3}{3^{n+1} - 1} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbf{N}$$

3. Defina $v_1 = v_2$ y $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ para todo $n \geq 3$.

   Pruebe que $\sum_{j=1}^{n} v_j = v_{n+2} - 1$.

4. Defina $v_0 = 2, \;\; v_1 = 3$ y

   $$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}.$$

   Pruebe que

   $$v_n = 2^n + 1 \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

   Se necesita probar para $n = 0$ y $n = 1$; y suponer verdadero para $n = k-1$ y $n = k$. Y luego probar para $n = k + 1$.

   Es decir, para la hipótesis de inducción se necesita suponer la fórmula válida para dos subíndices naturales consecutivos. La inducción estandar no resulta.

5. Defina $u_0 = 1, u_1 = 4$ y $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

   Pruebe que

   $$u_n = 3n + 1 \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

6. Se dice que una sucesión $a_n, n \in \mathbf{N}$, tiene la propiedad $\mathcal{S}$ si verifica la relación $\mathcal{S} : a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ para todo $n \geq 3$ donde $\alpha^2 + 4\beta$ es positivo.

   Demuestre que existen dos números reales λ_1, λ_2 tales que las sucesiones $a_n = \lambda_1^n$ y $b_n = \lambda_2^n$ tienen la propiedad $\mathcal{S}$.