Inducción

1 Deducción, inducción

En general, y en matemáticas en particular, hay afirmaciones generales y afirmaciones particulares.

Afirmaciones generales son:
- todo chileno y chilena tiene derecho a educación.
- Las diagonales de todo paralelógramo se cortan en su punto medio.
- Todos los números que terminan en 0 son divisibles por 5.

Afirmaciones particulares son:
- María tiene derecho a educación.
- las diagonales del cuadrado ABCD se cortan en su punto medio.
- 140 es divisible por 5.

Concluir afirmaciones particulares a partir de afirmaciones generales se llama **deducción**.

Por ejemplo:
- todo chileno y chilena tiene derecho a educación.
- María es chilena.
- María tiene derecho a educación.

Así, la afirmación particular “María tiene derecho a educación”, ha sido deducida de la afirmación general “todo chileno y chilena tiene derecho a educación”.

Pasar de afirmaciones particulares a una afirmación general se llama **inducción**.
En este caso, se debe tener cuidado.
Veamos dos ejemplos.

- 140 es divisible por 5.
- Todo número que termina en 0 es divisible por 5.

- 140 es divisible por 5.
- Todo número de 3 dígitos es divisible por 5.

Con el segundo ejemplo vemos que debemos tener mucho cuidado al inducir afirmaciones generales a partir de información particular.

2 Cuidado con la inducción

1. $n^2 + n + 41$ es un número primo para todo $n \in \mathbf{N}$.

   Sucede que $n^2 + n + 41$ es primo para $n = 1, 2, 3, \cdots, 39$ pero no es primo para $n = 40$. De hecho, $40^2 + 40 + 41 = 41^2$.

   Por lo demas, es claro que para $n = 41$ queda un número divisible por 41.

2. Consideremos las factorizaciones del binomio $x^n - 1$ para números naturales n.

   $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

   $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

   $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

   $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + 1)$

   $x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1)$

   Observando estas factorizaciones se conjeturaba que en las factorizaciones de $x^n - 1$ los coeficientes siempre serían $-1, 0$ o 1.

   Todos los intentos de probar esto no resultaban. Hasta que el matemático V.K.Ivanov mostró que para $n = 105$ el binomio $x^{105} - 1$ tiene un factor de la forma

   $x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1.$

3. Los números de la forma $2^{2^n} + 1$ son primos para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

   Leonard Euler en el siglo XVIII mostró que

   $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$ no es primo.

4. G.W. Leibniz en el siglo probó que

   $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo $n \in \mathbf{N}$

   $n^5 - n$ es divisible por 5 para todo $n \in \mathbf{N}$

   $n^7 - n$ es divisible por 7 para todo $n \in \mathbf{N}$

   De aquí, por algún tiempo intentó demostrar que para cualquier número impar k se tiene que:

   $n^k - n$ es divisible por k para todo $n \in \mathbf{N}$.

   Sin embargo, más tarde probó que

   $2^9 - 2 = 510$ no es divisible por 9.

5. ¿Es el número $991n^2 + 1$ un cuadrado perfecto para algún $n \in \mathbf{N}$?

   Si intentamos para distintos valores de n nunca encontraremos un cuadrado perfecto. Podríamos estar un año buscando un cuadrado perfecto para distintos valores de n y nunca lo encontraríamos. Nos inclinaríamos entonces a pensar que nunca es un cuadrado perfecto. Pero cuidado, el computador encontró que para

   $$n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767$$

   el número $991n^2 + 1$ es un cuadrado perfecto.

6. En el espacio considere n planos que pasan por un mismo punto sin que nunca tres de ellos contengan una misma recta. ¿En cuántas partes separan al plano estos n planos?

   Para $n = 1$ se tiene que un plano divide al espacio en $2 = 2^1$ partes.

   Para $n = 2$ se tiene que dos planos dividen al espacio en $4 = 2^2$ partes.

   Para $n = 3$ se tiene que tres planos dividen al espacio en $8 = 2^3$ partes.

   ¿Puede inferir una fórmula general?

   (Solución: n planos como indicado arriba separan al espacio en $n(n-1)+2$ partes).

3 Principio de inducción

4 Inducciones interesantes

1. Pruebe que $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9.

   Se necesita hacer una doble inducción.

2. Definamos $v_0 = 2, \;\; v_1 = 3$ y

   $$v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}.$$

   Pruebe que

   $$v_n = 2^n + 1 \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

   Se necesita probar para $n = 0$ y $n = 1$; y suponer verdadero para $n = k-1$ y $n = k$.

   Es decir, para la hipótesis de inducción se necesita suponer la fórmula para dos naturales consecutivos.

3. ¿Para qué valores de $n \in \mathbf{N}$ se tiene que $2^n > 4n$?

   Aquí la inducción parte en $n = 5$.

4. Pruebe que la suma de los ángulos interiores de un n-gono, $n \geq 3$, (no necesariamente convexo) es igual a $180°(n-2)$.

   En este ejercicio se necesita probar primero que todo polígono tiene alguna diagonal (contenida en su interior). Lo cual, si se desea, puede suponerse verdadero (aunque no es difícil probarlo). Y luego usando inducción probar la fórmula para $n = 3$ y usar como hipótesis de inducción la validez de la fórmula para TODO n de 1 a k. (Y probar para $n = k + 1$ por supuesto).

5. ¿En cuántos triángulos puede ser dividido un n-gono, $n \geq 3$, (no necesariamente convexo) por diagonales que no se intersectan?

   Solución: $n - 2$. Para probar por inducción, al igual que en el ejercicio anterior se necesita suponer la validez para todo $n = 1, 2, \cdots, k$.

6. Demuestre que todo cantidad mayor que 7 lucas se puede pagar con billetes de 3 lucas y billetes de 5 lucas.

5 Referencias

1. I.S. Sominski, Metodo de inducción matemática, Lecciones populares de matemática, Editorial Mir, 1975.