

Introducción

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile**

I

Índice general

I. INTRODUCCION	1
I.1. UNIDADES	2
I.1.1. Introducción	2
I.1.2. Tiempo	2
I.1.3. Longitud	4
I.1.4. Masa	6
I.2. ANALISIS DIMENSIONAL	7
I.3. FISICA, MATEMATICAS Y COMPUTACION	10
I.4. EL ARTE DE LAS ESTIMACIONES	10
I.5. EJERCICIOS	12

Capítulo I

INTRODUCCION

Las Ciencias Naturales engloban diversas disciplinas, entre las cuales se encuentran la Física, la Biología, la Química y la Astronomía; sin que esta lista sea exhaustiva. Cada una de ellas estudia determinados fenómenos que ocurren en la naturaleza, ya sea a través de su *observación directa* o mediante experimentos llevados a cabo en forma *sistemática* en el laboratorio.

Ciertamente, estas divisiones no son esenciales en ciencia y solamente indican grados de especialización. En algunos casos, el mismo fenómeno puede concitar simultáneamente el interés de científicos de diversas disciplinas. Por ejemplo, el estudio de los objetos que presentan una evolución caótica en el tiempo, interesan simultáneamente a los Físicos y a los Matemáticos. De igual modo, la determinación de la estructura del ácido desoxirribonucleico (ADN) –la molécula portadora de la información genética en animales y vegetales–, fue el resultado del esfuerzo conjunto de biólogos, químicos, bioquímicos y físicos.

Quienes tienen como oficio el estudio de las distintas manifestaciones de la naturaleza se les denomina científicos. Para algunos de ellos, los denominados teóricos, su labor consiste en inventar esquemas lógicos que permitan explicar las observaciones realizadas con un mínimo de suposiciones y además, en forma simultánea, *predecir* la existencia de nuevos fenómenos. Otro grupo prefiere desarrollar su labor en un laboratorio comprobando si las predicciones aventuradas en alguna teoría refleja realmente la forma en que opera la naturaleza. También pueden preferir estudiar un fenómeno diferente, guiados por su propia intuición y al cual consideran de gran interés.

La elaboración de un esquema lógico, acompañado de un lenguaje matemático, recibe el nombre de teoría. Las predicciones de una teoría deben ser verificadas *experimentalmente* con una rigurosidad tal, que basta *una* observación o predicción que no concuerde

con lo medido, para su modificación o descarte.

El desarrollo de una teoría es un proceso largo y complejo que toma normalmente años y la contribución de muchos investigadores. Sin embargo, siempre en alguna etapa de su evolución destacan figuras de gran capacidad intelectual cuyo aporte ha significado una revolución para su época. En Física, ese ha sido el caso de Nicolás Copérnico (1473-1543), Galileo Galilei (1564-1642), Isaac Newton (1643-1727), Albert Einstein (1879-1955) y Niels Böhr (1885-1962), entre otros.

Desde su origen como disciplina científica, hace aproximadamente cuatrocientos años, la Física ha acumulado una enorme cantidad de conocimientos y para manejar una fracción de ese material, se requiere recorrer un largo camino. Esperamos que el estudio de los aspectos básicos de la mecánica inventada por Newton –que constituye el contenido de este curso–, marque el comienzo de este trayecto.

I.1. UNIDADES

I.1.1. Introducción

Las leyes de la Física son relaciones entre propiedades de la materia medibles en un laboratorio tales como: longitud, tiempo, masa, temperatura, energía, etc. Consecuentemente, es necesario contar con *unidades* o patrones de medida, que permitan cuantificar esas magnitudes. Por ejemplo, medir la distancia entre dos puntos ubicados sobre una recta, significa comprobar el número de veces que una varilla patrón –elegida arbitrariamente como la unidad de longitud– está contenida en el trazo que conecta dichos puntos. Si el resultado es 3, se dice que la distancia entre los puntos es igual a 3 unidades de longitud.

El valor de una propiedad física cualquiera debe indicar la unidad que se ha utilizado como patrón. Por ejemplo, si en el caso anterior se hubiera usado el metro como unidad de medida, la distancia se expresaría como 3 metros.

La mayor parte de las unidades que se utilizan corrientemente se pueden expresar como combinación de un grupo reducido de ellas, llamadas *unidades fundamentales*. En el *Sistema Internacional (SI)*, las más conocidas son: el *metro*, el *kilógramo* y el *segundo*. Otras magnitudes, tales como la energía, el momentum lineal, la fuerza, etc., poseen unidades que se expresan en función de este conjunto fundamental.

En este libro usaremos el Sistema Internacional de Unidades en la mayoría de los ejemplos y ejercicios propuestos.

I.1.2. Tiempo

El **segundo** (s) fue definido originalmente como la $1/86400$ -ava parte de un día solar medio (esto es, el tiempo entre dos pasos sucesivos del Sol por el cenit, promediado a

lo largo de un año). La definición moderna de un segundo es más precisa, pero tiene la desventaja de ser más difícil de explicar en base a conceptos básicos. La incluimos aquí como una información cuyo sentido aparecerá claro más adelante.

El **segundo** se define como el tiempo que debe transcurrir para detectar $9,192631770 \times 10^9$ ciclos (o vibraciones) consecutivas en la luz proveniente de una transición hiperfina entre dos estados permitidos de un átomo de Cesio.

En la actualidad, el patrón o unidad de tiempo se puede determinar con gran precisión. El segundo se puede medir, sin error, con doce cifras significativas. Con el objeto de aprovechar este enorme progreso, se ha definido la unidad de longitud (el metro) en base al segundo. Para ello debemos previamente *definir* la velocidad de la luz. Esta decisión no genera problema alguno, puesto que la velocidad de la luz es una constante universal. Obviamente, el valor usado no altera las unidades previamente establecidas. Este es:

$$c \equiv \text{velocidad de la luz} = 299.792.458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right],$$

Combinando la definición de un segundo y la velocidad de la luz, obtenemos la unidad de longitud: el *metro*, con un grado de precisión equivalente al del segundo. En este contexto, el metro se define como la distancia que recorre la luz en el espacio vacío durante $1/299,729,458$ segundos.

Note que, como el valor de la velocidad de la luz fue *definido*, no puede contener error de medición.

Revisemos como ha ido mejorando la precisión en la determinación de la unidad de tiempo a través de este siglo.

Hasta hace algunas décadas, la rotación diaria de la Tierra con respecto al sol, se utilizaba para definir el largo del día (*día solar*) y a partir de este intervalo se definía el segundo medio. Los relojes se ajustaban de manera de seguir lo más exactamente posible el largo del día solar.

El *día sideral* se determina midiendo el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de una estrella muy brillante a través del meridiano del observatorio astronómico.

Cuando la exactitud alcanzada en la medida del tiempo mejoró, fue posible preguntarse si efectivamente la duración del día era una constante a través del tiempo o sufría pequeñas variaciones. La duda se originó del siguiente modo. En 1936, los relojes de péndulo alcanzaron una precisión de *una parte en 10^8* y así se logró establecer que el largo del día en el mes de Enero de ese año *excedió* al de Julio por, aproximadamente *5 milisegundos*.

Más adelante, con la aparición de los relojes atómicos que alcanzan una precisión de una parte en 10^{12} ó 10^{13} , quedó absolutamente claro que la duración del día variaba en forma *compleja* con componentes periódicos anuales, semianuales, con el período de la Luna e incluso durante el transcurso de una *noche* con amplitudes del orden de las *décimas* de milisegundo.

El fenómeno de El Niño ocurrido en 1982 - 1983, marcó un máximo notable en el largo del día, con un aumento de hasta 30 milisegundos sobre el valor promedio, durante el mes de marzo de 1983.

I.1.3. Longitud

Las unidades siempre se definen en forma arbitraria. El criterio empleado para elegir las es, entre otros, facilidad de reproducción y maniobrabilidad.

Un ejemplo de esta arbitrariedad es la existencia de diferentes unidades de longitud: el metro, la pulgada, el pie, la yarda, la milla...etc.

El metro (m) fue originalmente definido como la distancia que separa a dos marcas grabadas sobre una barra fabricada de una aleación de platino e iridio, que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia*. La elección fue hecha de manera que la distancia entre el Ecuador y el Polo Norte, medida a lo largo del meridiano que pasa por París fuera exactamente 1×10^7 metros.

Esta última afirmación nos hace meditar acerca de la necesidad de una nueva unidad de longitud, más precisa y más fácil de repetir que la recién definida. Es difícil pensar en obtener una precisión del orden de una parte en 10^7 al medir una distancia tan grande, esto sin mencionar que fue realizada con los medios disponibles durante el siglo pasado.

En la actualidad el metro se define como:

Un metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío en $1/299.792.458$ segundos.

A continuación se muestra una lista con distancias y tamaños de diversos objetos. Se incluyen las unidades usadas en astronomía.

OBJETO	DISTANCIA
Tamaño del Universo	10^{26} m
Galaxia Andrómeda	$6,5 \times 10^5$ parsec $\approx 2 \times 10^{22}$ m
1 parsec $\equiv$ 1 pc	$3,086 \times 10^{16}$ m = $6,48 \times 10^5 / \pi$ A.U.
Unidad Astronómica = 1 A.U.	$1,49597892 \times 10^{11}$ m
α -Centauri (estrella más cercana)	1,3 pc
Vega (estrella brillante)	8,1 pc
Diámetro de nuestra Galaxia	3×10^4 pc
Dist. Sol–Centro de la Galaxia	9×10^3 pc
1 Año Luz	$9,4605 \times 10^{15}$ m
Distancia Sol – Tierra	1 A.U.
Radio del Sol	$6,9599 \times 10^8$ m
Distancia Tierra–Luna	$3,84 \times 10^8$ m
Radio de la Tierra	$6,37817 \times 10^6$ m
Radio de la Luna	$1,738 \times 10^6$ m
Grano de Sal	10^{-3} m
Virus	10^{-7} m
Radio de un Atomo	10^{-12} m
Radio del Núcleo Atómico	10^{-15} m

Una característica importante del sistema internacional *SI* es su estructura decimal: las unidades más grandes se definen como potencias de diez de las unidades más pequeñas. Por ejemplo, 1 kilómetro $\equiv 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, 1 m $= 10^2$ centímetros $\equiv 10$ milímetros $\equiv 10 \text{ mm}$, 1 mm $= 10^{-3} \text{ m}$.

En la siguiente Tabla se indican los nombres de las potencias de diez más utilizadas en la literatura científica.

TABLA

Potencia	Prefijo	Abreviación
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	deca	de
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f

Conviene mencionar también un sistema de unidades no decimal cuyo uso está prácticamente restringido a los Estados Unidos: el *Sistema Técnico Inglés*. Su unidad fundamental de longitud es la **pulgada** $= 2,54 \text{ cm}$, cuyas equivalencias son 1 *pie* $= 12$ pulgadas $= 1/3$ yarda $\simeq 0.3048 \text{ m}$.

I.1.4. Masa

El **kilógramo** (*kg*) se define como la masa de un cierto cilindro de Platino e Iridio que se guarda en la oficina *Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia*. Un kilógramo es aproximadamente igual a la masa de 1000 centímetros cúbicos de agua, a una temperatura de aproximadamente 4°C , donde su densidad alcanza el valor máximo.

Ejemplos de unidades del Sistema Internacional expresadas en base a las unidades fundamentales son: fuerza, $1 \text{ newton} \equiv 1 N = 1 \text{ kg m/s}^2$ y la unidad de energía, $1 \text{ joule} \equiv 1 J = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$.

Cuando nuestro estudio se extienda a áreas de la física, más allá de la mecánica, necesitaremos agregar otras unidades fundamentales. En el sistema internacional (SI) estas son: la unidad de temperatura (el grado Kelvin, °K), la unidad de intensidad luminosa (la candela (cd)), la unidad de corriente eléctrica (el Ampère (A)) y el mol de sustancia ($N_A \equiv \text{Número de Avogadro} = 6,022137 \times 10^{23}$ partículas).

I.2. ANALISIS DIMENSIONAL

En una expresión algebraica, las unidades son tratadas de la misma manera que la propiedad a la cual acompañan. Por ejemplo, si en una ecuación una cantidad es sumada, restada, dividida o multiplicada por otra, lo mismo acontece con las unidades asociadas a ellas. Para ilustrar esto, consideremos la distancia que recorre un objeto, inicialmente en reposo, cuando es sometido a una aceleración constante $a = 2 \text{ m/s}^2$ durante 0,1 horas. Dicha distancia d se calcula mediante la siguiente expresión:

$$d = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \left(0,1 \text{ hora} \times 3600 \frac{\text{s}}{\text{hora}} \right)^2 = 129,600 \text{ m} = 129,6 \text{ km},$$

aquí, la aceleración se ha multiplicado por un factor que tiene dimensiones de $(\text{tiempo})^2$. En la segunda igualdad se realiza la conversión de horas a segundos y en esa operación, las unidades son tratadas como una cantidad algebraica.

Conviene recalcar que cuando se suman o restan términos en una ecuación, todos ellos deben tener la misma dimensión y estar expresados en las mismas unidades. Así por ejemplo, si v es una velocidad y t es el tiempo, la siguiente ecuación está *dimensionalmente incorrecta*:

$$y = v t + v t^2$$

pues, el término $[v t]$, tiene dimensiones de $[\text{longitud}/\text{tiempo}] \times [\text{tiempo}] = [\text{longitud}]$, en tanto que las dimensiones de $[v t^2]$ son $[\text{longitud}/\text{tiempo}] \times [(\text{tiempo})^2] = [\text{longitud}] \times [\text{tiempo}]$.

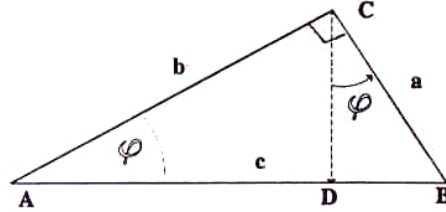
A menudo el análisis dimensional permite detectar errores de cálculo. Por ejemplo, si la propiedad que está siendo evaluada es la energía, el resultado debe tener dimensiones de $\text{masa} \times (\text{velocidad})^2$ (en el Sistema Internacional de Unidades, $\text{kg} \times (\text{m/s})^2$). Análogamente, al evaluar un área, el resultado debe tener dimensiones de $(\text{longitud})^2$. Si esta condición no se cumple, significa que existe un error en el cálculo.

Ejemplo

Recordemos que para construir un triángulo basta conocer un lado y dos de los ángulos adyacentes a él. Con estos datos el triángulo queda totalmente determinado.

Usando este hecho y el análisis dimensional, compruebe el Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$.

Como en este caso se trata de un triángulo rectángulo, sólo necesitamos conocer un lado y uno de sus ángulos adyacentes, puesto que el restante es el complemento del anterior. Por otra parte, sabemos que el área de un triángulo debe tener las dimensiones de longitud al cuadrado.



Es posible entonces escribir una fórmula para el área de un triángulo rectángulo, de la siguiente forma:

$$\text{Area del triángulo } \triangle ABC \equiv A_c = c^2 f(\varphi),$$

donde c es el lado del triángulo rectángulo y φ es el ángulo adyacente. Esta fórmula no especifica la función $f(\varphi)$ y sólo se sabe que debe ser una cantidad adimensional, de acuerdo a los resultados de esta sección.

Además, debe ser una *fórmula de validez general*, puesto que a partir de esos dos elementos: c y φ , el triángulo rectángulo queda determinado, es único, y por lo tanto su área debe depender solamente de estos dos valores, de forma que al variar uno de ellos, se modifica el triángulo y, en consecuencia, cambia el valor de su área.

Si Ud. recuerda sus cursos de geometría, probablemente conoce de varias fórmulas para determinar el área de un triángulo, siendo la más simple, y por ello la más usada, el producto de la altura por la base dividido por dos. La fórmula propuesta más arriba es sin duda una de las expresiones menos usadas para evaluar el área de un triángulo.

Como es una expresión general, se aplica también al triángulo $\triangle ACD$, con la misma función $f(\varphi)$. Más aún, también es válida para el triángulo $\triangle CBD$. En resumen,

$$\text{Area } \triangle ACD \equiv A_b = b^2 f(\varphi), \quad \text{Area } \triangle CBD \equiv A_a = a^2 f(\varphi),$$

y como el área del triángulo ABC , A_c , es la suma de las áreas A_a y A_b , se obtiene que:

$$A_c = A_a + A_b \implies c^2 f(\varphi) = a^2 f(\varphi) + b^2 f(\varphi) \implies c^2 = a^2 + b^2.$$

Ahora es fácil determinar la función $f(\varphi)$ usando la fórmula usual para el área de un triángulo:

$$c^2 f(\varphi) = \frac{a b}{2} \implies f(\varphi) = \frac{a b}{2 c^2} = \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi}{2}. \square$$

Ejercicio

Una pelota se lanza con velocidad horizontal v , desde una altura H , medida desde la superficie de la Tierra. La distancia horizontal que recorre la pelota hasta el momento en que choca contra el suelo es R . Se sabe que la partícula se mueve bajo la acción de la aceleración de gravedad $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Usando análisis dimensional encuentre una expresión para R en función de H , v y g .

Ejercicio

Unidades Geometrizadas. A partir de las constantes universales de gravitación G , de la velocidad de la luz en el espacio vacío c , y de Planck h , es posible construir unidades fundamentales de longitud L^* , masa M^* y tiempo t^* .

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \right], \quad c = 2,9979 \times 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad h = 6,6261 \times 10^{-34} \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \right].$$

Construya las unidades L^* , M^* y t^* , combinando adecuadamente las constantes universales mencionadas.

Ejercicio

Un experimentador encuentra que en ciertas condiciones la altura de un cuerpo sobre la superficie de la tierra varía con el tiempo t , de acuerdo a la ecuación:

$$z(t) = a + b t + c t^2$$

- i) ¿Qué dimensiones tienen las constantes a , b y c ?
- ii) ¿Cuál es el significado físico de cada una de estas constantes?

I.3. FÍSICA, MATEMÁTICAS Y COMPUTACION

La Geometría es una herramienta importante en la formulación y análisis de los problemas que nos interesa estudiar en física, así como también lo es el cálculo diferencial. De hecho, este último fue desarrollado por Newton –simultáneamente con Leibnitz–, para expresar sus leyes en forma precisa. Al final del libro hemos incluido un complemento matemático donde repasamos brevemente los conceptos básicos de trigonometría y nociones de series, haciendo énfasis en las aproximaciones y en el cálculo del área encerrada bajo una curva, que son los procedimientos más requeridos en física.

Al final de esta sección se incluye un conjunto de ejercicios relacionados con esta materia.

La definición de derivada se incorporó junto con la introducción de velocidad, en el segundo capítulo.

Con respecto a las ciencias de la computación, es claro que en los últimos veinte años, la investigación, la ingeniería y la enseñanza han sido paulatinamente influenciadas por ella. Su impresionante desarrollo ha permitido resolver problemas muy importantes de Física e Ingeniería y continúa abriendo nuevas líneas de investigación en diferentes áreas del conocimiento. El computador se ha transformado en una herramienta de trabajo esencial en casi todos los aspectos de la sociedad moderna. En particular, aquellos problemas científicos o tecnológicos que se tornan muy difíciles o imposibles de resolver por métodos analíticos, pueden normalmente ser abordados numéricamente.

A pesar de la importancia del cálculo numérico en ciencia, será tratado ocasionalmente durante este curso introductorio.

I.4. EL ARTE DE LAS ESTIMACIONES

Cerramos este capítulo con un ejemplo cuyo planteamiento es diferente a lo usual. Resolveremos un problema estimando, con nuestro criterio, los valores de los datos necesarios para la resolución.

Este tipo de ejercicios fueron popularizados por Enrico Fermi (1901-1954) (Premio Nobel en 1938), destacado físico de origen italiano, dotado de una habilidad innata para encontrar respuestas aproximadas a problemas complejos, sin recurrir a cálculos elaborados.

Lo que se pretende es obtener una respuesta para un problema determinado, cuya solución exacta, de existir, requeriría gran cantidad de trabajo, ya sea para calcular o bien para recolectar la información necesaria para realizar los cálculos.

El ejemplo con que ilustramos este método, fue planteado por el propio Fermi a sus estudiantes en la Universidad de Chicago. Les pidió estimar el número de afinadores de piano que trabajaban en la ciudad de Chicago.

La primera impresión es que la pregunta no puede ser respondida pues falta mucha información; sin embargo, al analizar la situación es posible darse cuenta que se puede llegar a una estimación razonable acerca del número pedido. Una forma de hacerlo es comenzar por estimar la población de la ciudad de Chicago, digamos: cinco millones de habitantes (es una ciudad como Santiago). Si suponemos que en promedio una familia está formada por cuatro personas, eso da un total de 1.250.000 familias. Además, si una de cada cinco familias posee un piano, entonces deberían haber del orden de 250.000 pianos en Chicago. Si consideramos que cada piano es afinado aproximadamente cada cinco años, eso da un total de 50.000 afinamientos por año. Ahora bien, un técnico puede dar servicio en forma adecuada a unos 4 pianos diariamente y supondremos que trabaja doscientos cincuenta días al año. Esto significa que para dar servicio a todos los usuarios de Chicago se requieren del orden de $50,000/(250 \times 4) = 50$ técnicos. La respuesta es aproximada, pero no se aleja mucho del número de técnicos que aparecen en las páginas amarillas de la guía de teléfonos de la ciudad de Chicago.

Dependiendo de las estimaciones utilizadas durante el desarrollo del cálculo, se podría haber obtenido un número tan bajo como 25 o tan alto como 75, pero ciertamente el número final difícilmente resultará superior a 100. La razón por la cual este tipo de cálculo puede entregar resultados acertados, radica en la cancelación de los errores cometidos en las diversas estimaciones. Si nos excedimos en el número de habitantes de la ciudad de Chicago, es posible que hayamos subestimado la cantidad de pianos atendidos diariamente por un técnico. Es decir, los errores en cada uno de los números considerados, están distribuidos aleatoriamente (i.e., al azar). Por supuesto, el entrenamiento en el arte de resolver situaciones similares, mejora la precisión de las respuestas.

Ejercicio

Repita la estimación anterior para el caso de la ciudad de Santiago. ¿Cómo cambiarían las cifras usadas anteriormente?

Ejercicio

Las ciudades de Nueva York y Los Angeles en USA están aproximadamente a la misma latitud y separadas unos 4500 *km*. Además, se sabe que cuando en Nueva York son las 10 de la mañana, en Los Angeles son las 7 de la mañana. Estime el perímetro de la Tierra sabiendo que ambas ciudades no están muy alejadas del Ecuador terrestre.

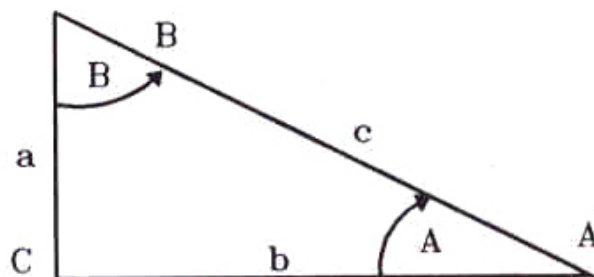
Ejercicio

Un dígito binario recibe el nombre de *bit*. Un grupo de *bits* se denomina una *palabra*. Una palabra de ocho bits recibe el nombre de *byte*. Una letra normal cualquiera está representada en lenguaje binario por un *byte*. Suponga que se dispone de un disco de

computador con capacidad para 100 *Megabytes*. Estime el número de libros que podrían ser almacenados en ese disco.

I.5. EJERCICIOS

En el enunciado de los problemas de Trigonometría que se plantean a continuación, nos referimos a los lados y ángulos que se indican en el triángulo rectángulo de la Figura.



- 1.- Hallar el valor de las funciones trigonométricas del ángulo A, sabiendo que:
 - a) $a = 8$, $b = 15$, b) $b = 2$, $c = \sqrt{11}$, c) $a = p$, $b = q$.
- 2.- Encontrar el valor de las funciones trigonométricas (sen, cos, tan, etc.) del ángulo B, sabiendo que:
 - a) $a = 5$, $c = 7$, b) $b = 5$, $c = 13$, c) $a = 6$, $b = 8$.
- 3.- Dados $\cos A = 0.44$, $c = 30.5$; hallar el valor de b .
- 4.- Si $\tan A = 11/3$ y $b = 27/11$; hallar el valor de c .
- 5.- ¿Para qué valor del ángulo *agudo* x , se cumple: $\tan(30^\circ - x) = \cot(30^\circ + 3x)$?
- 6.- Determinar el valor de los ángulos agudos A y B, de un triángulo rectángulo, si se cumple la siguiente relación $\sin 2A = \cos 3A$.
- 7.- Si $b = 2a$, determinar el valor de las funciones trigonométricas de A (sen, cos, tan, etc.) ¿Por qué no aparece a y b en ellas?
- 8.- Dados: $A = 30^\circ$, $a = 25$, encontrar el valor de c , B y b .
- 9.- Dados: $B = 45^\circ$, $b = 15$, determinar el valor de c , A y a .
- 10.- Hallar el valor de $\sin^2 A + \cos^2 A$, para $A = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

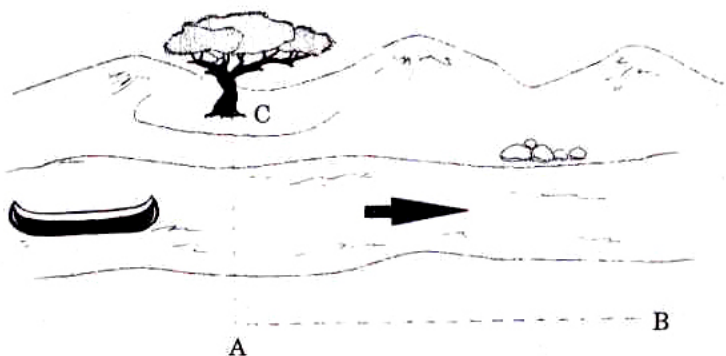
- 11.- Demuestre que $\cos 60^\circ = 2 \cos^2(30^\circ) - 1$.
- 12.- Expresar cada una de las siguientes funciones como una función del ángulo complementario.
- a) $\tan 30^\circ$, b) $\cos 20^\circ$, c) $\sec 81^\circ$,
- d) $\sin(33^\circ 33')$, e) $\csc(72^\circ 17, 4')$.
- 13.- Dar los valores del ángulo A , comprendidos entre 0° y 360° , que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:
- a) $\sin A = 1/2$, b) $\cos A = -1/2$, c) $\tan A = 1$,
d) $\cot A = -\sqrt{3}$, e) $\sec A = 2$.
- 14.- Expresar el resto de las funciones trigonométricas, en función de $\sin A$.
- 15.- Escribir en función de $\csc A$, cada una de las otras cinco funciones de A .
- 16.- En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a $5/2$ del producto de los catetos, hallar el valor de la tangente del mayor de los ángulos agudos del triángulo.
- 17.- Demostrar las siguientes igualdades:
- a) $\cos x \tan x = \sin x$, b) $\sin x \sec x - \tan x = 0$,
- c) $\sin x \cot x = \cos x$, d) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$,
- e) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$, f) $(1 + \tan^2 x) \cos^2 x = 1$,
- g) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$
- 18.- En un triángulo rectángulo se tienen los siguientes valores para sus lados y ángulos:
 $a = 1$, $A = 30^\circ$ $c = 2$, $B = 60^\circ$.
A partir de ellos, construya una tabla de senos, cosenos y tangentes para los ángulos 0° , 30° , 60° y 90° .
- 19.- En cada una de las expresiones siguientes, realice las transformaciones necesarias para expresarlas en función de θ .

$$a) \operatorname{sen}(\pi + \theta), \quad b) \cos(270^\circ - \theta), \quad c) \tan(540^\circ + \theta), \quad d) \cot(630^\circ - \theta),$$

$$e) \cos(\theta - 5\pi/2), \quad f) \operatorname{sen}(\theta - 90^\circ) \quad g) \tan(-\pi/2 - \theta).$$

- 20.- Un árbol ha sido quebrado por el viento. La parte inferior del tronco, permanece vertical y tiene una altura de 5 m. La parte derribada se apoya con uno de sus extremos en el tronco y con el otro en el piso, dibujando un ángulo de 35° con el piso.

Calcular la altura que tenía este árbol antes de partirse en dos.



- 21.- Para calcular el ancho de un río, se mide una distancia, AB (ver Figura), a lo largo de su orilla, tomándose el punto A directamente opuesto a un árbol C , ubicado en la otra ribera. Si el ángulo $\angle(ABC)$ es de 55° y la distancia AB de 10 m, ¿cuál es el ancho del río?
- 22.- El mástil de un gran navío tiene una altura de 30 m sobre el nivel del mar. Lejos de allí, un pescador en su bote, ve el mástil subtendido por un ángulo de 5° . Si el ángulo está en un plano vertical: ¿a qué distancia se encuentra el bote?
(Desprecie la altura del bote y del pescador que está sentado en él.)
- 23.- Al observar dos torres desde el *punto medio* de la distancia que las separa, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son 30° y 60° respectivamente. Demostrar que la altura de una de las torres alcanza el triple del valor de la altura de la otra.
- 24.- Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte (ver Figura) situado en una llanura encuentra que, desde un cierto lugar, el fuerte se ve bajo un ángulo de

10° , y desde otro punto, 200 m más cerca del fuerte, se ve bajo un ángulo de 15° .
¿Cuál es la altura del fuerte y cuál es su distancia al segundo lugar de observación?

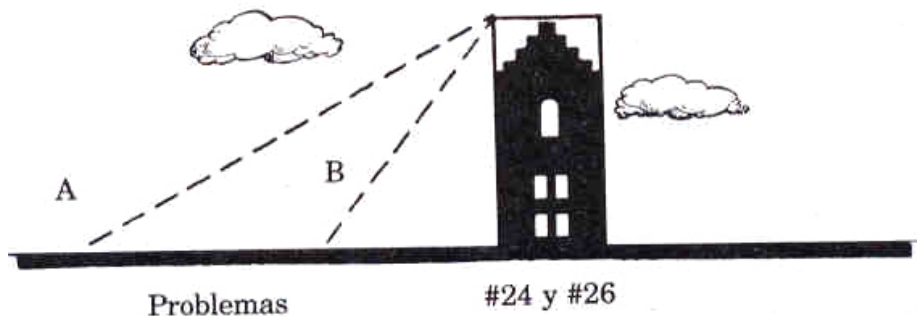
25.– En un hexágono regular de lado a , se pide:

- Calcular los radios de los círculos inscrito y circunscrito en función de a .
- La diferencia entre las áreas del hexágono y el círculo inscrito.
- La diferencia entre las áreas del hexágono y el círculo circunscrito.

26.– Con el fin de medir la altura, h , de un objeto se ha medido la distancia entre dos puntos, A y B, a lo largo de una recta que pasa por su base en un plano horizontal y resultó ser ℓ metros. Los ángulos de elevación de la punta del objeto desde A y B resultaron ser α y β respectivamente, siendo A el punto más cercano a la base (ver Figura siguiente). Demostrar que la altura está dada por la fórmula:

$$h = \frac{\ell}{\cot \beta - \cot \alpha}, \quad \text{si A y B están del mismo lado, y por:}$$

$$h = \frac{\ell}{\cot \beta + \cot \alpha}, \quad \text{si A y B están en lados opuestos de la base del objeto.}$$



27.– A partir de la serie:

$$(1+x)^n = \sum_{\alpha=0}^n \frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

compruebe que para $h \ll 1$, es posible aproximar $(1+h)^n$ como:

$$(1+h)^n \approx 1 + nh + O(h^2).$$

Para verificar la exactitud de esta aproximación, elija tres valores de h , por ejemplo: 0,01, 0,1 y 0,5, con ellos calcule el valor de $(1+h)^8$ de dos formas: utilizando la expresión exacta y a través de la aproximación mencionada. Compárelos y estime el porcentaje de error cometido, en cada uno de los casos, al truncar la serie.

28.– a) Verifique numéricamente la igualdad siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

b) Estime el valor del ángulo α si:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

29.– Calcule el valor de las siguientes series:

$$a) \quad 1 + 1/2! + 1/3! + \dots, 1/n! + \dots$$

$$b) \quad 1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! + \dots$$

$$c) \quad 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + \dots$$

Respuestas: a) $(e - 1)$, b) e^{-1} , c) $(1 - e^{-1})$.

Compruebe estos resultados numéricamente.

30.– Una forma de estudiar la convergencia de una serie es comparándola con otras, cuya convergencia es bien conocida.

a) Sea: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, una serie *convergente*, cuyo término k -ésimo es a_k .

Si existe otra serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \text{tal que,} \quad |b_k| < |a_k| \quad \forall k \in N,$$

entonces, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge .

b) Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, una serie *divergente* y sea

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{otra serie, tal que} \quad b_k > a_k > 0, \quad \forall k \in N,$$

entonces $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge.

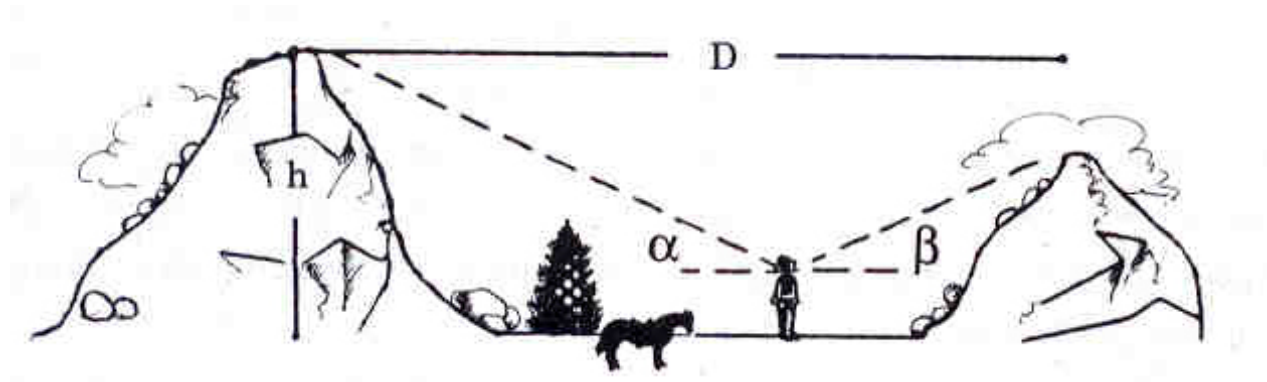
Usando estos resultados –que no necesita demostrar–, estudie la convergencia de:

$$\begin{array}{ll} i) & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\ ii) & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right), \\ iii) & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \\ iv) & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{k}, \quad \alpha > 0 \end{array}$$

Indicación:

- i) Recuerde que $1/[k \cdot (k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$.
- ii) Compare $(k+1)/k$ con 1.
- iii) Compare con la serie correspondiente al número e .

- 31.– Es común utilizar la siguiente aproximación $\sin \alpha \approx \alpha$ (para α pequeño), cuando el ángulo α está expresado en radianes.
- a) A partir de la definición de radianes como medida angular, justifique esta aproximación.
 - b) Usando la expresión asociada a la serie $\sin \alpha$, demuestre que la aproximación es correcta.
- 32.– Repita el análisis del problema anterior, con la aproximación:
 $\cos \alpha \approx 1$ (para α pequeño).
- 33.– Una persona ubicada en el punto P de la Figura, observa dos montes con ángulos de elevación α y β respectivamente.
- Si el de la izquierda tiene una altura h y la separación entre ambos es D , calcule la altura del monte opuesto.



34.- Sean α y δ dos ángulos medidos en radianes.

i) Usando la expresión para la suma de ángulos, calcule:

$$\frac{[\text{sen}(\alpha + \delta) - \text{sen } \alpha]}{\delta},$$

ii) Haga tender a cero el valor de δ , es decir, suponga que $\delta \ll 1$ y calcule el valor de la expresión anterior, utilizando las aproximaciones relevantes.

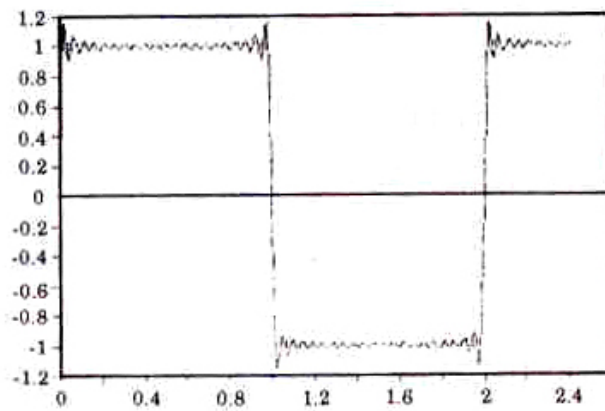
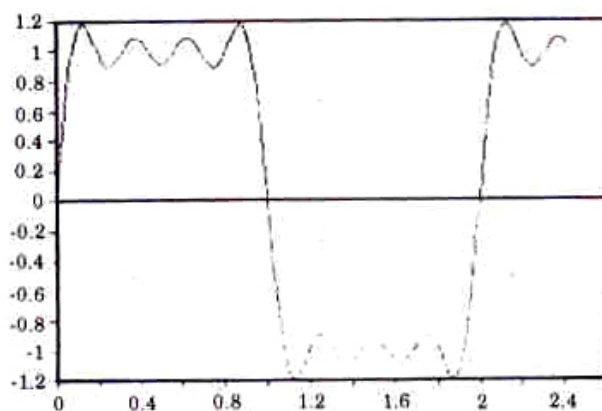


Figura I.1: [Ejercicio # 35]. El gráfico de la izquierda corresponde a la serie truncada en el octavo término. Si se incluyen los primeros 41, se obtiene el gráfico de la derecha.

35.- Graficar la función:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} [\text{sen } x + (\text{sen } 3x)/3 + (\text{sen } 5x)/5 + \dots]$$

Compruebe que al aumentar el número de términos de la serie, ésta se aproxima rápidamente a la función:

$$f(x) = +1 \quad 0 < x < \pi$$

$$f(x) = -1 \quad \pi < x < 2\pi$$

Compruebe que para $x = \pi$ se produce una discontinuidad de la función y en el caso que $n \rightarrow \infty$, este salto es del orden de un 18 % de la altura de la función.

¿Puede ver esto en el gráfico del computador ? (Nota: sume un número grande de términos de la serie).

36.– a) Demostrar que para ángulos pequeños, es válida la aproximación:

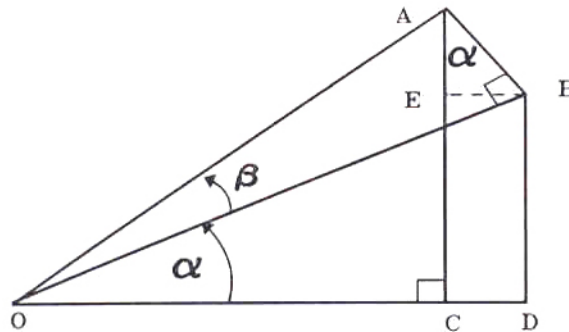
$$\text{sen}(2\alpha) \approx 2\text{sen } \alpha$$

b) Encuentre el valor máximo que pueden alcanzar los ángulos, si se tolera un error de a lo más 0,001 en la aproximación. (Use una calculadora).

c) Qué rango de valores de $\beta > 0$, mantienen la convergencia de las siguientes series:

$$i) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\beta}\right)^k, \quad ii) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\beta^k}.$$

d) ¿Cuál es el valor de las series anteriores suponiendo que convergen?

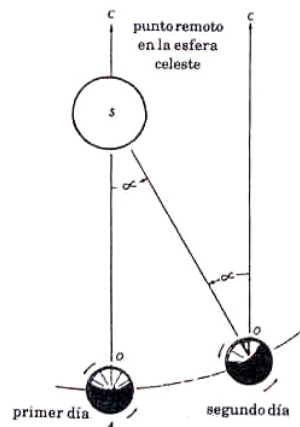


37.– Use el triángulo de la Figura para encontrar la expresión de $\cos(\alpha + \beta)$ en función de $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\text{sen } \alpha$ y $\text{sen } \beta$.

38.– En esta Figura se puede apreciar la diferencia entre un día *sideral* y uno *solar*.

Para hacer la explicación más simple, supongamos que es posible observar las estrellas durante el día. En realidad las estrellas están allí y de hecho los radioastrónomos las observan durante el día.

Para un observador en el Ecuador, el día solar es el intervalo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el cenit (posición del Sol justo sobre nuestras cabezas). El día sideral es el tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos de una *estrella lejana* por el cenit.



La diferencia que existe entre ambas definiciones se debe al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol como se indica en la Figura que se acompaña.

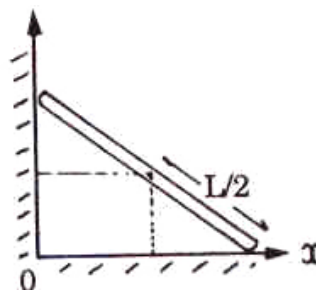
Este desplazamiento no cambia la posición de la estrella lejana –precisamente por estar tan lejana–, pero la posición del Sol en el cenit ocurre antes que la Tierra alcance a dar una vuelta completa alrededor de su propio eje.

Determinar el valor del ángulo α definido en la Figura. Calcule la diferencia, expresada en segundos, entre el día sideral y el día solar.

- 39.– Encontrar el desarrollo en serie de $\cos 3\alpha$, en potencias de α .
Desprecie las potencias de orden α^4 , o mayores.

- 40.– Demostrar que el punto medio de una escalera de largo L , que resbala apoyándose en el muro, describe una circunferencia.

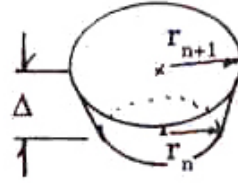
La ecuación de una circunferencia de radio R es: $x^2 + y^2 = R^2$.



- 41.– Se pide calcular el volumen del cono que se muestra en la Figura haciendo uso de las herramientas matemáticas introducidas en el complemento matemático del apéndice. Para ello se sugiere trabajar de la siguiente forma:

a) Descomponga el cono en una suma de troncos de cono de altura constante Δ y cuyo volumen está dado por la fórmula siguiente:

$$V_{\text{Tronco de Cono}} = \pi \cdot \left[\frac{r_n + r_{n+1}}{2} \right]^2 \cdot \Delta.$$



Sume cada uno de estos volúmenes hasta completar el cono. Use las propiedades de la sumatoria y los resultados obtenidos anteriormente para:

$$\sum_{n=1}^{n=N} n^2 = \frac{N(2N+1)(N+1)}{6}, \quad \sum_{n=1}^{n=N} n = \frac{N(N+1)}{2},$$

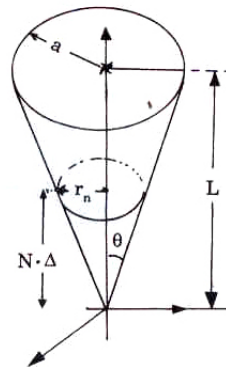
$$r_n = n \cdot \Delta \cdot \tan \theta, \quad \Delta = \text{Cte.}, \quad \tan \theta = \frac{a}{L} = \text{Cte.}$$

b) Para obtener el valor exacto del volumen de un cono, tome los siguientes límites en los resultados anteriores:

$$\Delta \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty,$$

de manera que el producto permanezca constante.

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} N \bullet \Delta = L.$$

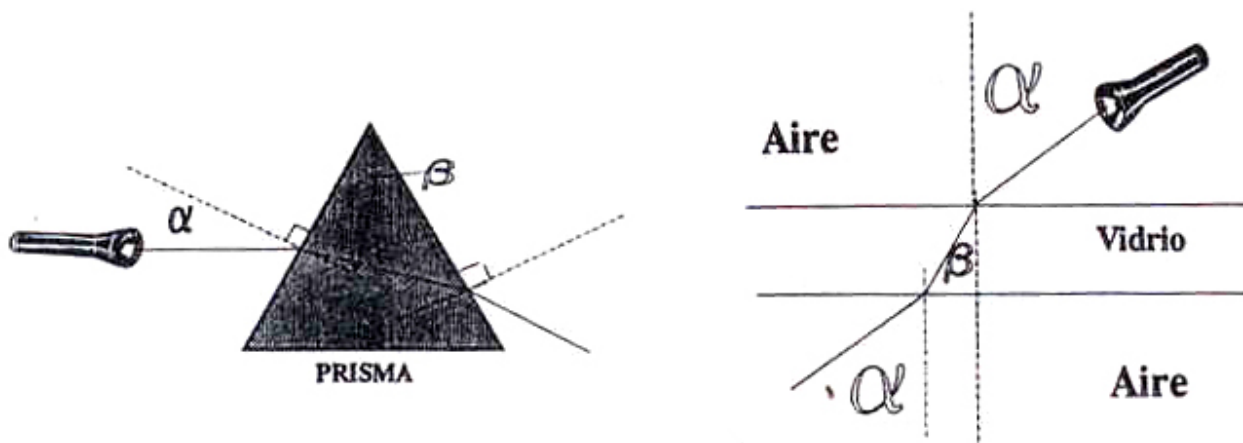


- 42.- Una camionada de arena seca se descarga formando un cono cuya base es una circunferencia de 4 metros de diámetro. Si la pendiente de la arena seca es de $\theta = 32^\circ$ y su densidad es $\rho = 1,7 \text{ g/cm}^3$, calcule la masa de la arena.
- 43.- Encuentre el ángulo entre dos diagonales de un cubo.
- 44.- Un tetraedro regular es la figura geométrica que se obtiene al formar una pirámide con cuatro triángulos equiláteros idénticos. Encuentre el ángulo entre dos de sus caras.
- 45.- Un tambor de 50 cm de radio y 1.5 m de largo se encuentra en posición horizontal apoyado sobre su manto y lleno con parafina hasta una altura $h = 60 \text{ cm}$. ¿Cuántos litros de parafina hay en el tambor?

- 46.– ¿Para qué latitud, el paralelo terrestre tiene $1/3$ de la longitud del Ecuador?
- 47.– Al incidir un rayo de luz sobre una superficie que separa dos medios diferentes, por ejemplo, al pasar del aire al vidrio o viceversa, ésta sufre un cambio de dirección (ver Figura). Este fenómeno se conoce con el nombre de *refracción* de la luz. La ecuación que describe este fenómeno es la *Ley de Snell*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{vidrio}}}$$

donde v_{aire} y v_{vidrio} corresponden a la velocidad de la luz en el aire y en el vidrio respectivamente. (Para el vidrio común se acepta el valor $v_{\text{aire}}/v_{\text{vidrio}} \simeq 1,5$).



Supongamos que un haz de luz incide sobre un vidrio de caras paralelas y de 2 cm de espesor, con un ángulo de incidencia $\alpha = 40^\circ$. Determine el espesor d del vidrio para el cual el rayo de luz emergente se encontrará paralelamente desplazado respecto al incidente. (Ver Figura).

- 48.– Considere ahora un rayo de luz incidiendo sobre un prisma en la forma como se muestra en la Figura. Encuentre el ángulo β para $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ y 70° .

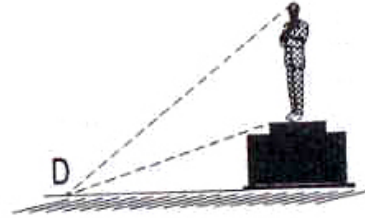
¿Para qué valor del ángulo incidente α , el rayo de luz se propaga paralelamente a la cara interior del lado opuesto al de incidencia del prisma?

Para valores de α mayores, el haz de luz se refleja especularmente en la superficie interior del prisma. Este fenómeno se conoce con el nombre de *reflexión total*.

- 49.– Desde un punto D , un observador divisa una estatua con su pedestal. Conoce su altura y la del pedestal, que son 5 y 4 m, respectivamente.

El ángulo de elevación de la cabeza de la estatua con respecto al piso es el doble del ángulo que subtiende el pedestal.

A partir de estos datos, calcule a qué distancia se encuentra este observador.



- 50.– Usando el método de las sumatorias, calcule el valor del área encerrada entre la línea $y = x$ y la parábola $y = x^2$, entre el intervalo $[0,1]$ del eje x .

Respuesta: $1/6$.

51.- Estimaciones del tamaño de la Tierra.

Los antiguos reconocieron la esfericidad de la Tierra a través de diversas observaciones:

- a) En los eclipses de Luna la sombra de la Tierra sobre la superficie lunar es redonda.
- b) La elevación de una estrella sobre el horizonte varía con la latitud.
- c) Los barcos se pierden rápidamente de vista desapareciendo bajo el horizonte al alejarse.

Uno de los primeros valores para el perímetro del globo terráqueo fue obtenido por Eratóstenes (~ 330 A. de C.).

Eratóstenes sabía que al mediodía del 22 de Junio el Sol caía verticalmente en Siena (actualmente Asuán): la luz solar que incidía sobre un profundo pozo se reflejaba en el fondo hacia arriba. (Ver Figura). El mismo día, a la misma hora, se midió en Alejandría la sombra de un alto obelisco. Eratóstenes encontró que los rayos del Sol formaban un ángulo de $7,5^\circ$ con la vertical.

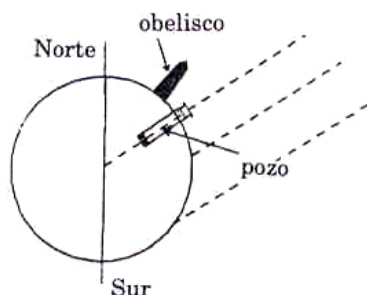


Figura I.2: Ejercicio # 51. El valor obtenido por Eratóstenes no resultó ser el correcto debido a la imprecisión en la medida de las distancias.

Sabiendo que Alejandría se encuentra a algo más de 800 Km. al Norte de Siena, estime el valor del perímetro y radio terrestres.

52.- Estimación del alcance visual sobre el horizonte.

Suponga que un observador se encuentra a una altura h sobre el suelo en un terreno sin accidentes . ¿A qué distancia ℓ , se halla el límite del horizonte?

(Use $R = 6,400$ km). Calcule ℓ para:

$h_1 = 2$ m, ($\sim$ estatura de una persona),

$h_2 = 20$ m, ($\sim$ vigía de un barco),

$h_3 = 300$ m, ($\sim$ altura del cerro San Cristóbal).

(Ver Figura)

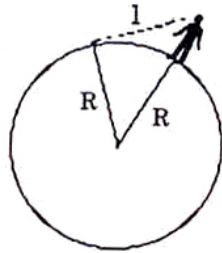
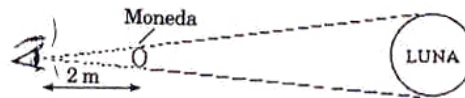


Figura I.3: Ejercicio # 52

Figura I.3: Ejercicio # 52



Ejercicio # 54

Ejercicio # 54

53.- Masa de la Tierra.

La mayoría de los líquidos y sólidos constituyentes de nuestro planeta tienen densidades que fluctúan entre 1 y 10 kg/lt. A partir de estos datos y usando $R = 6,400$ km para el radio de la Tierra, *estime* un valor para su masa.

54.- Relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.

Se intercala una moneda de un diámetro de 2 cm. entre el ojo y la Luna, ocultándola a la vista. La moneda se aleja gradualmente, encontrándose que el borde de la Luna empieza a ser visible cuando la moneda está a unos dos metros de la pupila.

Use estos datos para encontrar una relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra.

55.- Tamaño de la Luna y distancia a la Tierra.

El tamaño de la Luna fue comparado con el de la Tierra por Aristarco (270 A. de C.), durante un eclipse lunar. (Esto ocurre cuando la Tierra se interpone entre la Luna y el Sol). Aristarco midió el tiempo que tardaba la Luna en cruzar la sombra de la Tierra, y encontró que el diámetro de la sombra terrestre era dos veces y media el diámetro de la Luna.

Sin embargo, la sombra de los planetas no es un cilindro, sino un cono. Durante una eclipse solar (cuando la Luna se interpone entre el Sol y la Tierra), es sólo un poco más que el vértice del cono de sombra de la Luna lo que alcanza a la Tierra.

Aristarco dedujo esto observando que durante el eclipse, la Luna cubre apenas el disco solar. Argumentó que en un eclipse de Luna, la sombra de la Tierra se reduce en la misma razón que en el caso de la Luna.

Con estos datos, deduzca que $d = \frac{2}{7}D$, donde d es el diámetro lunar y D , el diámetro terrestre. Usando este resultado, el valor del radio terrestre y la relación entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra, estime:

- el diámetro lunar,
- la distancia Tierra-Luna.

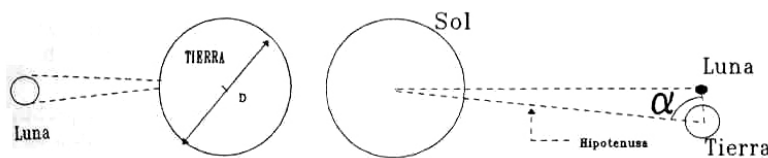


Figura I.4: Ejercicio # 55

Ejercicio # 56

Figura I.4: Ejercicio # 55

Ejercicio # 56

56.- Distancia Tierra-Sol.

La distancia de la Tierra al Sol es difícil de estimar. Aristarco notó que cuando hay media Luna (es decir, se ve iluminada exactamente la mitad del disco lunar), los rayos del sol deben caer sobre la Luna perpendicularmente con respecto a la línea de visión del observador. En ese momento es posible medir el ángulo α con que el Sol es visto desde la Tierra. Su valor es muy cercano al de un ángulo recto: $90^\circ - \alpha \simeq 1^\circ$.

(Aristarco, erróneamente, lo estimó en: $90^\circ - \alpha \simeq 3^\circ$).

Use este resultado y la distancia Tierra-Luna, para estimar la distancia Tierra-Sol.

Estime, además, la rapidez (módulo de la velocidad) con que la tierra orbita alrededor del Sol.

57.- Nuevo método experimental para estimar la distancia Tierra-Luna.

Supongamos dos observadores A y B que están ubicados sobre el mismo meridiano terrestre y dispuestos de manera tal, que los rayos de luz provenientes de la Luna forman, tanto para A como B, un ángulo X con la vertical local, como se señala en la Figura.

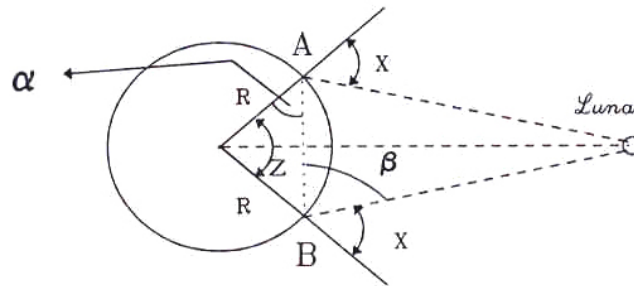


Figura I.5: Ejercicio # 57

Para calcular la distancia entre la Tierra y la Luna, debemos conocer el valor del ángulo Z . Una forma de obtenerlo es midiendo la distancia entre A y B sobre la superficie terrestre.

En la antigüedad, la determinación de esta distancia resultaba difícil, prefiriéndose el método siguiente: cada observador medía el ángulo que formaban los rayos provenientes de una estrella elegida previamente por ambos, y la vertical en el respectivo punto. Designando estos ángulos como u para A y v para B, se puede demostrar que $Z = u + v$.

Obtenga esta relación y justifique la suposición que los rayos que inciden en A son paralelos con los que inciden en B.

Ahora, suponiendo conocidos: R , X y Z , calcule, en función de estas cantidades, la distancia Tierra-Luna medida desde el centro de la Tierra. Suponga que la Luna es un objeto puntual.

¿Por qué ambos observadores deben ubicarse en un meridiano en lugar de un paralelo, por ejemplo? Haga un diagrama para justificar su respuesta.

- 58.- Consiga una hoja de papel muy larga y con un grosor de $0,1 \text{ mm}$ (10^{-4} m). Comience a doblarla por su mitad, de manera que en cada doblez el grosor aumenta al doble.

¿Cuántos **dobleces** son necesarios, para que el grosor final que adquiere, alcance a cubrir la distancia Tierra-Luna (aproximadamente 380.000 Km)?

Antes de hacer el cálculo escoja alguna de las alternativas propuestas en la Tabla.

- a) 42 veces
- b) 1320 veces
- c) 483200 veces
- d) 639421 veces
- e) $2,4 \cdot 10^8$ veces.

Ahora calcule y concluya cuánto puede confiar en su intuición.

59.– Estudie la siguiente situación: alrededor del Ecuador terrestre se construye un anillo metálico que calza en forma exacta, sin huelgo. A continuación se corta el anillo metálico en un punto y se le agrega un pedazo de anillo de 1 metro de longitud. Si al agregarle el nuevo pedazo, el anillo queda suspendido equidistante de la superficie terrestre a una altura h :

- a) Estime, sin calcular: ¿A qué altura queda el anillo?
- b) Haga el cálculo numérico y compare con su estimación.

60.– a) ¿Con qué rapidez puede Ud. lanzar una piedra?

- b) ¿Qué velocidad cree Ud. que alcanza una bala a la salida del cañón.

En ambos casos, justifique cuantitativamente su estimación.

61.– a) Calcule *numéricamente* el valor de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = ?$$

Indicación:

Calcule esta suma con tres cifras significativas. Descarte los términos de la serie más pequeños que 10^{-4} y al sumarlos aproxime la última cifra de modo que mantenga el mismo número de cifras significativas del comienzo.

Si sabe el mínimo de BASIC u otro lenguaje de programación... olvídense de estas instrucciones y haga que la máquina calcule.

- b) Recordando que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$

Calcule *el valor exacto* de la serie propuesta en la parte a).

Se propone el siguiente método:

- 1) Escriba la serie correspondiente al número $e = e^1$.
- 2) A la serie propuesta en la primera parte, súmele la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)! \quad \text{término a término.}$$

- 3) Relacione esta nueva serie con la del número e .

62.– Demuestre la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta/2)} = \left(\cos \beta/2 + \frac{\operatorname{sen} \beta \cos^2(\alpha - \beta/2)}{\cos(\beta/2) \operatorname{sen}(2\alpha - \beta)} \right).$$

- 63.– En este ejercicio definiremos la *división entre números complejos*. Del texto, ya conocemos la multiplicación entre estos números. Por otro lado, sabemos que la división es la operación inversa de la multiplicación. Comencemos entonces por el inverso de un número complejo.

a) **Inverso de un complejo**

Dado un número complejo $z = a + ib$, el inverso, al que llamaremos z^{-1} , será aquel número (complejo) tal que:

$$z \bullet z^{-1} = z^{-1} \bullet z = 1. \quad \text{Esta operación es abeliana.}$$

¿Encuentre una expresión para z^{-1} , que cumpla la condición anterior y tenga la forma $z^{-1} = c + id$? c y d son números reales y dependen sólo de los valores de a y b .

Compruébela para $z = 1 + i \cdot 5$

b) **División**

Para dividir complejos sólo tenemos que multiplicar por el inverso del complejo con respecto al cual nos interesa dividir.

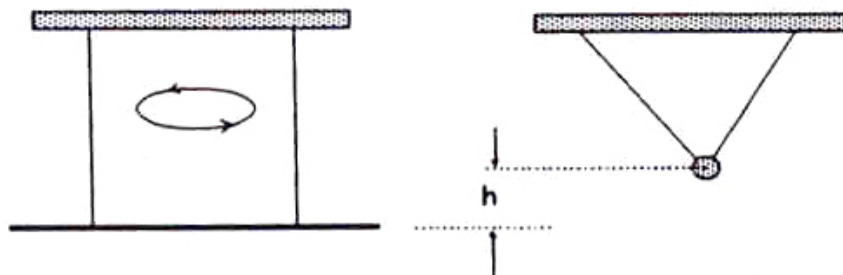
$$\text{Así : } \frac{z_1}{z_2} = z_1 \bullet z_2^{-1}$$

Dado $z_1 = a + i \cdot b$ y $z_2 = c + i \cdot d$, demuestre que

$$\frac{z_1}{z_2} = (ac + bd)/(c^2 + d^2) + i \cdot (-ad + bc)/(c^2 + d^2)$$

- 64.– La Figura muestra un péndulo bifilar. Este péndulo puede oscilar girando en torno a un eje horizontal que pasa por los puntos de apoyo, o girar en torno a un eje *vertical* que pasa por el punto medio de la barra.

Suponga que la barra se gira en 90° con respecto a este eje vertical: calcule cuánto se elevó la barra verticalmente.



Cinemática 1 dimensión

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile**

II

Índice general

II. CINEMATICA	29
II.1. INTRODUCCION	29
II.2. GRAFICOS	31
II.2.1. Ecuación de la recta.	31
II.2.2. La parábola.	33
II.3. VELOCIDAD	37
II.3.1. Velocidad constante.	37
II.3.2. Velocidad media	40
II.4. VELOCIDAD INSTANTANEA	48
II.4.1. Derivada.	50
II.5. ACELERACION	57
II.5.1. Definición	57
II.5.2. Dimensiones y unidades. (SI)	59
II.5.3. Aceleración constante	59
II.5.4. La posición en función del tiempo si la aceleración es constante . .	59
II.5.5. Fórmulas de cinemática en una dimensión y con aceleración cons- tante.	61
II.6. EJEMPLOS.	63
II.7. VISCOSIDAD	72
II.8. EJERCICIOS	75
III.CINEMATICA EN DOS DIMENSIONES	87

Capítulo II

CINEMATICA

II.1. INTRODUCCION

La descripción matemática de la trayectoria de un objeto es lo que denominamos *cinemática*. En este capítulo estudiaremos el movimiento de una partícula en *una dimensión*. Este es un ejemplo muy simple, pero contiene todas las ideas básicas de la cinemática en más dimensiones. De aquí podemos extendernos a los casos de dos y tres dimensiones.

Cuando nos referimos a una partícula en el párrafo anterior, hablamos de un objeto puntual, despojado de dimensiones. Su descripción natural es la de un punto matemático.

Esta aproximación al mundo real es de gran utilidad, por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de la Tierra en torno al Sol, la distancia relevante es la distancia Tierra–Sol, en este caso, el tamaño de la Tierra es despreciable y ésta puede ser tratada como una partícula. En lo sucesivo repetiremos esta misma reducción del tamaño con diferentes objetos.

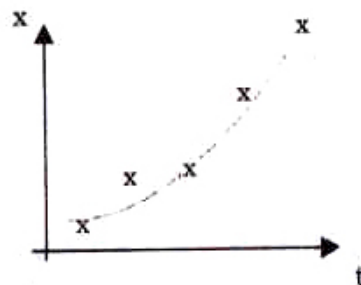
El movimiento de una partícula en una dimensión nos lo podemos imaginar como un desplazamiento a lo largo de una línea recta. En forma natural, es posible asociar esta línea con el eje de los números reales. La elección de un origen divide a esta recta en dos zonas. En forma arbitraria las denominamos lado positivo, a la derecha del origen y, negativo al restante.

La *coordenada* es un número real que se asocia –de alguna forma– con la posición de la partícula en cada punto de la curva. Si además especificamos el instante en el cual la partícula ocupó dicha posición, la descripción de su movimiento es completa. Denotaremos por $x(t)$ la posición que tiene una partícula en cada instante de tiempo t . La trayectoria es la *función* $x \equiv x(t)$.

En diversas circunstancias –en el laboratorio por ejemplo–, sólo se conoce la posición de la partícula en determinados instantes, en estos casos una *tabla de valores*, como la que se indica en la Figura, describe el movimiento.

Una *tabla de valores* establece una relación uno a uno entre dos conjuntos finitos de números.

TIEMPO	POSICION
t_0	x_0
t_1	x_1
$\vdots$	$\vdots$
t_j	x_j
$\vdots$	$\vdots$



Una buena estrategia para estudiar un movimiento es *graficando* la función $x(t)$. Por ejemplo, podemos ubicar los valores de t en el eje horizontal (*abscisa*) y la posición correspondiente a ese instante en el eje x (*ordenada*). Una mirada a un gráfico, permite obtener una gran cantidad de información, por esta razón es importante saber interpretarlos.

Cuando una tabla de datos contiene muchos puntos podemos intentar unirlos por una línea continua. Esto genera un gráfico. En algunos casos es posible asociar esta curva con una función $f(t)$ que relacione, en forma única, la variable t con $x = f(t)$.

Generalmente existe una dispersión en los datos y no tiene sentido dibujar una curva $x = f(t)$ que pase a través de todos y cada uno de los puntos. En este caso se puede ajustar una curva elemental –una curva que tenga una expresión analítica simple–, que se aproxime lo más posible a los datos. Existen procedimientos conocidos que realizan esta tarea y que son usados en el laboratorio.

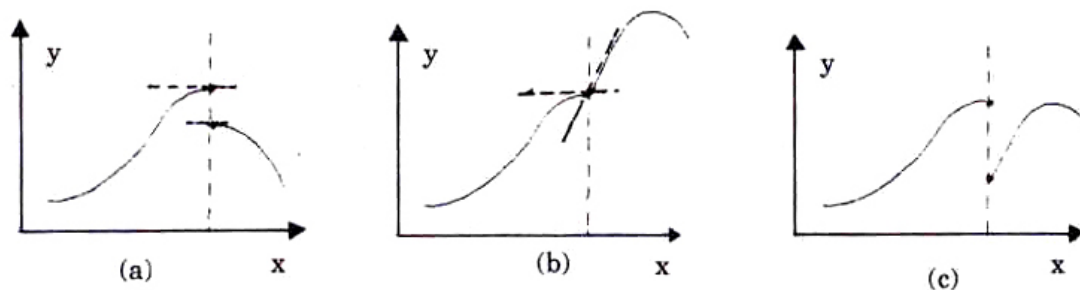


Figura II.1: Una curva es suave si la función y su tangente cambian en forma continua. En caso que existan discontinuidades de la curva (a), o su tangente (b), o ambas simultáneamente (c), debemos analizar cada tramo por separado.

Un ejemplo cuyo resultado se expresa mediante una función elemental, como polinomios, funciones trigonométricas..., constituye el caso ideal para ser analizado en detalle.

En algunos casos debemos recurrir a los métodos numéricos para resolver el problema.

Comenzaremos estudiando las curvas más simples y que se usan con mayor frecuencia: la línea recta y la parábola.

II.2. GRAFICOS

II.2.1. Ecuación de la recta.

La siguiente ecuación representa una línea recta:

$$y = mx + n. \quad (\text{II.1})$$

Con los parámetros m y n es posible caracterizar a cualquier línea trazada en el plano.

Sabemos que dos puntos determinan completamente una recta. Basta marcar los dos puntos en la Figura II.2 y enseguida trazar con una regla una línea recta a través de ellos.

Para encontrar la relación entre los valores de m y n y las coordenadas x_P , y_P y x_Q , y_Q de los puntos P y Q , elegimos la ubicación de estos puntos de manera que simplifiquen el álgebra.

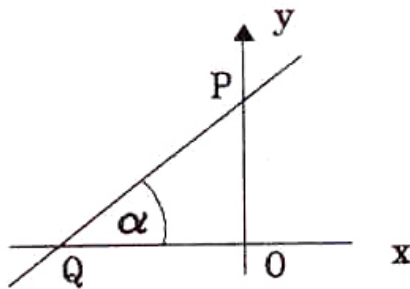


Figura II.2: Las coordenadas de los puntos P y Q determinan los parámetros m y n de la recta. Las coordenadas del punto P son los valores x_P e y_P , que se obtienen trazando por P una paralela a la *ordenada* y a la *abscisa* respectivamente.

Como el punto P pertenece a la recta, obedece la ecuación II.1 de forma que se cumple que: $y_P = m x_P + n$.

De la Figura II.2 se sabe que $x_P = 0$, puesto que su proyección sobre el eje x coincide con el origen y por tanto el número asociado es precisamente 0. Al reemplazar este valor en la ecuación de la recta anterior obtenemos $y_P = n$.

Un razonamiento similar indica que: $y_Q = 0 = m x_Q + n$ para el punto Q. De modo que $x_Q = -n/m$. Si relacionamos esta última ecuación con el valor de la coordenada $y_P = n$, obtenemos:

$$m = \frac{y_P}{-x_Q} > 0, \quad \text{puesto que } x_Q < 0.$$

Recordando la definición de tangente del capítulo anterior, descubrimos que m es precisamente la tangente del ángulo α en el triángulo $\triangle QOP$.

La generalización de esta definición para cualquier par de puntos 1 y 2 es la siguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \equiv \text{pendiente de la recta.} \quad (\text{II.2})$$

Ejercicio

Demuestre que esta definición generalizada de m , coincide con el valor obtenido para m en el caso particular de la Figura II.2. $\square$

Algunos casos particulares de la ecuación de una recta.

Si ponemos $n = 0$, la ecuación II.1 queda: $y = mx$, y representa una recta que pasa a través del origen.

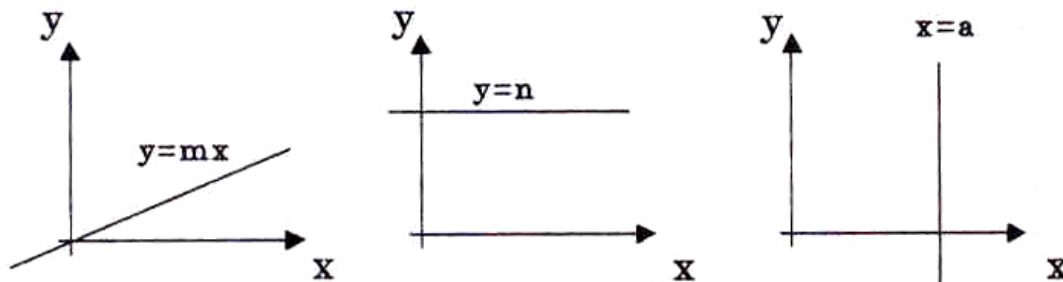


Figura II.3: Ejemplos de la ecuación de una recta. Cada una de las Figuras representa un caso particular de las ecuaciones estudiadas.

Si $m = 0$, la pendiente de la recta es nula y por tanto es paralela al eje x . En este caso $y = n$, independiente del valor asignado a x .

Otro caso particular es la ecuación $x = a$. Esta ecuación corresponde a una recta perpendicular al eje x que lo corta en el punto $x = a$. En rigor, esta ecuación no es una función: no queda definido cómo asociar en forma única un sólo valor de y al punto $x=a$.

En algunos ejemplos de cinemática, la pendiente de una función –o la función misma– sufren un salto repentino. *En estas situaciones, cada discontinuidad señala el comienzo de una nueva ecuación para la recta.* A continuación se incluye un par de estos casos.

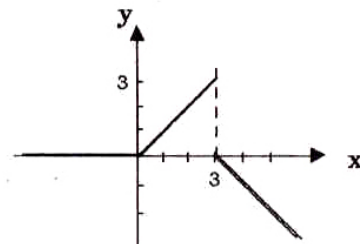
Ejemplo

$$y = 0 \quad x \leq 0,$$

$$y = x \quad 0 \leq x \leq 3,$$

$$y = -x + 3 \quad x > 3.$$

a) En $x = 0$ la función es continua pero la *pendiente* es discontinua. En $x = 3$ se produce una discontinuidad de la función y de la pendiente.

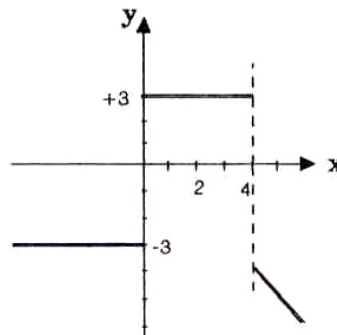


b) Otro caso del mismo tipo es:

$$y = -3, \quad \text{para } x < 0,$$

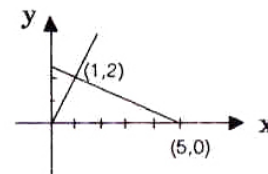
$$y = +3 \quad 0 \leq x < 4,$$

$$y = -x \quad x \geq 4.$$



Ejercicio

Escriba la ecuación correspondiente a cada uno de los lados del triángulo rectángulo de la figura adyacente. □



II.2.2. La parábola.

La ecuación de una parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{II.3})$$

Los valores que toman los parámetros a , b y c determinan las distintas formas que adopta la parábola. Algunos de estos casos se incluyen en la Figura II.4.

La intersección de la parábola con el eje x (cuya ecuación es $y = 0$) son las raíces de la ecuación cuadrática. Cuando la parábola no corta al eje x , las dos raíces son números

complejos conjugados. Cuando la toca en un solo punto, las dos raíces de la ecuación son iguales.

Familiarizarse con el gráfico de una parábola es fundamental. El movimiento de una partícula sometida a una aceleración constante –por ejemplo, en caída libre sobre la superficie de la tierra–, queda descrito precisamente por esta curva.

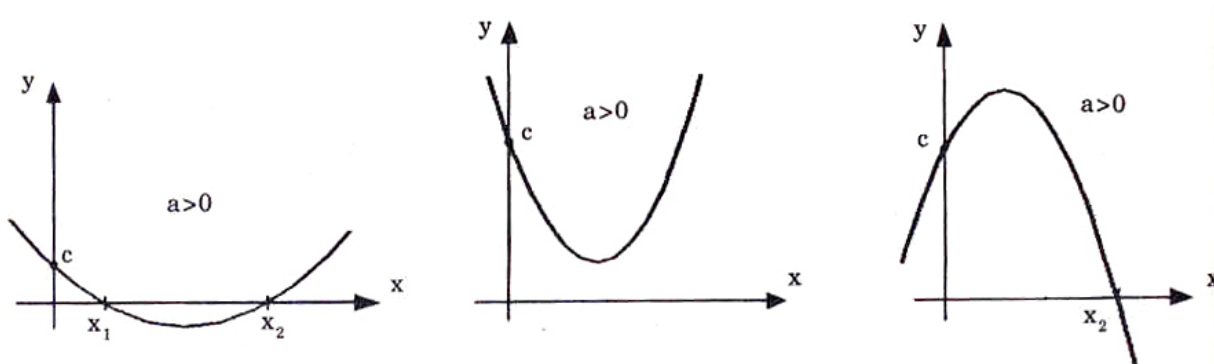


Figura II.4: Significado geométrico de a , b y c . $a > 0$: indica concavidad ($\cup$), $a < 0$: convexidad ($\cap$). c : indica la coordenada del punto donde la parábola corta a la ordenada y b la pendiente en dicho punto.

$$\forall a, [b^2 - 4ac] > 0, \quad y = ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{posee dos raíces reales: } x_1, x_2;$$

$$\forall a, [b^2 - 4ac] < 0, \quad y = ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{dos raíces complejas: } z_1, z_1^*;$$

$$\forall a, [b^2 - 4ac] = 0, \quad y = ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{dos raíces reales iguales: } x_1 = x_2.$$

($\forall \equiv$ para todo).

Ejemplo

Encontrar las coordenadas de los puntos donde una recta intercepta una parábola. La ecuación de la parábola es $y = -x^2 + 2$ y la recta obedece a la ecuación $y = x$.

La intersección de las dos curvas indica que ambas tienen al menos un punto en común, llamémosle P . Como el punto pertenece a ambas curvas, sus coordenadas, x_P e y_P , deben satisfacer las ecuaciones de ambas curvas simultáneamente. En P se cumple entonces que:

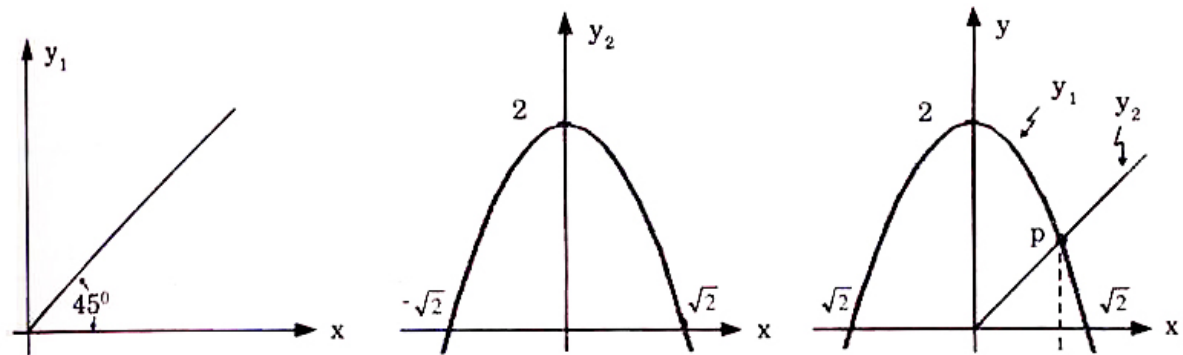


Figura II.5: A la izquierda se dibujan los gráficos de la recta y la parábola, con las letras y_1 e y_2 . A continuación se superponen ambos gráficos. En el ejercicio se pide encontrar las coordenadas de los puntos de intersección.

Ecuación de la recta:	Ecuación de la parábola:	Como se cumple para $\forall x$:
--------------------------	-----------------------------	--------------------------------------

$$y_P = x_P, \quad y_P = -x_P^2 + 2, \quad \implies \quad x = -x^2 + 2.$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son: $x_P = 1 = y_P$, y $x_Q = -2$, $y_Q = -2$.

Ejercicio

Grafique el polinomio $y = x^3 + bx + c$, para distintos valores de b y c , hasta obtener una combinación tal que solo exista *una* raíz real para la ecuación cúbica.

Indicación: Recuerde que las raíces de un polinomio se obtienen poniendo $y = 0$. Por ejemplo, si $c = 0$ y $b < 0$, entonces existen tres raíces reales, un de ellas es $x = 0$ y las otras dos son $x = \pm\sqrt{-b}$. Examine a continuación qué sucede con $b \geq 0$. $\square$

Ejemplo

Encuentre las coordenadas del vértice del rectángulo que encierra el área máxima y que está inscrito en una elipse, cuya ecuación es $x^2/m^2 + y^2/n^2 = 1$.

Para hacer contacto con la ecuación de una parábola vamos a considerar el cuadrado del área en lugar del área. Este es un truco que no afecta el resultado puesto que el área es positiva: si $\mathcal{A}$ es el área máxima, $\mathcal{A}^2$, también lo es.

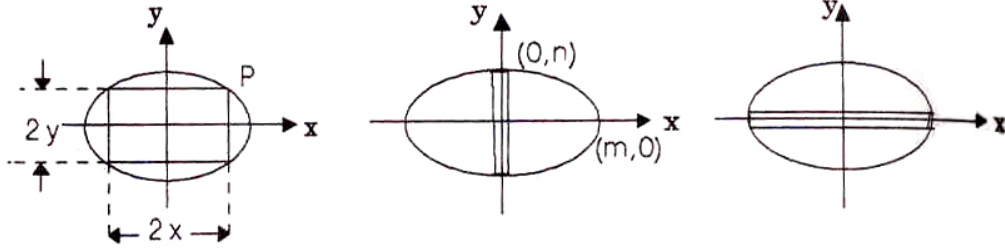


Figura II.6: Rectángulo inscrito en una elipse, cuya ecuación está dada en el texto. A la derecha se indican los casos extremos, en los cuales el valor del área $\mathcal{A}$, tiende a cero.

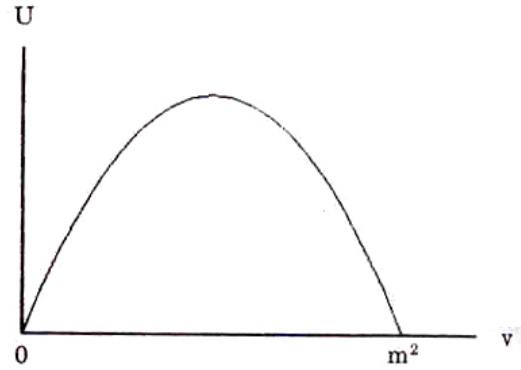
De la Figura, sabemos que $\mathcal{A}^2 = 16x^2y^2$, pero como el punto P se ubica en la elipse, debe cumplir la ecuación de la elipse, es decir:

$$y^2 = n^2 [1 - x^2/m^2], \quad \implies \quad \mathcal{A}^2 = 16n^2x^2 [1 - x^2/m^2].$$

Definiendo $v \equiv x^2$ y $U \equiv \mathcal{A}^2$ obtenemos la ecuación:

$$U = -16 \frac{n^2}{m^2} v^2 + 16n^2 v,$$

esta es la ecuación de una parábola, con $a = -16 \frac{n^2}{m^2}$, $b = 16n^2$ y $c = 0$, de acuerdo a la definición de estas letras dadas inicialmente. Cuando $v = 0 \implies x = 0$, $U = 0$ y por lo tanto el área $\mathcal{A}$ es nula. Lo mismo sucede si $v = m^2 \implies x = m$, el área $\mathcal{A} = 0$. Como $a < 0$, la parábola tiene forma de $\cap$, de acuerdo a lo señalado anteriormente. También como $c = 0$, sabemos que pasa por el origen.



Para calcular el máximo de $\mathcal{A}$ debemos graficar la función, dándonos previamente los valores de m y n . En el caso más simple, con $m = n = 1$, se obtiene $U = -16v^2 + 16v$, y graficando esta función –o haciendo una tabla de valores–, encontramos que $v = 1/2$ maximiza U . De aquí se obtiene $x = y = 1/\sqrt{2}$, y por lo tanto, con estos valores de m y n , el área máxima se logra con un cuadrado. Este es un resultado esperado, puesto que al poner $m = n = 1$, la elipse se transforma en una circunferencia.

Ejercicio

Demuestre que para el caso $m \neq 1$ y $n \neq 1$, el máximo de la función U definida anteriormente ocurre para $v = m^2/2$ y que el valor del Area del rectángulo es: $\mathcal{A}_{\text{máx}} = 2 \text{ m n}$. $\square$

II.3. VELOCIDAD

II.3.1. Velocidad constante.

Como mencionamos anteriormente, iniciamos el estudio de la trayectoria de los cuerpos restringiéndonos a movimientos en una dimensión.

Para determinar la posición que ocupa el móvil en cada instante, usamos una línea recta, cuyos puntos identificamos con los números reales. Esta es la coordenada del cuerpo en movimiento.

Aún en el caso que dibujemos el móvil con sus dimensiones correspondientes, el cuerpo efectivamente estará representado sólo por un **punto**, de esta forma no existe ambigüedad al identificar la posición del cuerpo con el número real correspondiente a su coordenada.

Para describir el movimiento podemos usar una Tabla, como la mostrada al comienzo del Capítulo, que contenga en una columna el tiempo y a su derecha la posición en dicho instante.

Otra manera de representar esta trayectoria, es mediante un gráfico.

Línea recta

La representación gráfica es útil para visualizar las propiedades de la trayectoria de una partícula. La Tabla de Datos se usa de preferencia en los Laboratorios para guardar información.

Usualmente en un gráfico se asigna la variable independiente, el tiempo en este caso, al eje horizontal y la variable dependiente, la posición, al eje vertical.

A continuación analizaremos con detalle el significado de una línea recta en un gráfico *distancia vs. tiempo*. Comenzamos con la siguiente afirmación:

El gráfico más simple de distancia versus tiempo, es una línea recta y representa una partícula viajando con velocidad constante.

La tangente de una recta es independiente del punto donde la midamos: es constante.

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{II.4})$$

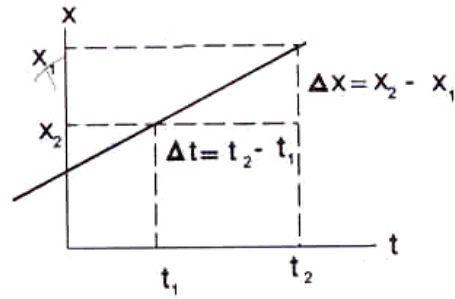


Figura II.7: El gráfico indica las distintas posiciones que toma una partícula a lo largo del tiempo, cuando viaja con velocidad constante. La pendiente (o inclinación) de la recta permite conocer su velocidad. La Figura ilustra el significado de la Δ introducida en el texto.

Como es un movimiento unidimensional la velocidad puede ser positiva o negativa dependiendo si $x_2 > x_1$ o viceversa.

Notación

La *diferencia* entre dos cantidades de la misma naturaleza y consecutivas, como por ejemplo: dos posiciones, dos instantes de tiempo, dos velocidades...etc., se indica mediante una Δ . Por ejemplo, Δx es la diferencia entre la posición x_2 y la posición x_1 . $\Delta t \equiv [t_2 - t_1]$, es la diferencia entre el tiempo correspondiente a la posición x_2 y x_1 , respectivamente. $\square$

La diferencia entre la coordenada de una partícula en el tiempo t_2 y la coordenada en el tiempo t_1 , (con $t_2 > t_1$), se denomina *desplazamiento*:

$$\text{Desplazamiento} \equiv [x_2 - x_1] \equiv \Delta x.$$

El desplazamiento es una cantidad que tiene signo. Si la coordenada x de la partícula se incrementa en el tiempo, el desplazamiento es un número positivo; si al contrario, decrece en el transcurso del tiempo, el desplazamiento es negativo.

Definición:

Velocidad de una partícula es el cuociente entre el desplazamiento y el tiempo que transcurrió durante dicho desplazamiento.

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (\text{II.5})$$

En un gráfico $x(t)$ versus t , esta definición corresponde a la tangente del ángulo que forma la recta que une (x_1, t_1) y (x_2, t_2) con el eje horizontal.

A partir de esta expresión podemos determinar la ecuación que relaciona x con t en cualquier instante:

$$v \equiv \text{velocidad constante} = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \quad (\text{II.6})$$

x es la posición correspondiente al tiempo t y x_0 es la posición ocupada por el móvil en t_0 . Despejando:

$$x - x_0 = v(t - t_0),$$

$$x = x_0 + v t - v t_0.$$

Supongamos que $t_0 = 0$, es decir, el reloj comienza a funcionar cuando la partícula se encuentra en x_0 . (Es lo que sucede, por ejemplo, en una carrera de atletismo). Entonces:

En un movimiento con *velocidad constante*, la posición en un instante cualquiera, viene dada por:

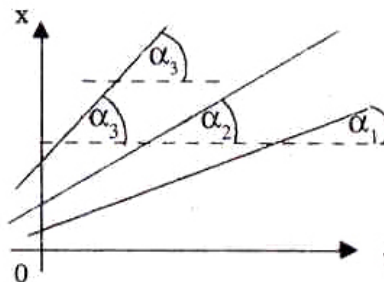
$$x = x_0 + v \cdot t. \quad (\text{II.7})$$

En un gráfico x versus t , esta ecuación representa una línea recta.

La inclinación de la recta con respecto al eje del tiempo es una medida de la velocidad de la partícula.

$\tan \alpha_1 \equiv v_1$, $\tan \alpha_2 \equiv v_2$, $\tan \alpha_3 \equiv v_3$, con $v_3 > v_2 > v_1$.

Una recta horizontal corresponde a una partícula en reposo y una recta vertical (perpendicular al eje del tiempo) representa un objeto que tiene velocidad infinita.



II.3.2. Velocidad media

Es muy difícil encontrar un movimiento con velocidad constante. Lo natural es que la velocidad cambie a lo largo de la trayectoria. En el caso de un vehículo, los semáforos, los baches en el camino, el tránsito... etc. impiden mantener una rapidez uniforme. En estas condiciones un gráfico posición versus tiempo, adopta una forma complicada: el cambio de velocidad produce, de acuerdo al razonamiento anterior, un cambio en la pendiente de la curva y el gráfico deja de ser una línea recta y se transforma en una curva. En este caso, sólo tiene sentido definir una velocidad instantánea –asociada a cada instante de la trayectoria–, pero aquí postergamos esta definición e introducimos en su lugar el concepto de *velocidad media*.

La idea detrás de la *velocidad media* es intuitiva: por ejemplo, cuando se prepara un viaje, se desea saber cuánto se tardará en llegar allí. Si tenemos experiencia en este tipo de viajes, sabemos que si acostumbramos a viajar a una velocidad de 90 km/h, entonces, para estimar el tiempo de viaje, debemos considerar una velocidad de sólo 70 km/h, con ello tenemos presente las posibles detenciones, la demora en adelantar a los vehículos más pesados en las subidas... etc. Esta velocidad de 70 km/h, es precisamente lo que se denomina *velocidad media*. Indica que si enviamos un automóvil con una velocidad constante e igual a 70 km/h llegará simultáneamente con nosotros. Con esta *velocidad media* se compensan exactamente las detenciones y los tramos de la carretera en la cual viajamos más rápido.

Esta es la explicación intuitiva de la velocidad media.

Definición:

La *velocidad media* entre O y el punto P de la trayectoria, se define como el cociente entre el camino recorrido, $x_P - x_O$, y el tiempo total empleado en recorrerla Δt . En geometría, esto corresponde a la tangente del ángulo α que se indica en la Figura. II.8.

A continuación generamos una definición cuantitativa (matemática). Notemos que en ambos casos –el modelo con velocidad constante, y el real, con velocidad variable–, la distancia recorrida es la misma. De este modo, usando la relación entre la distancia y el tiempo empleado en recorrerla, II.7, de la fórmula anterior, tenemos:

$$\text{Distancia Recorrida} = \text{Velocidad Media} \times \text{Tiempo Total del Viaje.}$$

Para un caso real, debemos dividirlo en etapas y suponer nuevamente que viaja con velocidad constante en cada una de dichas etapas. (Sólo cuando definamos la velocidad instantánea nos podremos deshacer de esta suposición). Enseguida procedemos a sumar las respectivas distancias recorridas en cada etapa, de acuerdo a la fórmula [II.7]:

$$\begin{aligned}
&\text{Distancia Total Recorrida} = \\
&\text{Velocidad Media Etapa 1} \times \text{Intervalo de Tiempo en Etapa 1} + \\
&\text{Velocidad Media Etapa 2} \times \text{Intervalo de Tiempo en Etapa 2} + \\
&\quad \vdots \\
&\text{Velocidad Media Etapa N} \times \text{Intervalo de Tiempo en Etapa N.}
\end{aligned}$$

$$\text{Distancia Total Recorrida} = \bar{V}_1 \times \Delta t_1 + \bar{V}_2 \times \Delta t_2 + \bar{V}_3 \times \Delta t_3 + \dots$$

donde hemos definido Δt_k como el intervalo de tiempo en el cual el móvil viaja con velocidad $\bar{V}_k$.

Reemplazando la distancia total recorrida por la fórmula correspondiente a un observador que se mueve con velocidad constante, tenemos:

$$\text{Velocidad Media} \times \text{Tiempo Total del Viaje} \equiv \sum_{k=1}^N \bar{V}_k \times \Delta t_k$$

$$\text{Velocidad Media} \equiv \bar{V} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{V}_k \times \Delta t_k}{\sum_{k=1}^N \Delta t_k} \quad (\text{II.8})$$

La velocidad media en el punto P, de la Figura es:

$$\bar{V}(P) = \frac{[x_P - 0]}{[t_P - 0]} = \frac{x_P}{t_P}. \quad (\text{II.9})$$

Note que esta definición es igual a la dada anteriormente [II.8], el numerador en esta ecuación es precisamente la distancia recorrida x_P y el denominador es también el tiempo total t_P .

En la definición de la velocidad media sólo importa la posición final, la inicial y el tiempo empleado en el trayecto. Se pierde información acerca de las variaciones de la velocidad que pudieron ocurrir durante la trayectoria. Por ejemplo, el valor calculado para la velocidad media en el ejemplo de la Figura, ignora que el móvil estuvo detenido entre t_A y t_B .

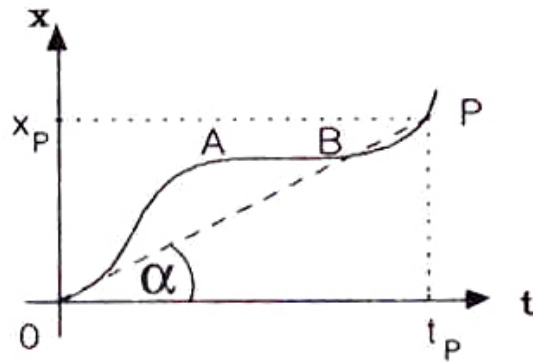


Figura II.8: La curva corresponde a un movimiento con velocidad variable. La velocidad media entre O y P se calcula dividiendo la distancia recorrida por el tiempo empleado en llegar a P. Con esto se pierde información acerca de los detalles de la trayectoria en los puntos intermedios.

Ejemplo

Un objeto se mueve con una velocidad constante $v_1 = 20$ m/s durante 20 s partiendo desde A, permanece en reposo por 20 s y continúa viaje en la misma dirección con una velocidad de 40 m/s durante otros 20 s, deteniéndose finalmente en un punto que denominamos B.

- Graficar la velocidad media de cada uno de los intervalos versus tiempo.
- Indique la forma del Gráfico desplazamiento versus tiempo, para este ejemplo.

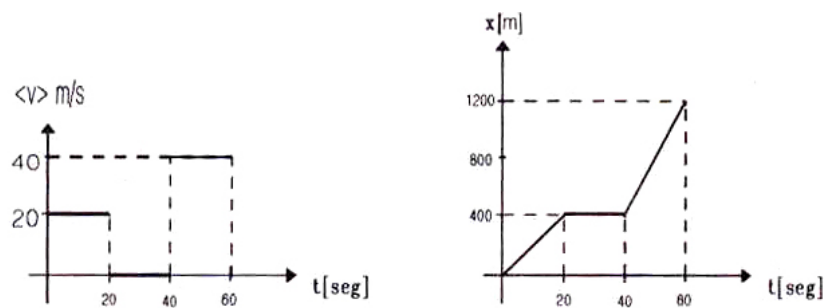


Figura II.9: Gráfico desplazamiento versus tiempo y velocidad media versus tiempo, obtenidos a partir de los datos de este ejemplo.

- Calcule el valor de la velocidad media entre los puntos A y B de este problema.

Los valores de la velocidad en las distintas etapas son:

$$\bar{v}_1 = 20 \text{ m/s} \quad \bar{v}_2 = 0 \quad \bar{v}_3 = 40 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_1 = 20 \text{ s} \quad \Delta t_2 = 20 \text{ s} \quad \Delta t_3 = 20 \text{ s}$$

$\Delta t_1 \equiv$ intervalo de tiempo en que la partícula viajó con velocidad $v_1 \dots$ etc.

La velocidad media se calcula sumando las distancias recorridas en cada una de las etapas y dividiendo esta cantidad por el tiempo total empleado en hacerlo.

$$\begin{aligned} \bar{v} &= [\bar{v}_1 \cdot \Delta t_1 + 0 \cdot \Delta t_2 + \bar{v}_3 \cdot \Delta t_3] / (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3) \\ &= [20 \cdot 20 + 0 \cdot 20 + 40 \cdot 20] / [60 \text{ s}] \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

$$\bar{v} = [400 + 800] / [60] = [1200] / [60] = 20 \text{ m/s} \quad \square$$

Ejemplo

En el equipo de la carrera de postas de un colegio, siempre ubican al más rápido en el último relevo. Si se conoce la velocidad media de cada uno de los atletas, demuestre que su distribución en la pista no mejora el tiempo del equipo.

Para simplificar el álgebra suponga que sólo participan dos atletas. No considere el posible cambio de rendimiento de un atleta debido a la presión psicológica de los últimos metros de la carrera.

Supongamos que los atletas alcanzan una velocidad media de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ respectivamente.

Lo que debemos calcular es la velocidad media del equipo, es decir el tiempo que les toma recorrer el total del trayecto: AB.

$$\bar{v}_{AB} = \frac{\text{trayectoria total}}{\text{tiempo empleado}} = [x_1 + x_2] / [t_1 + t_2]$$

$$x \equiv x_1 = x_2 \quad \text{ambos recorren la misma distancia.}$$

$2x$ representa la distancia total recorrida, pero veremos que este dato no aparece en el resultado final. La explicación de este hecho es que la velocidad media del equipo debe depender de las velocidades de cada uno de los atletas y no de lo extenso de la trayectoria. Recuerde que la velocidad media de los atletas es constante, no depende de la distancia recorrida. Este es otro de los supuestos de este ejercicio: los atletas no se agotan.

Lo que puede influir, por cierto, es la fracción del trayecto que recorre cada uno de los atletas. Por ejemplo, si uno de los atletas realiza casi todo el trayecto, entonces la velocidad media del equipo será muy parecida a la velocidad media de este atleta.

Despejamos primero t_1 . Usando la fórmula de la velocidad $v_1 = x_1/t_1 = x/t_1$ tenemos $t_1 = x/\bar{v}_1$.

Análogamente $t_2 = x/\bar{v}_2$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{AB} &= 2x / \{ [x/\bar{v}_1] + [x/\bar{v}_2] \}, \\ &= 2x / \{ x(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) / (\bar{v}_1 \bar{v}_2) \} \\ \bar{v}_{AB} &= \frac{2 \bar{v}_1 \bar{v}_2}{(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)}\end{aligned}$$

$$\text{o, de otra forma: } \frac{2}{\bar{v}_{AB}} = \frac{1}{\bar{v}_1} + \frac{1}{\bar{v}_2}.$$

Como esta expresión no se altera si cambiamos $\bar{v}_1$ por $\bar{v}_2$, concluimos que la velocidad media del equipo es independiente del orden en que participen los atletas.

Supongamos que $\bar{v}_2$ *permanece fijo y distinto de cero*. Averiguemos cómo depende $\bar{v}_{AB}$ de $\bar{v}_1$. Esto corresponde al caso en que uno de los atletas recién se incorpora al grupo y el entrenador desea cuantificar el progreso que experimenta su equipo con este nuevo elemento.

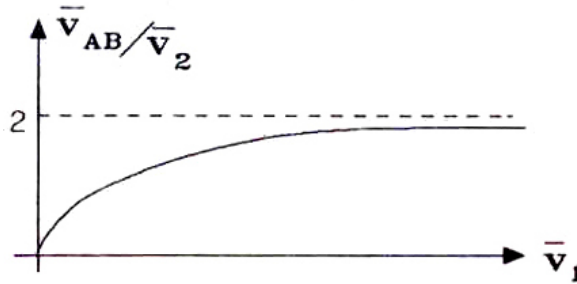


Figura II.10: Valor de la velocidad media cuando una de las velocidades del tramo permanece constante. La velocidad media depende en forma *no-lineal* con respecto a $\bar{v}_1$. Si fuera lineal, al aumentar $\bar{v}_1$ al doble, la velocidad media $\bar{v}_{AB}$ se incrementaría de igual forma.

Del gráfico correspondiente a esta situación se desprende que por muy rápido que sea el nuevo atleta la velocidad del equipo no puede sobrepasar el valor límite de $\bar{v}_{AB} = 2\bar{v}_2$.

Las aproximaciones hechas aquí parecen razonables; no hemos incluido la demora en el paso del bastón ni tampoco el aspecto psicológico: lo que un atleta puede dar si es exigido al máximo. Este último factor puede ser sin duda importante, pero hay que darse cuenta que no está relacionado con la máxima velocidad que puede alcanzar el

atleta. En otras palabras, si el atleta más lento mejora notablemente su tiempo cuando es exigido –y aún sigue siendo el más lento–, conviene ubicarlo en el último tramo. $\square$

Ejercicio

Verifique si esta última afirmación corresponde a la verdad. Suponga, por ejemplo, que $v_1 > v_2$ pero que el atleta cuya rapidez es v_1 mejora su tiempo en un 10 % en las finales, en cambio el otro lo hace en un 30 %. $\square$

Ejercicio

- Encuentre la velocidad media cuando participan 4 atletas.
- ¿Cuál es la expresión para la velocidad media, en el caso de dos atletas, suponiendo que no corren distancias iguales sino que uno de ellos cubre un porcentaje $0 < \alpha < 1$ de la distancia total? $\square$

A continuación estudiamos un movimiento en el que ocurre un cambio de signo en la velocidad. En este caso debemos asignar un sentido positivo al eje coordenado.

Ejemplo

Una pelota se lanza sobre una pared con una velocidad constante v_1 . Al chocar con la muralla se devuelve con una velocidad v_2 cuyo módulo (*rapidez*) es, αv_1 , donde $0 < \alpha < 1$.

Si la distancia desde el punto de lanzamiento hasta la muralla es d , se pide:

- Calcular el tiempo que demora la pelota en ir y volver al punto de partida, como una función de α .

Ida:

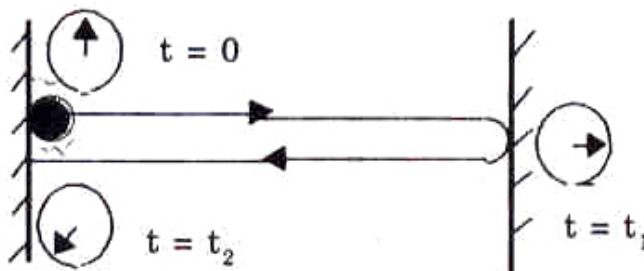
De la Figura tenemos,

$$t_1 = d/v_1.$$

Retorno:

$$v_2 < 0.$$

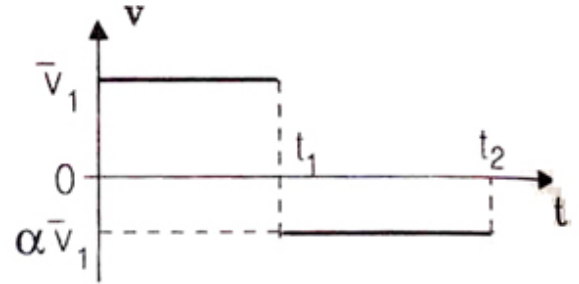
$$v_2 = [0 - d]/[t_2 - t_1].$$



Si ahora ponemos $v_2 = -\alpha v_1$
 entonces, $t_2 - t_1 = d/[\alpha v_1]$.
 De aquí,

$$t_2 = d[1/v_1 + 1/(\alpha v_1)],$$

$$t_2 = t_1[1 + 1/\alpha]$$



b) Se pide graficar velocidad y rapidez versus t (Ver Figura).

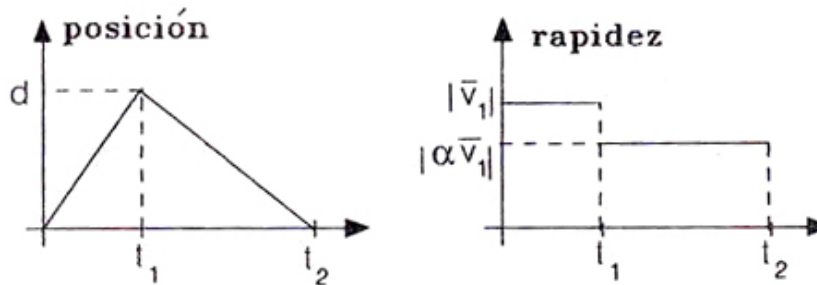


Figura II.11: Gráfico *posición* versus *tiempo* y *rapidez* versus *tiempo*. Recuerde que la rapidez sólo considera el módulo de la velocidad. Note que a pesar que la distancia recorrida es $2d$, la posición final coincide con el punto de partida.

c) Haga un gráfico de la distancia recorrida versus el tiempo empleado, tomando como origen el punto de lanzamiento. $\square$

En el siguiente párrafo haremos una afirmación cuya validez se extiende desde aquellos ejemplos cuyo movimiento se realiza con velocidad constante hasta los casos en que la velocidad varía arbitrariamente. Su demostración la postergamos hasta más adelante.

En el gráfico *velocidad* versus *tiempo*, el área encerrada bajo la curva equivale al camino recorrido durante dicho intervalo. Este es un resultado general, válido para una velocidad constante o variable.

Verifiquemos esta afirmación en el ejemplo anterior; estudiemos la trayectoria de t_1 a t_2 . Por definición, el móvil parte del origen como se muestra en la Figura. Como en

cada uno de los trayectos recorre la distancia d , tenemos:

$$d = v_1 \times t_1 = |v_2| \times (t_2 - t_1),$$

pero ambos productos son iguales al área encerrada en el gráfico velocidad versus tiempo, de cada uno de estos casos. De hecho en el rebote de la pelota, d es negativo, debido a que el *desplazamiento* es negativo, por esta razón consideramos el valor absoluto de v_2 .

En el caso general, aquél con velocidad variable, tomaremos pequeños intervalos y aproximaremos, en cada uno de ellos, la velocidad correspondiente con una velocidad constante característica de cada intervalo. De esta forma la distancia total recorrida sigue siendo el área bajo la curva, y estará compuesta por la sumatoria de los rectángulos asociados a cada intervalo de tiempo en los que se dividió el tramo total.

El análisis de esta aproximación es el contenido de la siguiente sección.

II.4. VELOCIDAD INSTANTANEA

Una partícula que se traslada con velocidad constante corresponde al caso más simple que podemos imaginar. Sólo en casos muy particulares ocurre este fenómeno en la naturaleza. Sin embargo, como es difícil registrar la velocidad en cada punto de la trayectoria, se considera, como alternativa, la velocidad media.

Para analizar el movimiento de una partícula con más detalle se requiere conocer el valor de la velocidad en tramos intermedios de la trayectoria.

Recordemos que el valor de la velocidad media *no depende* de la subdivisión del tramo. Por ejemplo si subdividimos OP en cuatro intervalos arbitrarios y calculamos en cada uno de ellos la velocidad media y a partir de estos valores calculamos la velocidad media entre O y P de acuerdo a la fórmula II.8, esta operación, *no altera* el valor de la velocidad media calculada, por ejemplo, dividiendo el trayecto OP en sólo dos tramos.

Hasta ahora sólo podemos estudiar problemas de los cuales conocemos la velocidad media en un cierto número de intervalos. Al ir de un tramo al siguiente, la velocidad media experimenta un salto para alcanzar el nuevo valor. Obviamente esto es artificial. La velocidad varía en forma continua, no a saltos.

Para disminuir la magnitud de los saltos es necesario subdividir el tramo en intervalos más pequeños. Si pretendemos hacerlos imperceptibles, debemos aumentar el número de intervalos, haciéndolos más y más diminutos. En el límite –cuando el tramo es más pequeño de lo que podemos imaginar pero distinto de cero–, necesitamos conocer la velocidad asociada a cada uno de los puntos de la trayectoria. Esto es lo que se denomina la *velocidad instantánea*.

Para realizar este proceso debemos calcular la velocidad media entre dos puntos que estén lo más cercano posible. En el proceso de acercar un punto al otro, el valor de la

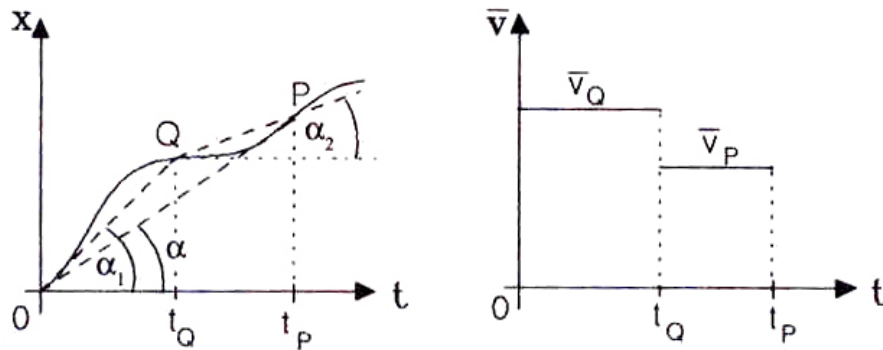


Figura II.12: El objeto se desplaza con una velocidad variable. A cada intervalo se asocia un valor para su velocidad (velocidad media), que depende del intervalo mismo. En la Figura se toma un punto intermedio Q para comparar con el caso original en el cual sólo se contabiliza el punto inicial O y el final P.

velocidad (la pendiente de la cuerda en la Figura II.13) va cambiando, pero se aproxima a un límite que se denomina la *velocidad instantánea* y que corresponde a la inclinación de la tangente a la curva en dicho punto.

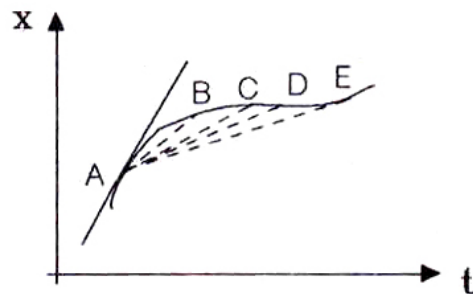


Figura II.13: En esta Figura se aprecia que al ir acercando el punto E hacia A, la cuerda se aproxima más y más a la tangente trazada por el punto A. El valor de la tangente en A, corresponde al valor de la velocidad instantánea en A.

La descripción anterior corresponde a una operación matemática bien definida, que se denomina tomar el *límite* de una función. La velocidad instantánea se define como:

$$\text{velocidad instantánea en } t_0 \equiv v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \right] \quad (\text{II.11})$$

La operación $\lim_{t \rightarrow t_0}$, en la forma señalada corresponde a tomar la *derivada* de la función $x(t)$. En términos geométricos, la derivada es la inclinación de la tangente a la curva en el punto t_0 . Esto es lo que se observa en la Figura II.13, al acercarse al punto A tanto como sea posible: ($D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots$) la cuerda tiende a coincidir con la tangente en el punto A.

En un gráfico *desplazamiento* versus *tiempo*, la velocidad instantánea en un punto P, es la inclinación de la tangente a la curva en dicho punto.

Nota acerca del límite.

El hecho de tomar puntos tan cercanos $t \rightarrow t_0$, revela que al dividir por $[t - t_0]$ en la ecuación II.11, corremos el riesgo de estar dividiendo por cero. La respuesta a este temor es la siguiente: primero, no se está dividiendo por cero puesto que la operación $\lim$ señala que $[t - t_0]$ tiende a un valor tan pequeño como se quiera, pero *distinto de cero*. En segundo lugar, si la función $x(t)$, es continua –y este es el tipo de funciones que nos interesan–, al acercar $t \rightarrow t_0$, la diferencia entre $x(t)$ y $x(t_0)$ es también muy pequeña e igual a una suma de términos que contienen potencias de $[t - t_0]$.

$$x(t) - x(t_0) = b \cdot [t - t_0] + c \cdot [t - t_0]^2 + \dots$$

donde $b, c, \dots$ son constantes que dependen del valor de $x(t_0)$. Solo diremos que este es un resultado general y que se denomina desarrollo de Taylor.

Volviendo al argumento previo, al tomar el límite, cuando $t \rightarrow t_0$, las potencias de $[t - t_0]$ que aparecen en $x(t) - x(t_0)$, se hacen arbitrariamente pequeñas y no necesitamos considerarlas salvo la primera, $[t - t_0]$ que se simplifica con el denominador y da el valor de la derivada. $\square$

II.4.1. Derivada.

Como es difícil retener y manejar tantas definiciones, a continuación ilustraremos estas ideas con una serie de ejemplos resueltos.

Ejemplo

Demostrar que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\alpha + \delta) - \sin \alpha}{\delta} \right] = \cos \alpha.$

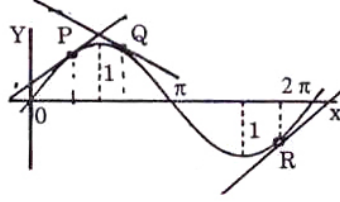


Figura II.14: El gráfico representa la función $\sin \alpha$. El valor de la pendiente de la tangente en cada uno de los puntos indicados tiene el mismo valor que $\cos \alpha$, donde α es el valor correspondiente de abscisa en P, Q y R.

Este problema está resuelto en el Apéndice, aquí lo analizaremos usando geometría. Para ello nos referiremos a la Figura que se incluye a continuación.

$$OD = 1, \quad \sin \alpha = DC, \quad \sin(\alpha + \delta) = AB,$$

$$\sin(\alpha + \delta) - \sin \alpha = AB - DC = EB,$$

$$\text{pero, } \cos(\alpha + \delta) = \frac{EB}{BD} = \frac{EB}{\delta}.$$

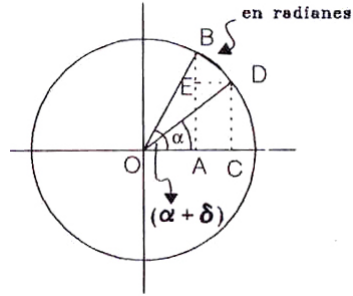
Aquí hemos aproximado el arco BD con la cuerda BD $\simeq \delta$ (medida en *radianes*). Entonces:

$$\sin(\alpha + \delta) - \sin \alpha \simeq \delta \cdot \cos(\alpha + \delta),$$

$$\text{despejando } \cos(\alpha + \delta),$$

$$\cos(\alpha + \delta) \simeq [\sin(\alpha + \delta) - \sin \alpha] / \delta,$$

tomando el límite $\delta \rightarrow 0$, la expresión se transforma en una igualdad.



$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \cos(\alpha + \delta) \equiv \cos \alpha = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha + \delta) - \sin \alpha}{\delta}.$$

Para acortar la escritura usamos la siguiente notación:

$$\frac{d}{d\alpha} \sin \alpha = \cos \alpha \quad (\text{II.12})$$

Esta ecuación afirma que el cociente entre la variación de $\sin \alpha$ debida a un incremento infinitesimal de α , (un aumento muy pequeño), dividida por este incremento δ , es un número finito que resulta igual a $\cos \alpha$, cuando se toma el límite $\delta \rightarrow 0$.

En el gráfico de $\sin \alpha$ versus α , la derivada representa geométricamente la pendiente de la tangente a la curva, como se muestra en la Figura.

En forma similar:

Ejercicio

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha + \delta) - \cos \alpha}{\delta} \equiv \frac{d \cos \alpha}{d\alpha} = -\sin \alpha,$$

y con la misma interpretación geométrica, $\frac{d \cos \alpha}{d\alpha}$ representa el valor de la tangente en el punto α del gráfico $\cos \alpha$ versus α . $\square$

En general, definimos la derivada de una función como:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (\text{II.13})$$

el significado geométrico corresponde a evaluar la tangente a la función $f(x)$ en el punto x , en un gráfico de $f(x)$ versus x .

Si la tangente a una curva en un punto es una línea horizontal, la derivada en dicho punto es nula: $\tan 0 = 0$.

Propiedades de los límites.

A continuación establecemos dos propiedades de los límites, que por definición, pertenecen también a las derivadas y que es fundamental conocerlas:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)\} \equiv$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x). \quad (\text{II.14})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{c \cdot f(x + \Delta x)\} = c \cdot \left\{ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \right\}. \quad (\text{II.15})$$

En palabras: el límite de una suma de funciones $f(x)$ y $g(x)$ es igual a la suma de los límites de cada una de las funciones, y el límite del producto de una constante c por una función $f(x)$ es igual al producto de la constante por el límite de la función.

En el caso de las derivadas, estas propiedades se escriben

$$\frac{d \{f(x) \pm g(x)\}}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}, \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{d \{c \cdot f(x)\}}{dx} \equiv c \cdot \frac{df(x)}{dx}. \quad (\text{II.17})$$

En lo que respecta al producto de funciones, en este caso la derivada satisface la *Regla de Leibnitz*:

$$\frac{d}{dx} [f(x) \bullet g(x)] = \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \bullet g(x) + f(x) \bullet \frac{d}{dx} g(x). \quad (\text{II.18})$$

La regla de Leibnitz indica que la derivada de un producto de funciones es igual a la suma de la derivada de una de las funciones, $f(x)$ por la otra función, $g(x)$ más la derivada de la segunda función $g(x)$ por la primera $f(x)$.

Esta operación se puede aplicar a cualquier función. A continuación incluimos una lista de derivadas, sólo usaremos un par de ellas en los capítulos posteriores.

TABLA DE DERIVADAS

$$\frac{d}{d\alpha}(\text{sen } \alpha) = \cos \alpha \quad (\text{II.19})$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\cos \alpha) = -\text{sen } \alpha \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\tan \alpha) = +\frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\text{II.21})$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\cot \alpha) = -\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}(\csc \alpha) &= -\frac{\cos \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} \\ &= -\cot \alpha \cdot \frac{1}{\text{sen } \alpha} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\sec \alpha) = +\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1} \quad (\forall r, \text{ ya sea entero o real.}) \quad (\text{II.25})$$

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x} \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}. \quad (\text{II.27})$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} \right] \frac{1}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Ejemplo

Para $n \equiv$ número entero, pruebe que: $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$.

$$f(x) \equiv x^n, \quad f(x + \Delta x) \equiv (x + \Delta x)^n,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) \equiv \frac{d}{dx} (x)^n &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ (x + \Delta x)^n - (x)^n \} \cdot \frac{1}{\Delta x}, \end{aligned}$$

desarrollando $\{(x + \Delta x)^n - (x)^n\}$,

$$\begin{aligned}\frac{d[x^n]}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{x^n + n x^{n-1} \Delta x / 1! + n(n-1) x^{n-2} [\Delta x]^2 / 2! + \dots - (x)^n\}}{\Delta x}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{n x^{n-1} \Delta x / 1! + n(n-1) x^{n-2} [\Delta x]^2 / 2! + \dots\}}{\Delta x}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} (\Delta x) / 2! + \dots\},\end{aligned}$$

tomando el límite, obtenemos:

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

Ejemplo

Usando la regla de Leibnitz, encuentre el valor de $\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x)$. Primero intentamos con el método usual:

$$\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) \operatorname{sen}(x + \Delta x) - x \operatorname{sen} x}{\Delta x},$$

ordenando esta expresión:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{[x \operatorname{sen}(x + \Delta x) - x \operatorname{sen} x] + \Delta x \operatorname{sen}(x + \Delta x)}{\Delta x} \right\}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x \operatorname{sen}(x + \Delta x) - x \operatorname{sen} x}{\Delta x} \right\} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta x \operatorname{sen}(x + \Delta x)}{\Delta x} \right\},\end{aligned}$$

sacando x, fuera del límite en el primer término,

$$x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \right\} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{\operatorname{sen}(x + \Delta x)\},$$

y recordando la expresión de la derivada de la función seno, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x) = x \cos x + \operatorname{sen} x.$$

A continuación encontraremos este mismo resultado pero usando la regla de Leibnitz, para ello identificamos $f(x) \equiv x$, y $g(x) \equiv \operatorname{sen} x$. Aplicando la fórmula y recordando los valores de la derivada de $\operatorname{sen} x$ y x , tenemos:

$$\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x) = x \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x + \frac{dx}{dx} \operatorname{sen} x, = x \cos x + \operatorname{sen} x$$

Ejemplo

Encontrar el valor de $\frac{d}{dx} \sqrt{x}$.

$$\frac{d \sqrt{x}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \right\},$$

multiplicando ambos miembros por el mismo factor:

$$\begin{aligned} \frac{d \sqrt{x}}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}][\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}]}{[\Delta x][\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}]} \right\}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{[x + \Delta x] - x}{[\Delta x][\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}]} \right\}, \end{aligned}$$

simplificando:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{[\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}]} \right\},$$

y tomando el límite:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Este resultado coincide con la fórmula dada para la derivada de x^r donde r es un número real cualquiera, en particular $1/2$.

Aplicaciones de la derivada en la cinemática de una partícula.**Ejemplo**

Calcular explícitamente la velocidad en un instante t cualquiera, usando la expresión para $x(t)$ dada en la ecuación II.7.

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x(t + \epsilon) - x(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[x_0 + v_0 \cdot (t + \epsilon)] - [x_0 + v_0 \cdot t]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \epsilon}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_0 = v_0. \end{aligned}$$

Este resultado indica que la expresión $x(t)$ que aparece en la ecuación II.7, efectivamente corresponde al movimiento de una partícula con velocidad constante v_0 (i.e. independiente del tiempo). $\square$

Ejemplo

La altura de un objeto en caída libre, está dada por:

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2} g t^2.$$

Usando esta expresión y la definición de la velocidad, ecuación II.7, calcule la velocidad en un instante t cualquiera.

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z(t + \epsilon) - z(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[z_0 - \frac{1}{2} g \cdot (t + \epsilon)^2] - [z_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2]}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} g \cdot \epsilon \cdot (2t + \epsilon)}{\epsilon} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g \cdot (2t + \epsilon)}{2} = -g t \end{aligned}$$

La velocidad instantánea decrece linealmente a medida que transcurre el tiempo. El signo negativo de la velocidad indica que la partícula se está desplazando en el sentido negativo del eje z .

Sin embargo, la *rapidez* —definida como el módulo de la velocidad de la partícula—, aumenta a medida que transcurre el tiempo: $|v(t)| = g t$.

El movimiento descrito por la función $z(t)$ de este ejemplo corresponde a la caída libre (es decir, sin que otras interacciones actúen durante el trayecto), de una partícula en el campo gravitacional terrestre desde una altura z_0 .

Si la velocidad de una partícula cambia a medida que transcurre el tiempo, entonces la partícula tiene una *aceleración*. $\square$

Si la inclinación de la tangente a la curva que representa la posición de un objeto a través del tiempo *no* muestra cambios *abruptos*, afirmamos que la velocidad instantánea está bien definida en cada punto de la trayectoria.

Cualquier variación abrupta de la pendiente en un punto del gráfico posición versus tiempo revela la existencia de un cambio repentino en la magnitud de la velocidad. El valor de la tangente (o la velocidad) en la vecindad de este punto, depende del lado por el cual nos aproximemos a ella. En definitiva no tiene un valor único.

En cualquiera de estas situaciones, tenga o no cambios abruptos, siempre podemos graficar la velocidad en función del tiempo.

II.5. ACELERACION

II.5.1. Definición

En la sección anterior definimos la velocidad como la inclinación de la tangente a la curva $x(t)$ versus t . Analogamente, en un gráfico *velocidad* versus *tiempo*, definimos la aceleración como la inclinación de la tangente a la curva que determina la velocidad en cada instante.

La aceleración se define como la razón entre el cambio de velocidad y el intervalo en el cual ésta ocurre.

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (\text{II.28})$$

Para estudiar las propiedades de la aceleración, definida de este modo, comenzamos, como es usual, por el caso más sencillo.

De acuerdo a esta estrategia, inicialmente *no* consideramos cambios arbitrarios de velocidad como el que muestra la Figura a continuación, por las dificultades matemáticas que involucra.

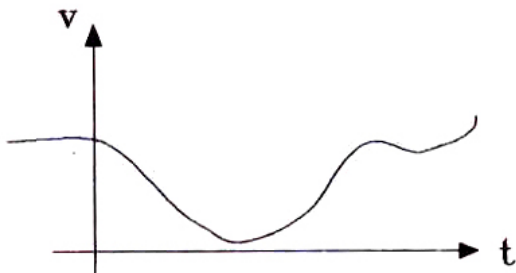


Figura II.15: Gráfico de *velocidad* versus *tiempo* para una aceleración que varía en el tiempo. Las trayectorias con aceleración constante corresponden a una recta en este gráfico. La inclinación de la recta nos da el valor de la aceleración.

A continuación nos referimos a las dimensiones de la aceleración y enseguida comenzamos con el caso de *aceleración constante*.

II.5.2. Dimensiones y unidades. (SI)

$$[a] \equiv \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \left[\frac{L}{T^2} \right] = \frac{(m/s)}{s} = m/s^2.$$

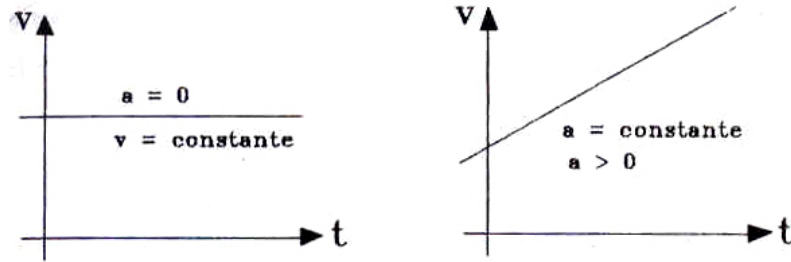


Figura II.16: Gráfico de *velocidad constante* versus *tiempo* y *velocidad* versus *tiempo* con aceleración constante.

La dimensión de longitud se escribe como $[L]$ y la dimensión correspondiente al tiempo, como $[T]$.

II.5.3. Aceleración constante

Como la aceleración es, por definición, la inclinación de la tangente a la curva *velocidad* versus *tiempo*, el caso particular de una aceleración constante queda representado, en este tipo de gráfico, por una línea recta.

A partir de la definición de aceleración:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

obtenemos la expresión para la velocidad. Para acortar los cálculos suponemos el origen del tiempo en $t_0 = 0$. Despejando la velocidad de la fórmula anterior, llegamos a:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow a \cdot t = v - v_0,$$

donde reemplazamos t_1 por t , un tiempo arbitrario, puesto que la pendiente de la curva es una sola y no depende del valor que tome t . De aquí tenemos:

$$v = v_0 + a \cdot t. \quad (\text{II.29})$$

Esta expresión nos da la velocidad en el instante t , bajo el supuesto que $a = \text{constante}$ y $t_0 = 0$.

II.5.4. La posición en función del tiempo si la aceleración es constante

Antes de calcular la distancia recorrida hasta el instante t , necesitamos calcular la velocidad media $\bar{v}$, para un movimiento con una aceleración constante.

Recordemos que, por definición, la velocidad media es la velocidad constante con la cual un móvil debe viajar para recorrer *la misma distancia* que en el caso dado, empleando el mismo tiempo. Cuantitativamente la velocidad media es $\bar{v} = x/t$, con ($x \equiv$ distancia recorrida en el intervalo de tiempo t). De aquí obtenemos:

$$x = \bar{v} t. \quad (\text{II.30})$$

La expresión $\bar{v} \cdot t$ tiene *dimensiones de distancia*.

$$\bar{v} \cdot t \equiv \frac{[L]}{[T]} \cdot [T] = [L].$$

Por otra parte, sabemos que el área bajo la curva en un gráfico *velocidad* versus *tiempo* representa la distancia recorrida. En el caso de aceleración constante, entonces la distancia recorrida es el área bajo el trapecio de la Figura II.17, y su valor es, de acuerdo al resultado que obtuvimos en el capítulo anterior:

$$\frac{1}{2}(v + v_o) \cdot t = \text{distancia recorrida en el tiempo } t \equiv x.$$

Esta distancia debe ser –por definición de velocidad media–, la misma que recorrió el móvil con velocidad constante $\bar{v}$,

$$\frac{1}{2}(v + v_o) \cdot t = \bar{v} t = x, \quad (\text{II.31})$$

de la primera igualdad se obtiene la expresión para la velocidad media.

La velocidad media de una partícula moviéndose con aceleración constante es:

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_i}{2}. \quad (\text{II.32})$$

Los gráficos *velocidad* versus *tiempo*, para los casos de aceleración constante, son líneas rectas cuya pendiente indica la magnitud de la aceleración: si la aceleración es nula, el gráfico es una línea horizontal. Este es un resultado similar al obtenido en un gráfico *desplazamiento* versus *tiempo* para un móvil con velocidad constante.

Si la aceleración cambia en el tiempo, la pendiente en el gráfico *velocidad* versus *tiempo* cambia y la recta se transforma en una curva. El método para encontrar la distancia recorrida –área bajo la curva–, es el mismo pero su expresión matemática no es simple.

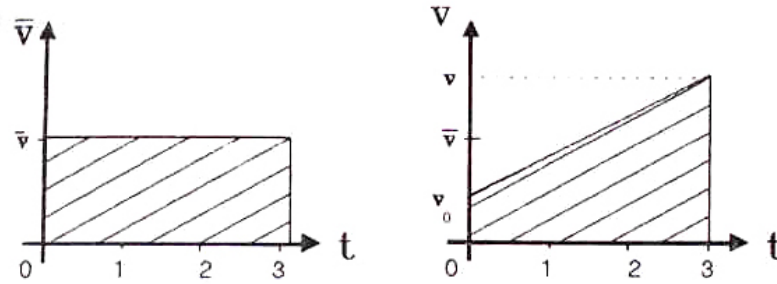


Figura II.17: En la Figura se indica el área bajo la curva para el caso *aceleración nula* y *aceleración constante*. En este último caso el área achurada corresponde a un trapecio cuyas bases son v y v_0 , y su altura t .

Retornando a la expresión encontrada para la distancia recorrida: $x = \bar{v} \cdot t$, y reemplazando aquí el resultado obtenido para la velocidad media, tenemos:

$$x = \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

pero la velocidad, en cualquier instante, está dada por $v = v_0 + at$

$$x = \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + a \cdot t + v_0) \cdot t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (\text{II.33})$$

Revisamos las dimensiones en cada uno de los términos de esta última ecuación:

$$[x] = L,$$

$$[v_0 \cdot t] = \left[\frac{L}{T} \cdot T\right] = L,$$

$$\left[\frac{1}{2} \frac{L}{T^2}\right] \cdot [T^2] = L.$$

$1/2$ es un número y *no* tiene dimensiones.

Los números que aparecen como factores frente a una cantidad física no tienen dimensiones.

II.5.5. Fórmulas de cinemática en una dimensión y con aceleración constante.

$$a = \text{constante}, \quad t_o = 0$$

$$x = x_0 + \bar{v} \cdot t \quad (\text{II.34})$$

$$v = v_o + a \cdot t \quad (\text{II.35})$$

$$x = x_0 + v_o t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad (\text{II.36})$$

$$2 a (x - x_0) = v^2 - v_o^2 \quad (\text{II.37})$$

En todas estas fórmulas, con excepción de II.37, el tiempo aparece explícitamente. *Esta última ecuación II.37, se obtiene a partir de las anteriores y se caracteriza por no contener el tiempo t .* Para llegar a dicha expresión debe operarse de la siguiente forma: de $v = v_o + a \cdot t$ podemos despejar el tiempo:

$$t = \frac{v - v_o}{a}.$$

Reemplazando t en la ecuación correspondiente a la distancia recorrida:

$$x = v_o \left(\frac{v - v_o}{a} \right) + \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v - v_o}{a} \right)^2,$$

y desarrollando cada uno de los términos de esta última expresión:

$$x = \frac{v \cdot v_o}{a} - \frac{1}{a} v_o^2 + \frac{1}{2a} v^2 - \frac{v_o \cdot v}{a} + \frac{1}{2a} v_o^2$$

$$x = \frac{1}{2a} (v^2 - v_o^2), \quad \text{o mejor}$$

$$2 a \cdot x = v^2 - v_o^2$$

Esta última fórmula es la ecuación II.37. Como acabamos de mostrar, esta ecuación *es una combinación de las anteriores*.

II.6. EJEMPLOS.

Ejemplo

Un auto de carrera acelera desde $v = 0$ hasta alcanzar una velocidad de 240 km/h en una distancia de sólo 1/4 de kilómetro. ¿Cuál es el valor de su aceleración?

Datos:

$t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $v_f = 240$ km/h, $a = \text{cte}$.

Si conocemos la distancia que recorre y la velocidad que alcanza en dicha distancia, debemos usar la ecuación II.37 para despejar directamente la aceleración.

$$2a \cdot x = v^2 - v_0^2,$$

$$a = \frac{v^2}{2x} = \frac{(240)^2}{2 \cdot (1/4)} \left[\frac{(\text{km/h})^2}{\text{km}} \right].$$

Las unidades empleadas oscurecen la magnitud de la aceleración encontrada. Expresémosla en m/s^2 .

$$a = 2 \cdot (240)^2 \frac{\text{km/h}}{\text{h}} = 2 \cdot (240)^2 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s} \cdot 3600 \text{ s}},$$

de aquí se obtiene el valor numérico de la aceleración,

$$a = 2 \cdot \left[\frac{240}{3600} \right]^2 \cdot 1000 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 40/3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

pero la aceleración de gravedad, g , es aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$, por lo tanto, la aceleración del automóvil en la partida es de $a = 40/3 \text{ m/s}^2 \approx \frac{4}{3} g$.

Una estimación para el valor de la máxima aceleración que se puede comunicar a un automóvil sin que *resbale* es de $\sim 1.5 g$. En realidad este valor es, tal como se menciona, sólo una estimación; depende de otros parámetros, como el tamaño y naturaleza de la superficies que están en contacto, si existió resbalamiento previo...etc. $\square$

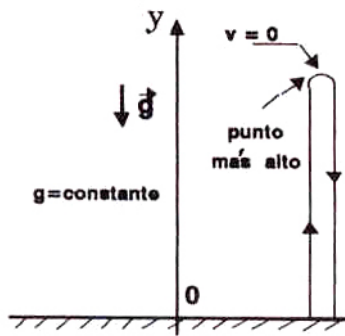
Una vez que asignamos –por conveniencia– un sentido positivo a nuestro eje de coordenadas, las aceleraciones pueden ser positivas (+) o negativas (desaceleraciones, (–)), dependiendo si coinciden con el sentido del eje coordenado o no.

Es necesario recordar que la física del problema, es decir lo que determina el comportamiento de una partícula en una cierta situación, no depende del sentido (+) o (-) asignado arbitrariamente al eje.

Un ejercicio típico es el de una pelota lanzada al aire. (No considere la viscosidad provocada por el aire.)

Una vez disparada, la experiencia nos indica que ésta disminuye constantemente su velocidad hasta que finalmente cambia de signo y la pelota retorna al piso nuevamente. El cambio de velocidad indica la presencia de una aceleración. En este caso *la aceleración mantiene constante su magnitud y sentido durante toda la trayectoria del objeto.*

Nuestra elección del sentido positivo implica que $a \equiv -g = -9,8 \text{ m/s}^2$. La orientación escogida para los ejes de referencia es arbitraria y la trayectoria del punto no puede depender de ella. Las matemáticas son autoconsistentes, por lo tanto, si en el desarrollo del problema, respetamos la convención adoptada, la respuesta será consistente con lo que se observa en la realidad.



Ejemplo

Encontrar el tiempo que tarda, en volver a su punto de lanzamiento, una partícula disparada verticalmente al aire.

El ejercicio propuesto, con el sistema coordenado estipulado en la Figura, es el siguiente:

Datos:

$v_0 \equiv$ velocidad de lanzamiento de un objeto, $y_0 = 0$, $g \equiv 9,8 \text{ m/s}^2$. $\square$

Supongamos que el cuerpo demora un tiempo T en volver a su punto de partida. En el instante que retorna al origen, se produce la siguiente igualdad en la ecuación II.36:

$$y = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2,$$

$$y(T) = 0 = v_0 T - \frac{1}{2}g T^2 \Rightarrow 2 \text{ soluciones: } T = 0, \quad T = \frac{2v_0}{g}$$

Ambas soluciones tienen un significado físico: $T = 0$ indica el instante en que la partícula abandona el piso y $T = 2v_0/g$, el tiempo que tardó en retornar al piso, después de alcanzar su altura máxima.

Cabe señalar que, en algunos ejemplos, una de las soluciones debe ser desechada por carecer de interpretación física.

Revisemos las dimensiones de esta última solución:

$$T = [T] = \left[\frac{L}{T} \right] \left[\frac{1}{L/T^2} \right] = T.$$

Usando la información acumulada, podemos averiguar el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. Llamemos τ a este instante:

$$v(\tau) = v_0 - g \cdot \tau$$

En ese instante, la velocidad debe ser nula puesto que si tuviera una pequeña componente positiva, podría aún elevarse un poco más y no estaríamos en el verdadero máximo de la altura. De aquí:

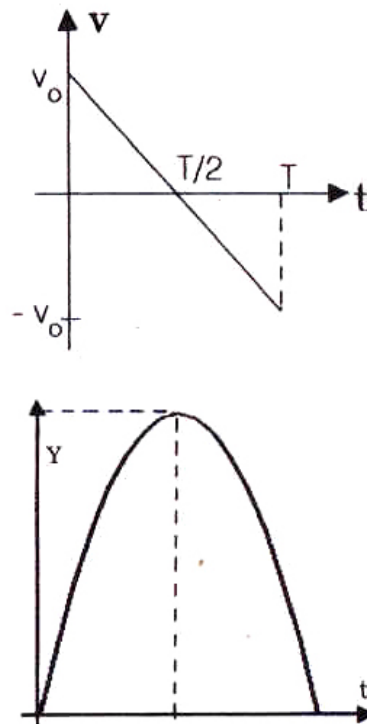
$$0 = v_0 - g \cdot \tau,$$

$$\tau = v_0/g \equiv \frac{T}{2}.$$

Ahora podemos calcular el valor de la altura máxima:

$$y_1 = v_0^2/g - \frac{1}{2}v_0^2/g = \frac{1}{2}v_0^2/g$$

Finalmente incluimos un gráfico de *velocidad* versus *tiempo* y *posición* versus *tiempo*. Notemos que la velocidad media es nula y que el área bajo la curva *velocidad* versus *tiempo*, también, si tenemos en cuenta los signos que aparecen. Del gráfico sabemos exactamente la posición en cada instante de la trayectoria. Casi siempre utilizaremos g , la aceleración de gravedad como una *constante*.



En realidad depende de la altura sobre la Tierra y también de la composición al interior del terreno donde se ubica el observador. Más adelante mostraremos que el error que se comete al hacer esta aproximación es despreciable, si la altura que alcanza el objeto es muy pequeña comparada con el radio de la Tierra.

Tampoco hemos considerado la fricción del aire. Este aspecto será propuesto como un ejercicio numérico para ser resuelto con el computador.

Ejemplo

Un tren puede acelerar a una razón de $a_1 = 20$ [cm/s] y desacelerar a 100 [cm/s]. Determine el tiempo mínimo que puede demorar este tren para ir de una estación a otra, situada a 2 km de distancia.

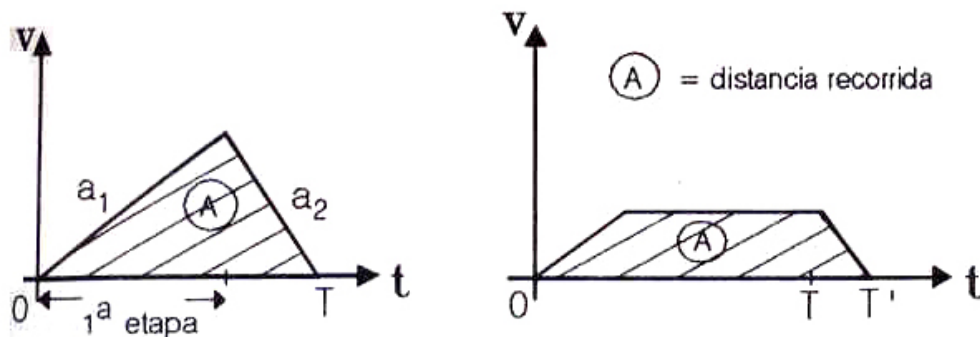


Figura II.18: Gráfico *velocidad* versus *tiempo* en dos situaciones posibles: el tren acelera por un cierto tiempo y después frena para alcanzar a detenerse frente a la estación y el caso en el cual mantiene una velocidad constante en un tramo intermedio.

Intuitivamente sospechamos que la máxima distancia recorrida en el mínimo de tiempo, ocurre cuando el tren acelera todo el tiempo hasta un cierto instante en el cual debe poner los frenos (desacelerar) para alcanzar a detenerse justo frente a la próxima estación.

Esta conjetura queda demostrada al interpretar el significado del área que encierra cada uno de los dos gráficos *velocidad* versus *tiempo* que se incluyen. Ambos involucran un mismo valor para el área –o sea, distancia recorrida–, pero el primero lo hace en un intervalo menor.

Resolveremos este problema en tres formas diferentes.

Método gráfico

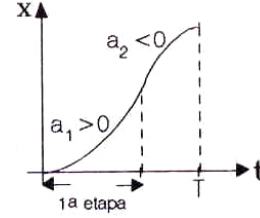
Designamos la distancia a recorrer como $L = 2,000$ m. Otros datos son la aceleración $a_1 = 0,2$ m/s² y la desaceleración $a_2 = -1$ m/s². Con ellos podemos dibujar el gráfico

velocidad versus tiempo. La base del triángulo es T , el tiempo buscado, que lo descomponemos en $T = t_1 + t_2$, donde t_1 es el tiempo durante el cual el maquinista acelera y t_2 el intervalo en el cual desacelera.

La altura h del triángulo se determina de la siguiente forma: $h = t_1 \tan \alpha = t_2 \tan \beta$. Ahora, usando trigonometría y la definición de aceleración como la pendiente en el gráfico $v(t)$ versus t , tenemos:

$$a_1 \equiv \tan \alpha, \quad -a_2 \equiv \tan (\pi - \beta) = -\tan \beta.$$

$$\text{Por lo tanto: } T = t_1 + t_2 = h \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|} \right].$$



El área del triángulo es $L = \frac{1}{2} h T$, y reemplazando h por el valor obtenido en función de las aceleraciones tenemos:

$$T^2 = 2 L \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|} \right]. \square$$

Método analítico

A continuación resolvemos el problema en forma analítica, recordando que *ocurren dos aceleraciones distintas* y, como las ecuaciones que describen el movimiento:

$$i) \quad x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2$$

$$ii) \quad v_f = v_0 + a(t - t_0)$$

son válidas solamente para el caso de aceleración constante, debemos usarlas dos veces consecutivas, cambiando el valor de la aceleración.

• Primera etapa

Condiciones iniciales:

$v_0 = 0$ Dato. El tren parte del reposo.

$x_0 = 0$ Nuestra elección para el origen de coordenadas.

$t_0 = 0$ Definición del instante inicial.

Las dos ecuaciones de movimiento, incluyendo estas condiciones iniciales, se transforman en:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad (a_1 > 0). \quad (\text{II.38})$$

Hemos designado t_1 al instante cuando el maquinista comienza a desacelerar.

$$v_{f_1} = a_1 t_1 \quad (\text{II.39})$$

Tenemos dos ecuaciones y tres *incógnitas*: v_{f_1} , t_1 , x_1 . Como existen más incógnitas que ecuaciones, no podemos resolverlas. Necesitamos más ecuaciones.

- Segunda etapa.

Debemos escribir nuevamente las ecuaciones de movimiento, recordando que las condiciones iniciales en esta etapa (indicadas en la columna de la izquierda) son los valores que alcanzan las variables al final de la primera etapa.

$$\begin{aligned} x_{\text{inicial}} &= x_1, \quad \text{además} \quad x_{\text{final}} \equiv x_2 = L, \\ t_{\text{inicial}} &= t_1, \quad v_{\text{final}} = v_{f_2} = 0, \\ v_{\text{inicial}} &= v_{f_1} \end{aligned}$$

Con estas condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento dan el siguiente resultado para el instante $t = T$, cuando el tren se detiene:

$$L - x_1 = v_{f_1}(T - t_1) - \frac{1}{2}a_2(T - t_1)^2. \quad (\text{II.40})$$

Una segunda ecuación se obtiene al imponer que la velocidad final en esta etapa sea nula: el tren se detiene en B, $v_{f_2} = 0$.

$$v_{f_2} \equiv 0 = v_{f_1} - a_2(T - t_1),$$

$$\text{como } v_{f_1} = a_1 t_1,$$

$$0 = a_1 t_1 - a_2(T - t_1). \quad (\text{II.41})$$

Tenemos *cuatro ecuaciones*: las dos obtenidas en la primera etapa y las dos del segundo tramo. Las incógnitas son también cuatro: (v_{f_1}, t_1, x_1, T) . Despejando $(T - t_1)$ de la última ecuación [II.41], se tiene $(T - t_1) = [a_1/a_2] t_1$, y reemplazando en la ecuación anterior, [II.40], obtenemos:

$$L - x_1 = \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2 - \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2. \quad (\text{II.42})$$

Substituyendo x_1 por su valor en función de t_1 de la ecuación II.38, obtenemos el valor de L en función de t_1 :

$$\begin{aligned} L - \frac{1}{2} a_1 t_1^2 &= \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2, \\ \text{ordenando, } 2L &= a_1 \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) t_1^2, \\ t_1 &= \left[\frac{2La_2}{a_1(a_1 + a_2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Verifiquemos que la dimensión corresponde efectivamente a la de un tiempo:

$$\left[\frac{2La_2}{a_1(a_1 + a_2)} \right] = \frac{L \cdot \frac{L}{T^2}}{L/T^2 [L/T^2 + L/T^2]} = \frac{L}{L/T^2} = T^2.$$

El resto de las incógnitas: t_1 , T (que es el tiempo buscado), v_{f_1} y x_1 , podemos despejarlas con las ecuaciones restantes.

Para comparar con nuestro resultado anterior, despejaremos T .

De la ecuación II.41 obtenemos T en función de t_1 :

$$T = \frac{a_1 + a_2}{a_2} t_1,$$

reemplazando en esta ecuación la expresión para t_1 , se comprueba que ambos resultados coinciden:

$$T = \frac{a_1 + a_2}{a_2} \left[\frac{2L}{(a_1 + a_2)} \frac{a_2}{a_1} \right]^{1/2} = \left\{ 2L \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{|a_2|} \right] \right\}^{1/2}. \square$$

Es muy conveniente, en casos como éste en que se abusa del álgebra, comprobar el resultado en situaciones extremas, más simples, y que constituyan un caso particular del anterior donde el resultado aflore con menos esfuerzo. De esta forma, contamos con un medio independiente para verificar si hemos cometido algún error en nuestro desarrollo.

Veamos si este resultado funciona en algún caso extremo. Supongamos que el tren tiene unos frenos extraordinariamente potentes y que puede detenerse casi instantáneamente, sin importar el valor de la velocidad que haya adquirido hasta ese momento. Sin mirar las ecuaciones, podemos deducir que, en este caso, el tren puede permanecer acelerando hasta el instante mismo en que haga su entrada en la estación de la ciudad próxima, justo entonces frenará y se detendrá inmediatamente.

Este caso corresponde, en las ecuaciones a poner $|a_2| = \infty$, o mejor, un valor muy grande comparado con a_1 . Con esta aproximación obtenemos que $1/|a_2| \ll 1/a_1$ y por

lo tanto $1/|a_2| + 1/a_1 \approx 1/a_1$. Reemplazando esta aproximación en la expresión para T , resulta:

$$T = [2L/a_1]^{1/2},$$

que es lo esperado en este caso extremo, $T = t_1$.

Es imposible detener un tren de este modo, para que ello ocurra deberíamos ser capaces de disipar una cantidad inmensa de energía en muy corto tiempo. Pero este inconveniente no está incluido en las ecuaciones que hemos usado hasta ahora y por tanto no genera ninguna contradicción.

Ejemplo

Se incluye un desarrollo alternativo para resolver el ejemplo anterior.

Hacemos uso de la ecuación II.37, donde el tiempo no aparece explícitamente:

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{era}} \text{ Etapa} & 2 a_1 x_1 = v_{f_1}^2, \\ 2^{\text{da}} \text{ Etapa} & -2 a_2 (L - x_1) = 0 - v_{f_1}^2. \end{array}$$

Las constantes que aparecen aquí están definidas en el ejemplo anterior. Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas x_1, v_{f_1} . Sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$a_1 x_1 - a_2 (L - x_1) = 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{a_2 L}{a_1 + a_2}.$$

A partir de este valor se encuentra t_1 :

$$v_{f_1} = a_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{f_1}}{a_1} = \frac{(2a_1 x_1)^{1/2}}{a_1} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \left[\frac{2a_2 L}{a_1(a_1 + a_2)} \right]^{1/2}.$$

En la 2^{da} **Etapa** tenemos:

$$v_{f_2} = 0 = v_{f_1} - a_2 (T - t_1) \quad \Rightarrow \quad T - t_1 = \frac{(2a_1 x_1)^{1/2}}{a_2} = \left[\frac{2a_1 L}{a_2(a_1 + a_2)} \right]^{1/2},$$

$$T = \left[\frac{2L}{a_1 + a_2} \right]^{1/2} \left\{ \left[\frac{a_1}{a_2} \right]^{1/2} + \left[\frac{a_2}{a_1} \right]^{1/2} \right\}.$$

Compruebe que este resultado es el mismo obtenido anteriormente.

Compruebe que si $a_1 = 0$, o $a_2 = 0$, $\Rightarrow T \rightarrow \infty$, puesto que estos casos equivalen a que la locomotora no puede empezar a moverse ($a_1 = 0$) o que no tiene frenos ($a_2 = 0$). En ambos casos la solución matemática del problema es que el tren no se mueva.

Compruebe que si $a_2 \rightarrow \infty$, entonces $T \rightarrow [2L/a_1]$.

En resumen, podemos concluir que el método gráfico es el más sencillo y directo para resolver este problema.

II.7. VISCOSIDAD

Es sabido que la velocidad adquirida durante la caída libre a través de la atmósfera, no aumenta linealmente con el tiempo que demora su caída, como era de esperar, si suponemos que la aceleración gravitacional g , permanece constante.

Existe otra fuerza, proveniente del choque que experimenta el cuerpo con las moléculas que componen la atmósfera. Estos choques lo frenan y, en el caso de la caída libre, imponen un valor límite para su velocidad.

De no existir este efecto, las gotas de lluvia alcanzarían la Tierra con mucho mayor velocidad y los granizos se convertirían en verdaderos proyectiles mortales cayendo sobre nuestras cabezas.

Se deja propuesto resolver *numéricamente* el problema del paracaidista que se lanza desde un avión. La ecuación *propuesta* para el cambio de velocidad que experimenta el paracaidista durante su caída, es la siguiente:

$$\frac{d}{dt}v = g - c \cdot v/m \quad (\text{II.44})$$

La constante c es un número que se obtiene empíricamente y representa el coeficiente de arrastre o viscosidad del aire y su origen es el choque con las moléculas de la atmósfera que le quitan velocidad al objeto que cae. Este coeficiente depende de muchos factores como la superficie del objeto que cae, la temperatura del medio, las moléculas que lo componen ...etc.

Las dimensiones del parámetro c son [masa/tiempo], y un valor típico para un paracaidista es: $c \approx 12,5 \rightarrow 17,0$ [kg/m].

En forma numérica la derivada de la velocidad (o de cualquiera otra función) se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}. \quad (\text{II.45})$$

Para la velocidad que aparece a la derecha de la ecuación de movimiento en II.44, podemos usar el valor medio de la velocidad en ese intervalo $[v(t_{i+1}) + v(t_i)]/2$.

Introduciendo estas expresiones en la ecuación II.44, tenemos un algoritmo para encontrar la velocidad $v(t_{i+1})$ en función de $v(t_i)$.

Ejemplo (Revista **Quantum**, Julio–Agosto 1992, pag. 27.)

A continuación plantearemos un caso con aceleración variable y que es posible resolver siguiendo un método similar al descrito en esta sección.

Una hormiga sale de su nido y se aleja en línea recta con una velocidad que resulta ser inversamente proporcional a la distancia que la separa de su origen. Cuando la hormiga

está en el punto A, a una distancia de un metro del nido, su velocidad es de 2 cm/s. ¿Cuánto tiempo le tomará a la hormiga ir desde el punto A hasta B, situado a dos metros del nido?

Designamos el nido como el origen de coordenadas. De esta forma la velocidad es inversamente proporcional a la distancia recorrida, entonces:

$$v = \frac{k}{x}, \quad k = \text{constante de proporcionalidad.}$$

Para determinar la constante k , usamos las condiciones iniciales:

$$v_o = 0,02 \text{ m/s}, \quad x_o = 1 \text{ m}, \quad \Rightarrow k = 0,02 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right].$$

A continuación usaremos el método gráfico para resolver este problema.

Como no conocemos la velocidad en función del tiempo, no podemos estimar el tiempo necesario para cubrir la distancia desde A hasta B, a partir del área encerrada por esta curva.

El área bajo la curva *velocidad* versus *distancia*, puede ser calculada directamente a partir de los datos, pero no corresponde a una cantidad física conocida, como apreciamos a partir de sus dimensiones: $v(x) \times \Delta x = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$.

Si logramos ubicar una cantidad que tenga las dimensiones de tiempo y que sea posible graficarla, hemos resuelto el problema. La más directa es $1/v(x)$ versus x . A partir de las dimensiones del área encerrada bajo esta curva, tenemos: $1/v(x) \times \Delta x = \left[\frac{1}{\text{m/s}} \text{ m} \right] = [\text{s}]$.

En este gráfico la ordenada es $y \equiv 1/v(x) = x/k$, de modo que es la ecuación de una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es $1/k$. El valor del área encerrada por el trapecio que, a su vez corresponde al tiempo empleado en viajar entre A y B, es:

$$T_{A \rightarrow B} = \left[\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B} \right] \times \text{distancia recorrida} = \frac{x_B^2 - x_A^2}{2k}.$$

Solución numérica.

Es posible resolver este problema usando el método numérico propuesto a continuación. De hecho, se puede encontrar el valor de la posición en función del tiempo, para cualquier instante.

A partir de las diferencias finitas, la velocidad se define como:

$$\bar{v}_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t},$$

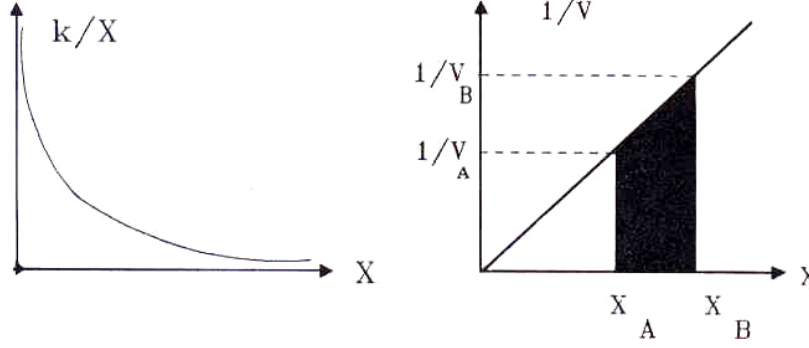


Figura II.19: Diagrama de la *velocidad* versus *desplazamiento* e *inverso de la velocidad* versus *desplazamiento* para la hormiga.

donde tomamos el mismo Δt para cada uno de los intervalos y asociamos una velocidad media $\bar{v}_i$ al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, cuyo valor es posible calcularlo en este caso, puesto que conocemos la velocidad en función de la posición:

$$\bar{v}_i = \frac{k}{x_i[\text{promedio}]} = \frac{k}{\frac{x_{i+1} + x_i}{2}} = \frac{2k}{x_{i+1} + x_i}.$$

Reemplazando esta última expresión en la definición de $\bar{v}$ obtenemos una fórmula que relaciona x_{i+1} con x_i

$$x_{i+1}^2 - x_i^2 = 2k \Delta t.$$

Si escribimos esta ecuación para cada uno de los intervalos de tiempo convenientemente, podemos encontrar su solución:

$$x_1^2 - x_o^2 = 2k \Delta t, \text{ con } \Delta t = \text{constante}$$

$$x_2^2 - x_1^2 = 2k \Delta t,$$

$$x_3^2 - x_2^2 = 2k \Delta t,$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x_N^2 - x_{N-1}^2 = 2k \Delta t,$$

$$\text{sumando: } x_N^2 - x_o^2 = 2k N \Delta t.$$

El tiempo transcurrido desde que la hormiga estaba en x_o hasta que llegó a la posición $x \equiv x_N$ es $t = N \Delta t$. Como x_N es un punto arbitrario, esta expresión se escribe, en forma general:

$$x^2(t) = x_o^2 + 2 k t.$$

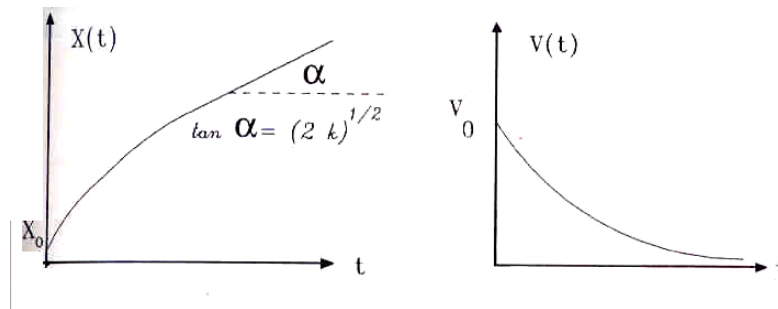


Figura II.20:

Hemos obtenido la posición en función del tiempo para este movimiento. Es más, esta expresión coincide con el resultado exacto, como se puede verificar usando cálculo diferencial.

Al conocer la velocidad como función de la posición, también conocemos la velocidad en función del tiempo, al reemplazar x por su dependencia en el tiempo:

$$\left[\frac{k}{v(t)} \right]^2 = \left[\frac{k}{v_o} \right]^2 + 2 k t,$$

y recordando que $k = v_o x_o$, despejamos $v(t)$,

$$v(t) = \frac{v_o}{\left[1 + \frac{2 v_o t}{x_o} \right]^{1/2}}.$$

Al graficar esta expresión, nos damos cuenta que hemos resuelto un caso particular de un móvil con *aceleración variable*.

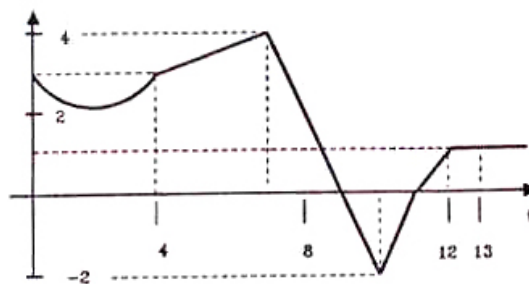
II.8. EJERCICIOS

- 1.- Un auto viaja entre dos ciudades A y B . De ida ($A \rightarrow B$) viaja a 90 km/hr y de vuelta ($B \rightarrow A$), por falta de visibilidad, lo hace a 60 km/hr.

¿Cuál es la *rapidez media* (no su velocidad media), para el viaje de ida y vuelta?

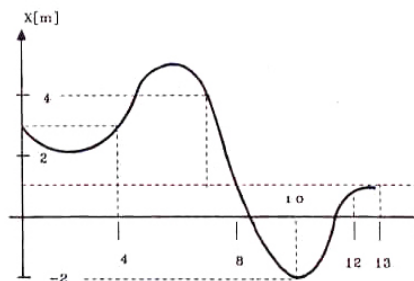
- 2.- Una persona conduce un automóvil durante 10 km a una velocidad de 90 km/h y luego otros 10 km a 70 km/h. ¿Cuál es la rapidez media durante el trayecto de 20 km?
- 3.- La Figura muestra la posición de una partícula en función del tiempo. La curva es parte de una parábola entre $t = 0$ y $t = 4$ s. Encuentre la velocidad media durante los siguientes intervalos de tiempo:

- a) $0 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$.
 b) $7 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$.
 c) $0 \text{ s} < t < 13 \text{ s}$.
 d) $10 \text{ s} < t < 13 \text{ s}$.



- 4.- A partir del gráfico de la Figura: En qué instantes o intervalos:

- a) La velocidad (instantánea) es cero.
 b) La velocidad es positiva.
 c) La velocidad es negativa.
 d) El módulo de la velocidad es máximo.
 e) La velocidad es constante.
 f) La aceleración es positiva.
 g) La aceleración es negativa.
 h) Si en el instante t_0 la partícula está en el origen, ¿en qué instante la distancia medida desde el origen será máxima?



- 5.- Basándose en la Figura:

- a) Estime la velocidad media en el intervalo de $2 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$.
 b) Encuentre la velocidad instantánea para $t = 10 \text{ s}$.
 c) ¿Indique para qué valor (o valores) de t , la velocidad instantánea de la partícula es nula?
 d) ¿En qué instante la rapidez es máxima?
 e) ¿En qué instante la aceleración es nula?

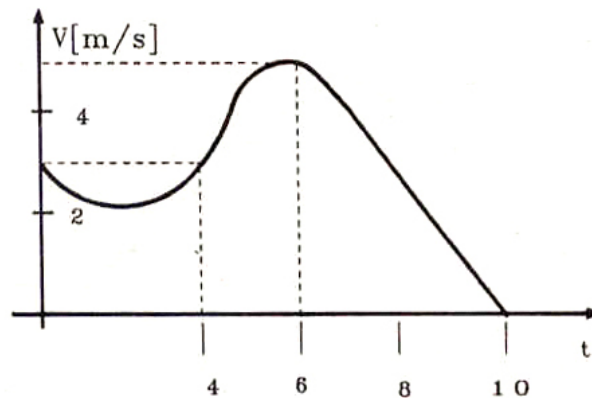


Figura II.21: Ejercicio # 5

Respuesta: e) En los instantes $t = 2$ s y $t = 6$ s.

- 6.– Dos trenes, A y B, están separados inicialmente por una distancia de 13 Km y viajan a su encuentro con la misma rapidez: 30 km/hr cada uno. Desde A parte una paloma mensajera que se encuentra con el tren B 10 minutos después. Calcule la velocidad con que vuela la paloma *con respecto al tren A*.
- 7.– En el gráfico se detalla la posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje x . De acuerdo a la información contenida en el gráfico, señale:
- Entre qué instantes el movimiento se realiza con velocidad constante.
 - En qué instante el móvil permanece detenido.
 - Calcule la distancia total recorrida desde $t = 0$ hasta $t = 15$ s.

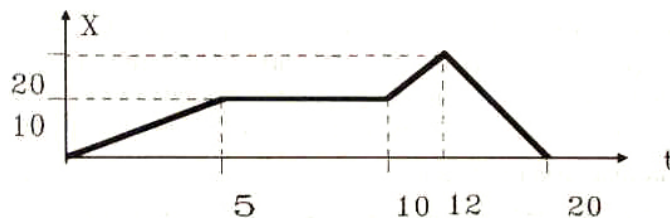


Figura II.22: Ejercicio # 7

- 8.– A partir del gráfico *velocidad* versus *tiempo* de una partícula que viaja a lo largo del eje x , señale:

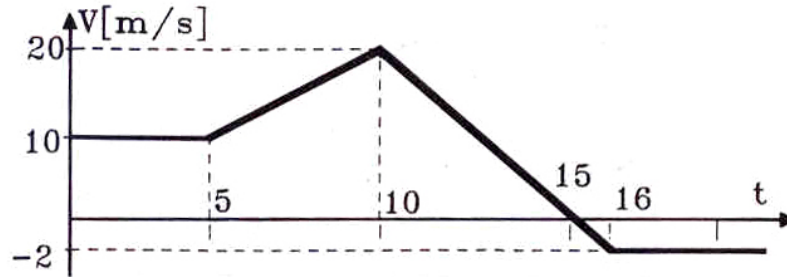


Figura II.23: Ejercicio # 8

- a) ¿Entre qué instantes el movimiento se realiza con velocidad constante?
 - b) ¿Cuándo es el movimiento acelerado?
 - c) ¿En qué instante el móvil está detenido?
 - d) Calcule la distancia total recorrida desde $t = 0$ hasta $t = 16$.
- 9.− Un automovilista (viajando de Norte a Sur en la Carretera Panamericana) pasa a exceso de velocidad frente al retén de Talca. 5 minutos más tarde sale en su persecución un policía motorizado a una velocidad de 107 Km/h.
- Lo alcanzó 87 minutos después que el infractor pasó frente al retén.
- ¿Cuál era la velocidad del infractor?
- 10.− Un pasajero corre con una velocidad de 4 m/s para lograr alcanzar el tren. Cuando está a una distancia d de la portezuela más próxima, el tren comienza a moverse con una aceleración constante $a = 0,4 \text{ m/s}^2$ alejándose del pasajero.
- a) Si $d = 12 \text{ m}$, y el pasajero sigue corriendo ¿Alcanzará a subirse al tren?
 - b) Haga un gráfico de la posición $x(t)$ del tren escogiendo $t = 0$ para $x = 0$. En el mismo gráfico dibuje la función $x(t)$ correspondiente al pasajero para diversos valores de la distancia de separación d , incluyendo $d = 12 \text{ m}$, y también hallar d_c , el valor crítico, para el cual el pasajero alcanza apenas el tren.
 - c) Para la separación crítica d_c .
 - ¿Cuál es la velocidad del tren cuando el pasajero lo alcanza?
 - ¿Cuál es su velocidad media en este intervalo?
 - ¿Cuál es el valor de d_c ?

- 11.– Considere dos varillas muy largas. Una horizontal, fija y la otra formando un ángulo ϕ , constante, con la primera y moviéndose verticalmente con rapidez v_0 constante. Determine la velocidad con que se mueve el punto de intersección de las dos varillas.



Figura II.24: Ejercicio # 11

- 12.– A continuación presentamos la bitácora de un viajero madrugador. Se pide que usted grafique su posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Se recomienda comenzar con la velocidad. Toda la historia relatada transcurre en una dimensión.

En t_0 , este individuo se levanta y camina hacia su auto con velocidad uniforme. En t_1 , sube al auto y calienta el motor hasta t_2 , instante en que comienza a acelerar uniformemente rumbo a la oficina.

En t_3 , alcanza una velocidad razonable que la mantiene hasta que, al ver una luz roja – en t_4 –, comienza a desacelerar uniformemente hasta detenerse en t_5 .

Cuando se enciende la luz verde, en t_6 , recuerda que olvidó traer un documento importante. Decide regresar, acelerando hasta el instante t_7 , adquiriendo una velocidad razonable que mantiene hasta t_8 , cuando comienza a desacelerar uniformemente (frena) hasta detenerse frente a la puerta de su casa.

- 13.– Se deja caer una piedra, sin velocidad inicial, desde el borde superior de un pozo y se espera hasta escuchar el ruido que ésta produce al chocar con el agua 5 s después.

Determine la profundidad del pozo, teniendo en cuenta que el valor de la velocidad del sonido es 340 m/s.

- 14.– Un monje sale de su Monasterio con la aparición del Sol en el horizonte y se dirige hacia una Villa cercana ubicada en un cerro. Camina todo el día, con breves descansos, llegando a la Villa al atardecer. Al amanecer del siguiente día, retorna al Monasterio siguiendo el mismo sendero del día anterior para llegar de regreso al atardecer.

¿Cuál es la probabilidad que al bajar pase por un mismo lugar a la misma hora a la cual pasó, en sentido contrario, el día anterior?

Indicación: Describa ambos trayectos en un solo gráfico e investigue el significado del punto de intersección.

- 15.– Dos móviles, A y B, se encuentran detenidos a una distancia de 30 m el uno del otro. Repentinamente, A parte del reposo con una aceleración constante de 10 m/s^2 , un segundo más tarde parte a su *encuentro* el cuerpo B, con una velocidad constante de 10 m/s .
 - a) ¿Qué distancia ha recorrido cada uno de ellos, hasta el instante en que se encuentran?
 - b) ¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse?
 - c) Grafique la posición de ambos móviles en función del tiempo, en un sólo gráfico.
- 16.– Panchito *suelta* una pelota desde una altura h . La pelota parte del reposo, choca más tarde con el suelo, rebotando con una rapidez *proporcional* a la que tenía en el instante que tocó el suelo. Es decir: $|V_{\text{rebote}}| = \alpha |V_{\text{llegada}}|$, con $(0 < \alpha < 1)$.
 La pelota sube y luego cae para volver a rebotar. La rapidez en el rebote cumple la misma relación señalada para el primer rebote. De esta forma, continúa el movimiento, con sucesivos rebotes, hasta que la pelota prácticamente ya no se mueve.
 Considerando que todo estos rebotes ocurren manteniendo el movimiento en la dirección vertical, calcule:
 - a) La altura que alcanza la pelota después del primer rebote.
 - b) La altura que alcanza la pelota después del segundo rebote.
 - c) La altura que alcanza la pelota después del k -ésimo rebote.
 - d) La distancia total recorrida desde que se soltó la pelota hasta el k -ésimo rebote.
 - e) La distancia total recorrida por la pelota hasta que se detiene (tome $k \rightarrow \infty$ en la expresión anterior)
- 17.– Dos locomotoras viajan con rapidez V_0 . En el instante $t=0$ están separadas por una distancia d , y viajan en la misma dirección pero en sentido opuesto. En dicho instante, de una de ellas, parte una paloma con velocidad U *con respecto a la tierra*, y tal que $(U > V_0)$. La paloma viaja en línea recta hasta alcanzar la otra locomotora. Una vez que la toca, *vuelve* hasta alcanzar la primera y así sucesivamente hasta que ambos trenes chocan.

a) Haga un gráfico de *posición* versus *tiempo*, que describa conjuntamente la trayectoria de los dos trenes y la paloma.

b) ¿Qué distancia recorrió la paloma desde que dejó el tren por primera vez hasta que éstos se encontraron?

Use los siguientes valores numéricos: $V_0 = 25$ km/h, $U = 30$ km/h y $d = 23$ km.

- 18.– Un automóvil puede aumentar su velocidad con una aceleración máxima a_1 y frenar con una desaceleración máxima a_2 . Cuando su velocidad es mayor que un valor v_1 , su consumo de combustible es q_1 lts/km. Si su velocidad es menor que v_1 , su consumo es de $q_0 = 2q_1$ lts/km .

En un viaje donde debe recorrer L km:

a) ¿Cómo se debe regular la velocidad del vehículo durante la trayectoria para recorrerla en un *tiempo mínimo* y con un *consumo máximo*? Explique su respuesta a través de un gráfico.

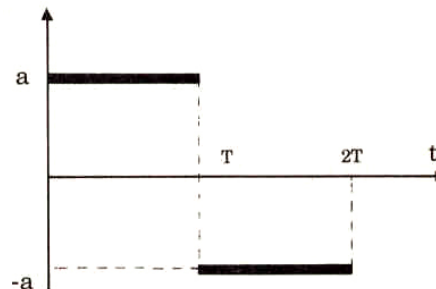
b) La misma pregunta, pero en el caso de interés: con un *tiempo y consumo mínimos*. ¿Calcule cuál es el consumo total en este caso? Use gráficos en su razonamiento.

- 19.– Una partícula parte del reposo y soporta una aceleración como la que se muestra en la Figura.

a) Dibuje el gráfico de *velocidad* versus *tiempo* y el gráfico *posición* versus *tiempo* para este movimiento.

b) ¿Cuál será su máxima velocidad durante los $2T$ s?

¿Qué distancia recorre durante este intervalo?



- 20.– Suponga que la altura de cierto proyectil en función del tiempo viene dada por la relación $z(t) = -v_0 \cdot (t - t_0)^2 + z_0$, con $z_0 = 125$ m, $t_0 = 5$ s y $v_0 = 5$ m/s.

a) Grafique la altura del proyectil en función del tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 12$ s.

b) ¿En qué instante el proyectil choca contra el suelo?

c) Encuentre gráficamente la velocidad instantánea (es decir, mida las pendientes de las tangentes) en los instantes $t=0$ s, $t=2$ s, $t=4$ s, $t=6$ s, $t=8$ s y $t=10$ s. Grafique su resultado.

- 21.– Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por:

$$z(t) = \frac{t}{1+t^2} \text{ [m]}$$

- a) Grafique $z(t)$ en el intervalo $-4 \text{ s} < t < +4 \text{ s}$.
 b) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} .$$

- c) Grafique $v(t)$.

- 22.– Suponga que la posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) viene dada por:

$$z(t) = t - 4 \cos t \text{ [m]}$$

- a) Grafique $z(t)$ en el intervalo $0 < t < 6 \text{ s}$.
 b) A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:
 i) ¿En qué instante la velocidad es nula?
 ii) ¿En qué instante la partícula se encuentra en el origen?
 iii) ¿En qué intervalos la velocidad es negativa?
 iv) ¿En qué intervalos la aceleración es positiva?
 c) Encuentre la velocidad instantánea en función del tiempo evaluando:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} .$$

- d) Grafique $v(t)$ encontrada en la parte anterior. A partir del gráfico responda las siguientes preguntas:
 i) ¿En qué instante la velocidad es nula?
 ii) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es negativa?
 iii) ¿En qué intervalos de tiempo la aceleración es positiva?
 (Compare las respuestas con aquellas de la parte b)).

- 23.– Usando geometría y las aproximaciones usuales para ángulos pequeños, demuestre que:

$$\frac{d \tan \theta}{d \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} .$$

Use el triángulo ΔABC de la Figura y recuerde que $\Delta \theta$ es muy pequeño.

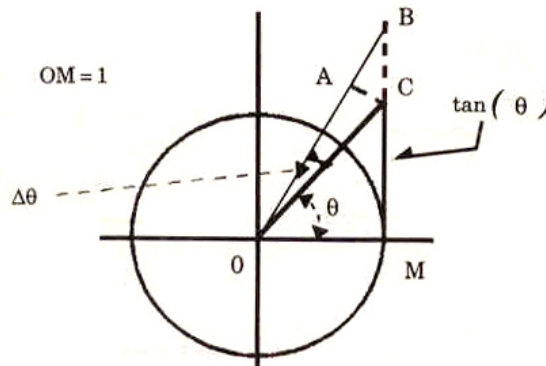


Figura II.25: Ejercicio # 23

24.- Para cada una de las expresiones $s(t)$, de la posición de una partícula en función del tiempo, encuentre, analíticamente, la velocidad instantánea.

- a) $s(t) = at^2 + bt + c$,
- b) $s(t) = at^\alpha$,
- c) $s(t) = a \cos(\omega t + \beta)$.

En las ecuaciones anteriores a, b, c, ω, α y β son constantes.

25.- La posición de una partícula en función del tiempo (medido en segundos) es:

$$x(t) = a \cos(\omega t).$$

- a) Encuentre, analíticamente, la velocidad de la partícula y su aceleración. Grafique $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en un mismo gráfico.
- b) Del gráfico anterior, encuentre la relación que existe entre la posición $x(t)$ y la aceleración $a(t)$.

26.- Desde un puente de 60 m de altura se deja caer una piedra. Una segunda piedra se arroja verticalmente hacia abajo 1 s más tarde. Ambas llegan simultáneamente al río. ¿Cuál fue la velocidad impartida inicialmente a la segunda piedra? Desprecie el roce del aire.

27.- La Figura muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo.

- a) Si en $t = 0$ s la partícula está en reposo, encuentre su velocidad en cada instante posterior. Haga un gráfico.

- b) Calcule el tamaño de las áreas I, II y III. ¿Qué unidades tienen? ¿Qué relación hay entre estas áreas y la parte a) de este problema?
- c) Repita lo hecho en la parte a) pero asumiendo que en el instante $t = 0$ la partícula tiene una velocidad $v_0 = -8 \text{ m/s}$. Grafique su respuesta.

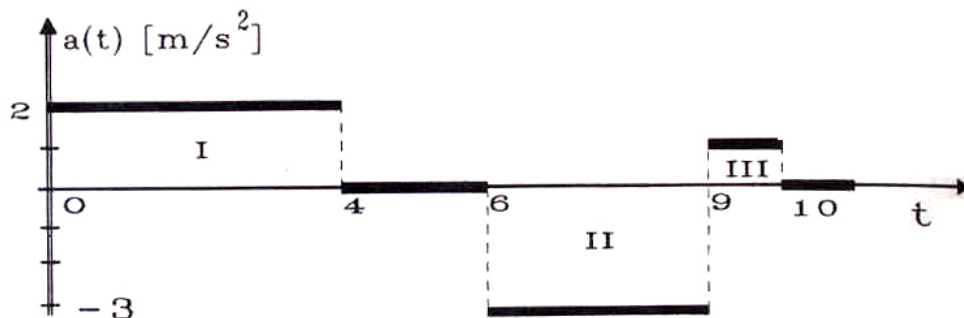


Figura II.26: Ejercicio # 27

- 28.– Para cada una de las siguientes expresiones de la aceleración $a(t)$ de una partícula (a en m/s^2 y t en s), encuentre la expresión más general para la velocidad $v(t)$ y la posición $x(t)$.
- $a(t) = a_0$, donde a_0 es una constante,
 - $a(t) = a_0 \cos \omega t$ con a_0 y ω constantes.
- 29.– Un cohete se dispara verticalmente, elevándose durante un minuto con una aceleración constante de 20 m/s^2 . En ese momento se agota su combustible y continúa moviéndose sólo bajo la acción de la aceleración de gravedad.
- ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?
 - ¿Cuál es el tiempo transcurrido desde que despegue hasta que vuelve a caer sobre la plataforma de lanzamiento?
 - Grafique la posición y velocidad en función del tiempo.
- 30.– Consideremos el movimiento de una esfera en un medio viscoso (en ausencia de fuerzas gravitacionales). La aceleración que sufre la esfera es proporcional a su velocidad pero en dirección contraria, es decir $\vec{a}(t) = -\eta \vec{v}(t)$, donde η es una constante. Supongamos que $\eta = 0,01 \text{ s}^{-1}$ y la velocidad inicial de la esfera $|\vec{v}_0| = 50 \text{ m/s}$. Encuentre numéricamente la distancia $s(t)$ recorrida por la esfera y gráfiquela. Para

resolver el problema note que si Δ es un pequeño intervalo, entonces:

$$\begin{cases} v(t + \Delta) \simeq v(t) + a(t) \Delta \\ s(t + \Delta) \simeq s(t) + v(t) \Delta \end{cases}$$

- 31.– En la tabla adjunta se muestran algunas de las marcas mundiales en distintas carreras cortas.

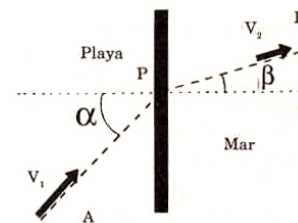
Un modelo simple para una carrera consiste en suponer que el corredor parte con aceleración constante a durante un periodo corto de tiempo T y luego continúa con velocidad constante $v_0 = aT$. De acuerdo a este modelo, en el caso de tiempos t mayores que T , la distancia x varía linealmente con el tiempo.

distancia	tiempo
50 yardas	5.1 s
50 metros	5.5 s
60 yardas	5.9 s
60 metros	6.5 s
100 yardas	9.1 s
100 metros	9.9 s

- Hacer un gráfico $x(t)$ a partir de los datos de la tabla. (1 yarda = 91.44 cm).
- Establecer una ecuación para la curva $x(t)$ de acuerdo con el modelo descrito y demostrar que para $t > T$ puede escribirse $x = v_0(t - T/2)$.
- Unir los puntos del gráfico mediante una recta y determinar su pendiente y el punto en que corta al eje t . Sabiendo que la pendiente es v_0 y el punto de corte citado $T/2$, calcular la aceleración a .
- La marca de los 200 m es 19.5 s. Discutir la aplicabilidad de este modelo a carreras de 200 m o más.

- 32.– Un salvavidas ubicado en el punto A en la playa escucha el grito de auxilio de un bañista ubicado en B . La velocidad máxima del salvavidas en la arena es v_1 y puede nadar con una velocidad v_2 .

Recordando que el salvavidas debe llegar lo antes posible al rescate, indique:



- ¿Qué trayectoria le tomará el menor tiempo posible, en cada uno de los siguientes tres casos?
- i) Si v_1 es muchísimo mayor que v_2 .
- ii) El caso inverso, v_2 es muchísimo mayor que v_1 .

iii) Cuando ambas velocidades son iguales.

Nota

Tome su decisión a partir del estudio de tres o cuatro puntos ubicados en la línea divisoria entre la playa y el mar. En cada caso calcule el tiempo empleado en recorrer la trayectoria total.

b) Cuando ambas velocidades son diferentes y no cumplen las relaciones extremas indicadas en la parte a), encuentre la posición del punto óptimo, P , en el cual el salvavidas debe ingresar al agua para recorrer el trayecto de A a B en el menor tiempo posible.

Demuestre que en estas condiciones se satisface la siguiente relación:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Esta expresión es análoga a la ley de Snell, que describe la refracción de un rayo de luz al pasar de un medio a otro diferente.

Cinemática 2 dimensiones

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

III

Capítulo III

CINEMATICA EN DOS DIMENSIONES

III.1. VECTORES

III.1.1. Representación de vectores en dos dimensiones

Hasta ahora hemos descrito el movimiento en una dimensión. En este caso basta una coordenada para identificar la posición de un punto. Obviamente, en dos dimensiones necesitamos dos números para localizarlo. Por ejemplo, para ubicar una calle en el mapa de la guía de teléfonos se dispone de dos datos, una letra y un número; con la letra se ubica la posición en el eje vertical y con el número, la posición del bloque en el eje horizontal. En otras palabras, al usar [A-16] como una coordenada, estamos identificando las letras del alfabeto con la línea vertical (*ordenada*) del mapa y los números con la coordenada horizontal (*abscisa*).

Para precisar la posición de un punto en el plano, debemos recurrir a un par de números reales. Necesitamos dar los dos números como un *par ordenado* para identificar su significado sin ambigüedades. Por convención, el primer número corresponde a la abscisa (eje horizontal) del punto a identificar y el segundo número a la ordenada (eje vertical). Usualmente, el punto con sus coordenadas respectivas se escribe como $P(x,y)$.

La recta que une el origen O con el punto P , se denomina el **vector $\overrightarrow{OP}$** , se escribe $\overrightarrow{OP}$, y contiene información acerca de la *dirección*, *sentido* y *magnitud* del vector.

La *dirección* es la línea que atraviesa los puntos O y P de la Figura, el *sentido* es la flecha que se instala en el extremo del trazo y la *magnitud*, es el largo del trazo, que también se denomina el módulo del vector.

La magnitud o módulo de un vector se indica mediante dos barras verticales a cada uno de los lados del vector: $|\overrightarrow{OP}|$. El módulo (o largo) del vector, es un número que se

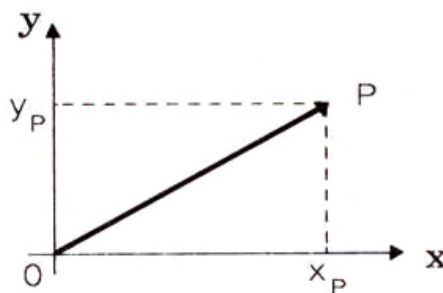


Figura III.1: Componentes Cartesianas de un vector. La proyección del vector en el eje x es la sombra que proyecta sobre dicho eje al trazar una perpendicular al eje x desde el extremo del vector. Lo mismo es válido para la proyección sobre el eje y.

obtiene usando el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{OP}| \equiv [x_P^2 + y_P^2]^{1/2}$$



Figura III.2: Representación gráfica de distintos vectores. En cada uno de ellos se indica una de las características de un vector: magnitud, dirección y sentido.

La magnitud de un vector es *siempre* un número real positivo. Dadas las coordenadas de los dos puntos extremos de un vector: (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , su valor se calcula de la siguiente forma:

$$|\vec{AB}| = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{1/2}.$$

donde $(x_B - x_A)$ representa la sombra que proyecta el vector $\vec{AB}$ sobre el eje-x. Análogamente, $y_B - y_A$ es la proyección de este vector sobre el eje-y.

Esta es la *forma gráfica* de representar un vector: mediante una flecha. Otra forma de identificarlo, es a través de las coordenadas de sus puntos extremos: *forma analítica*. Este método se define a continuación.

Un vector se representa por un par ordenado de números. En el primer casillero se inserta la proyección del vector sobre el eje-x, y en el segundo, su proyección sobre el eje-y. Cada una de estas proyecciones se obtiene haciendo la diferencia entre la coordenada correspondiente a la cabeza de la flecha y la coordenada de la cola de la flecha.

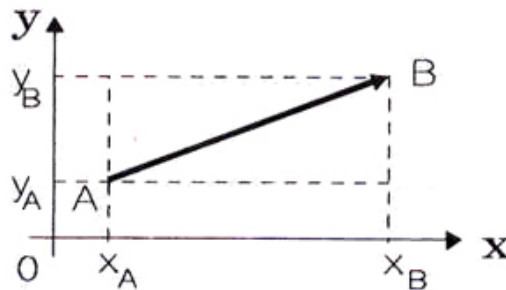


Figura III.3: Los vectores no comienzan necesariamente desde el origen. La Figura representa al vector $\overrightarrow{AB}$, indicando sus componentes que, como se señaló, corresponden a la diferencia entre la coordenada del punto final menos la coordenada de la cola de la flecha.

Por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP}$ de las Figuras II.1 y II.3, se pueden expresar mediante este método de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{OP} = [x_P - 0, y_P - 0] = [x_P, y_P], \quad \overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A].$$

NO se puede intercambiar el orden de los números dentro de un casillero, por ejemplo, reemplazar x_B por x_A . Tampoco se puede cambiar las componentes desde un casillero al otro. Si realizamos cualquiera de estas operaciones estamos describiendo otro vector, no el propuesto originalmente. El orden de los números dentro de cada casillero y el de los casilleros mismos es parte de la información contenida en la descripción analítica. Esto es lo que se denomina un par ordenado de números.

Ejemplo

A continuación demostramos que al cambiar el *orden* de los números x_A y x_B dentro del primer casillero, esta nueva componente identifica a otro vector, diferente del original $\overrightarrow{AB}$ señalado anteriormente.

El nuevo vector es:

$$\overrightarrow{A'B'} = [x_A - x_B, y_B - y_A] = [(-x_B) - (-x_A), y_B - y_A],$$

en la segunda igualdad se escribió, de acuerdo a la convención, la coordenada de la cabeza de la flecha menos la coordenada de la cola. Allí notamos que la componente x de la cola y de la flecha son *negativas*, es decir este vector es la reflexión especular del vector original $\overrightarrow{AB}$, como se indica en la Figura. $\square$

El vector

$$\overrightarrow{BA} = [x_A - x_B, y_A - y_B],$$

donde se ha cambiado el orden de ambas coordenadas, tiene la misma magnitud y dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$, pero *apunta en sentido opuesto*.

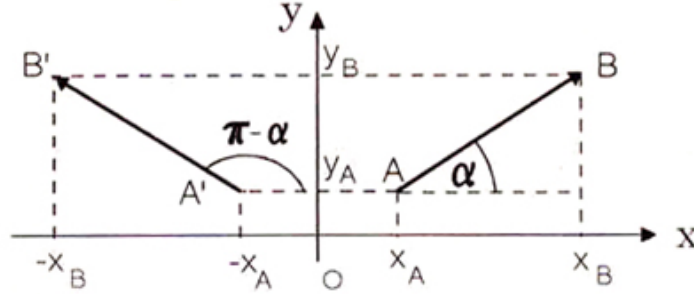


Figura III.4: La Figura representa al vector $A'B'$ y AB , indicando sus componentes. Se señala también el ángulo α que fija la *dirección* del vector.

La razón entre la proyección sobre el eje OY y sobre el eje OX, es la tangente del ángulo que forma este vector con la abcisa (eje horizontal).

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \quad (\text{III.1})$$

$$\tan(\pi - \alpha) \equiv \tan \alpha' = \frac{y'_B - y'_A}{x'_A - x'_B} = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\tan \alpha. \quad (\text{III.2})$$

Ejercicio

Compruebe que estas dos últimas ecuaciones son equivalentes a la igualdad trigonométrica $\tan \alpha = -\tan(\pi - \alpha)$. $\square$

Los números x_P e y_P en la representación analítica de $\overrightarrow{OP}$ se denominan, la componente x y la componente y , del vector $\overrightarrow{OP}$. Representan la sombra que proyecta este vector sobre el eje OX, (x_P) y sobre OY, (y_P) .

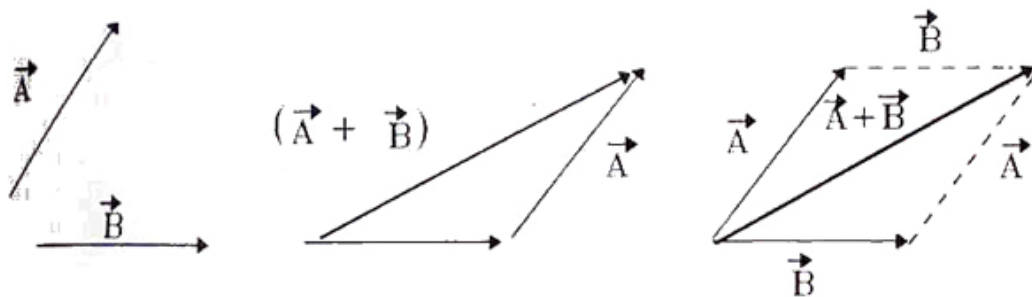


Figura III.5: Para sumar vectores basta poner una de las flechas a continuación de la otra. El vector suma es la flecha que va desde el origen del primer vector elegido hasta el final del segundo vector. En la Figura, a la derecha, se incluye el método del paralelogramo para sumar dos fuerzas.

III.2. ALGEBRA DE VECTORES

III.2.1. Método geométrico

Suma de vectores

Parece conveniente denominar los vectores con dos letras que indiquen su comienzo y fin, pero también es posible identificarlos mediante una sola letra, como lo hacemos a continuación.

Para sumar geoméricamente los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, debemos poner la cola de $\vec{B}$ a continuación de la cabeza de $\vec{A}$, la flecha que parte de la cola de $\vec{A}$ y termina en la cabeza de $\vec{B}$, es el vector suma $(\vec{A} + \vec{B})$.

Otra alternativa para encontrar el vector que representa la suma de dos vectores consiste en construir un paralelogramo con los dos vectores dados en el orden que se incluye a continuación:

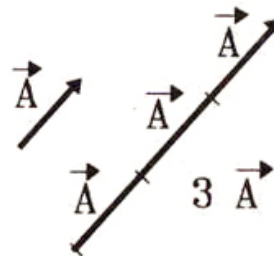
- 1.- Trasladamos paralelamente uno de los vectores, de modo que ambos tengan su origen (la cola de cada vector), en común (ver Figura [III.5]).
- 2.- Construimos un paralelogramo que tenga como lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
- 3.- La diagonal que parte del origen común es el vector $(\vec{A} + \vec{B})$.

A partir de este paralelogramo, se puede ver que $(\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{B} + \vec{A})$, es decir, la suma de vectores es **conmutativa**, no varía al cambiar el orden de los sumandos.

Producto de un vector y un número real

Otra operación que necesitaremos es la multiplicación de un vector por un número real. Por ejemplo: $3 \cdot \vec{A} \equiv \vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$.

En el caso general, cuando λ es un número real, positivo o negativo $\lambda\vec{A}$ es un vector que tiene la misma dirección de $\vec{A}$, pero su magnitud (largo) es $|\lambda|$ veces la magnitud del vector $\vec{A}$. Si $\lambda > 0$, se conserva el *sentido* que el vector tenía inicialmente. Si $\lambda < 0$ se invierte el sentido del vector.



Resta de dos vectores. Método geométrico

Este caso es equivalente a la *suma* de dos vectores, en la cual uno de ellos está multiplicado por $\lambda = -1$.

De acuerdo a la definición anterior $\vec{A}' \equiv (-1)\vec{A}$, y por lo tanto $\vec{B} + (-\vec{A}) = \vec{B} + \vec{A}'$. (Ver Figura).

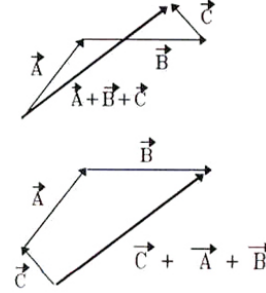
Figura III.6: El vector $(\vec{B} - \vec{A})$, se obtiene dibujando la diagonal del paralelogramo que comienza en la flecha del vector $\vec{A}$ y termina en la flecha del vector $\vec{B}$.

Suma de tres o más vectores

Para sumar más de dos vectores, se realiza la misma operación que para el caso de dos vectores: se toma un par de vectores cualquiera del grupo y se suman de acuerdo al método ya establecido; con esta operación obtenemos un nuevo vector. A este vector se le suma –usando el mismo método– otro vector cualquiera de los restantes, generando un nuevo vector y así sucesivamente hasta incluir todos los vectores que debíamos sumar.

Se puede verificar de la Figura que el resultado de esta operación es *independiente del orden* con que se haya realizado la operación suma.

Esta propiedad de la suma de vectores se denomina ASOCIATIVIDAD. Indica que no importa como se asocien los vectores para sumarlos, el resultado final es el mismo. En la Figura se detallan los pasos a seguir para sumar tres vectores: se toma un vector *cualquiera* del conjunto, a continuación de éste, se copia cualquiera de los otros dos, poniendo la cola de éste último a continuación de la cabeza del anterior, y se repite la misma operación con el vector restante. Al terminar, se traza un vector que vaya del origen del primer vector a la cabeza del último sumado. La resultante es el vector suma de todos ellos.



La asociatividad en la suma de tres vectores se expresa a través del paréntesis que agrupa a un par de ellos. Este paréntesis establece un orden para comenzar sumando esos dos vectores. Al vector resultante se le suma a su vez el tercero. La asociatividad de la suma de vectores afirma que el resultado de la suma es independiente del par de vectores por el cual se comenzó.

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

III.2.2. Método algebraico

En este caso usamos la identificación de un vector en dos dimensiones como un par ordenado de números. La suma de dos vectores es otro vector, cuya primera componente corresponde a la suma de los términos ubicados en el primer casillero y la segunda componente se obtiene sumando los números que aparecen en el segundo casillero de los vectores, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= [x_a, y_a], && \text{componentes del vector } \vec{A}, \\ \vec{B} &= [x_b, y_b], && \text{componentes del vector } \vec{B}, \\ \vec{A} + \vec{B} &\stackrel{\text{def}}{=} [x_a + x_b, y_a + y_b], && \text{suma de las componentes.}\end{aligned}\tag{III.3}$$

Producto de un escalar por un vector:

$$\lambda \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda x_a, \lambda y_a]. \quad (\text{III.4})$$

Nota

Un *escalar* es un número real. Se le denomina de esa forma para diferenciarlo de un vector.

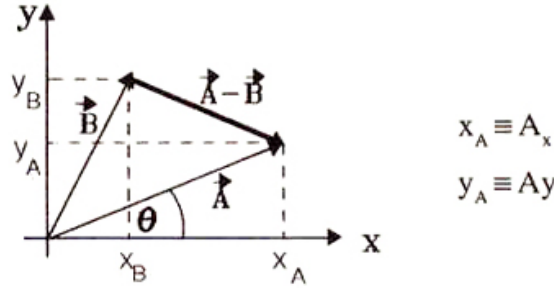


Figura III.7: La representación de los vectores mediante un par ordenado contiene la misma información que la representación geométrica. Cada operación (suma, resta... de vectores) tiene su expresión en ambos métodos.

La resta de dos vectores se define como la resta de sus respectivas componentes.

$$\vec{A} - \vec{B} = [x_a - x_b, y_a - y_b] \quad (\text{III.5})$$

En la representación analítica de los vectores, el número que se instala en el primer casillero, es la componente del vector en el eje x , (el largo del trazo que proyecta sobre el eje x). En el segundo casillero, el número representa el largo de la proyección del vector sobre el eje y .

Vectores unitarios

En física, además de la notación en componentes, se usan los *vectores unitarios*. La equivalencia entre los dos sistemas se define a continuación:

$$\vec{A} = [A_x, A_y] \stackrel{\text{def}}{=} A_x \hat{i} + A_y \hat{j}, \quad (\text{III.6})$$

donde $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son vectores *unitarios*, es decir vectores cuya magnitud (largo) es la unidad (*magnitud* = 1) y apuntan en la dirección positiva del eje x y del eje y , respectivamente. El número que multiplica a $\hat{i}$ es la *componente-x* del vector y el número que acompaña a $\hat{j}$ es la *componente-y* del vector.

Es una notación distinta para la misma representación analítica explicada anteriormente. Se usa con mucha frecuencia.

Resumen

Dos vectores son iguales si tienen las mismas componentes.

$$\vec{C} = [C_x, C_y], \quad \vec{B} = [B_x, B_y]$$

$$\text{Si } \vec{C} = \vec{B}, \implies C_x = B_x, \quad C_y = B_y.$$

$$\vec{A} \equiv [A_x, A_y] \equiv A_x \hat{i} + A_y \hat{j},$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad \text{largo del vector (módulo),}$$

$$A_x = |\vec{A}| \cos \theta, \quad \text{componente en el eje } x,$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \theta, \quad \text{componente en el eje } y,$$

$$\frac{A_y}{A_x} = \tan \theta,$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = [A_x, A_y] + [B_x, B_y]$$

$$\vec{C} = [A_x + B_x, A_y + B_y]$$

III.3. POSICION, VELOCIDAD Y ACELERACION.

III.3.1. Posición

La posición de la partícula en cada instante está determinada por un vector que la señala. A medida que la partícula cambia de posición en el tiempo, el vector se desplaza con ella. La dependencia de $\vec{x}$ en el tiempo, se indica $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

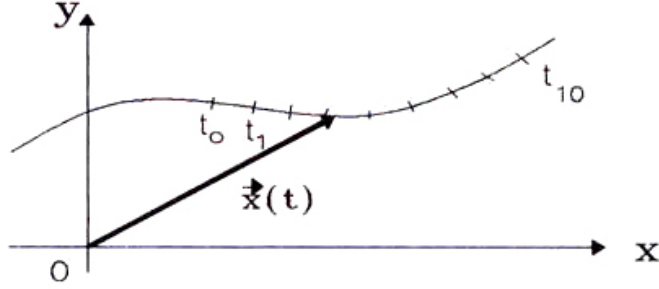


Figura III.8: A cada punto de la trayectoria de la partícula le asociamos un *número*, que corresponde al tiempo que indica el reloj del viajero. También se puede usar la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria para identificar cada uno de sus puntos.

III.3.2. Velocidad

Definición:

Se define como el desplazamiento dividido por el intervalo durante el cual ocurre dicho cambio,

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\{ \frac{\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \quad (\text{III.7})$$

escribiendo el vector en componentes,

$$= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\{ \frac{[x(t_2), y(t_2)] - [x(t_1), y(t_1)]}{t_2 - t_1} \right\},$$

y ahora restando las componentes respectivas, de acuerdo a la forma de operar establecida en la Sección anterior,

$$= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\{ \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \quad (\text{III.8})$$

Para encontrar el límite de una diferencia entre dos vectores en dos instantes de tiempo muy próximos entre sí, se debe calcular el límite de cada una de sus componentes en forma separada, como se ilustra a continuación.

$$\vec{v} \stackrel{\text{def.}}{=} [v_x, v_y], \quad (\text{III.9})$$

$$v_x = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\{ \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \quad (\text{III.10})$$

$$v_y = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\{ \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \quad (\text{III.11})$$

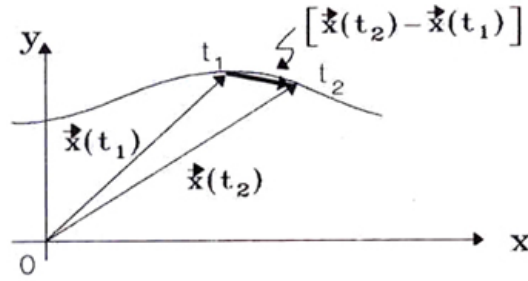


Figura III.9: El vector velocidad es la flecha que une los puntos señalados por t_1 y t_2 . En el límite estos dos puntos se tienden a confundir y la velocidad instantánea corresponde a la tangente a la curva en dicho punto.

III.3.3. Aceleración

Tal como en este caso estudiado, para calcular la *aceleración* debemos considerar el cambio que experimenta cada una de las componentes del vector velocidad entre dos instantes muy próximos.

$$\vec{a} \stackrel{\text{def.}}{=} [a_x, a_y], \quad (\text{III.12})$$

$$a_x = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\{ \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}, \quad (\text{III.13})$$

$$a_y = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left\{ \frac{v_y(t_2) - v_y(t_1)}{t_2 - t_1} \right\}. \quad (\text{III.14})$$

III.4. VELOCIDAD RELATIVA

Antes de proseguir con la aceleración estudiaremos el *movimiento relativo* o, en otras palabras, la *velocidad relativa*. Un ejemplo típico de movimiento relativo, es el caso de una persona caminando sobre la cubierta de un barco. Su velocidad con respecto (*velocidad relativa*) al barco se puede determinar usando las definiciones dadas anteriormente, tomando como *sistema de referencia* el barco. Ahora, para un observador ubicado en la orilla, la velocidad del pasajero, *relativa a la orilla*, es diferente, pues debe *sumar* a la velocidad del pasajero relativa al barco, la velocidad del barco mismo. La suma **vectorial** de estas velocidades es la velocidad del pasajero con respecto a la orilla.

Hay tres cosas que conviene destacar:

- Al definir el vector posición en la sección anterior, nos dimos un origen, un punto de referencia con respecto al cual medimos. Esto es lo que llamamos el *sistema de referencia*. En el ejemplo del barco, el sistema de referencia estaba dibujado en la cubierta misma del barco.

- Cuando hablamos de velocidad (o rapidez) debemos indicar el sistema de referencia con respecto al cual estamos midiendo la velocidad. En este sentido empleamos la palabra *velocidad relativa*. En estricto rigor, todas las velocidades son relativas, pero en la práctica, se emplea la palabra *relativa* cuando hay más de un sistema de referencia que interviene explícitamente en el problema al que nos referimos. En el ejemplo anterior, los dos sistemas de referencia son: el barco y la orilla (o tierra firme).

- Finalmente, el punto más importante: hemos *supuesto* que la velocidad del pasajero con respecto a la orilla es la suma vectorial de la velocidad del barco con respecto a la orilla más la velocidad del pasajero con respecto a la cubierta. Esta suposición, que pertenece a Galileo Galilei, se ve confirmada con la experiencia cotidiana, y es la que nosotros adoptaremos en este texto.

Es importante insistir que este último punto es –como ya se hizo notar– una *suposición*, cuya validez debe decidirse a través de un experimento. En la actualidad sabemos que es una *excelente aproximación* para los casos en los cuales las velocidades relativas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Esto es lo que ocurre en la vida diaria.

La teoría de la relatividad especial de Albert Einstein establece otra expresión para la suma de velocidades. Ambas expresiones coinciden para el caso de velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, 300.000 km/s.

En este texto nos ocuparemos de aquellos casos en los cuales las velocidades involucradas son bajas.

Estos últimos comentarios pretenden destacar la importancia de juzgar en forma crítica las suposiciones que se utilizan al construir una teoría y la necesidad de su verificación experimental, en diversas circunstancias, para determinar su rango de validez.

Ejemplo

La corriente de un canal tiene una velocidad de 10 km/h en dirección Este. Un transbordador navega en una dirección de 30° Nor-oeste con una velocidad de 20 km/hora *con respecto* a la corriente del canal. ¿Cuál es la velocidad y dirección del transbordador según un observador situado en la ribera?

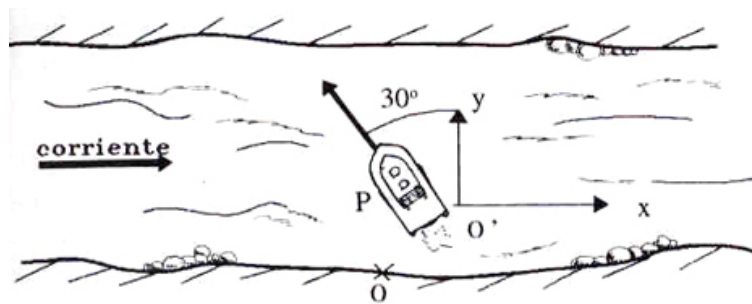


Figura III.10: Con este problema aparecen las velocidades relativas. La Figura describe la situación del transbordador en el río y las distintas velocidades relevantes para este ejercicio.

En este esquema, el transbordador está representado por el rectángulo P. Hemos supuesto que el punto O' se mueve **junto** con la corriente del canal. A ésta le hemos asociado un sistema de referencia (x, y) *imaginario* que, por supuesto, se mueve junto con la corriente, siempre con el eje O'X, paralelo a la orilla del canal y el eje O'Y, perpendicular a la ribera. La posición del transbordador con respecto al observador parado en la ribera, al cual identificamos con el punto O, está dada, en cualquier instante, por el vector:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \quad (\text{III.15})$$

$\overrightarrow{OP}$: posición del transbordador con respecto al observador en la orilla.

$\overrightarrow{OO'}$: posición del punto O' que se desplaza junto con la corriente del canal, tal como lo ve el observador O en la orilla.

$\overrightarrow{O'P}$: desplazamiento del transbordador con respecto al sistema de coordenadas fijo a la corriente del canal: $(O'X, O'Y)$.

Los tres vectores mencionados cambian de dirección y magnitud en el tiempo.

$\overrightarrow{OO'}$: cambia porque la corriente se desplaza con respecto a la orilla.

$\overrightarrow{O'P}$: cambia solamente de *magnitud*, si hemos elegido el punto O acertadamente.

En este caso, el transbordador se desplaza con respecto a la corriente del canal pero su *dirección permanece constante*, como lo afirma el enunciado. Podemos imaginar una

balsa llevada río abajo arrastrada por la corriente. Un observador parado en esa balsa observa que el barco se aleja siempre en la dirección indicada en el enunciado.

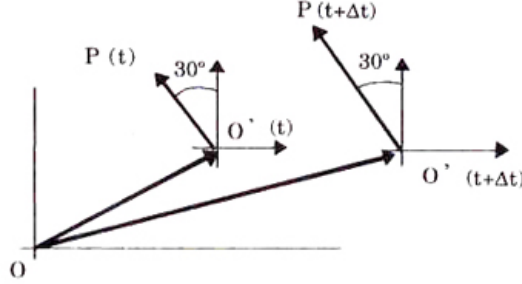


Figura III.11: Los vectores posición definidos en el problema cambian en el tiempo. La diferencia entre dos posiciones consecutivas dividida por el tiempo define la velocidad de cada uno de los puntos especificados.

Ya hemos visto cómo se define velocidad en dos dimensiones. Apliquemos esa definición aquí. Comencemos descomponiendo el vector $\vec{OP}$:

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P},$$

enseguida calculamos la velocidad del transbordador con respecto a la orilla:

$$\vec{v}_{\text{transb/orilla}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{OP}(t + \Delta t) - \vec{OP}(t)}{\Delta t} \right\}, \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{transb/orilla}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{OO'}(t' + \Delta t') - \vec{OO'}(t')}{\Delta t'} \right) + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{O'P}(t + \Delta t) - \vec{O'P}(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

En el último paso hemos usado la siguiente propiedad: el límite de una suma es igual a la suma del límite de los sumandos.

También hemos usado t' en lugar de t al derivar el vector $\vec{OO'}$ para indicar que estamos derivando con respecto al tiempo medido por un observador en el transbordador. Galileo supuso que el tiempo transcurre igualmente en cualquiera de los dos sistemas, O

y O' , y de esta forma es posible reemplazar t' por t , el tiempo medido por un observador en reposo en la orilla del canal. Como ya señalamos, esta suposición es falsa, pero sus efectos son despreciables cuando las velocidades relativas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

$$\vec{v}_{transb/orilla} = \vec{v}_{transb/corriente} + \vec{v}_{corriente/orilla} \quad (\text{III.18})$$

Esta regla de composición es fácil de memorizar: es idéntica a la multiplicación de una fracción por la unidad: $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$.

$$\frac{\text{transb}}{\text{orilla}} = \frac{\text{transb}}{\text{corriente}} + \frac{\text{corriente}}{\text{orilla}}.$$

Volviendo al ejemplo, reemplazamos en la regla de composición de velocidades los datos del problema y usando la notación de los vectores unitarios, introducida anteriormente tenemos:

$$\vec{v}_{transb/orilla} = (v_t \cos 30^\circ \hat{j} - v_t \sin 30^\circ \hat{i}) + v_o \hat{i} \quad (\text{III.19})$$

Recordemos que $\hat{i} \equiv$ representa un vector unitario en la dirección positiva del eje $O'X$, tiene magnitud 1 ($\equiv$ largo unitario) y $\hat{j} \equiv$ es su equivalente en la dirección $O'Y$.

Como al sumar vectores se suman las componentes respectivas tenemos que:

$$\vec{v}_{transb / orilla} = [v_o - v_t \sin 30^\circ] \hat{i} + v_t \cos 30^\circ \hat{j}.$$

Resumen

Para desprendernos de la notación usada en el último ejercicio y generalizar estos resultados, supongamos que un objeto A se mueve con respecto a un sistema de referencia que designamos como O' , y éste a su vez se mueve con respecto a otro sistema de referencia O .

El vector de posición de A con respecto a O es $\vec{x}_{A/O}$, y referido al sistema O' es:

$$\vec{x}_{A/O} = \vec{x}_{A/O'} + \vec{x}_{O'/O}. \quad (\text{III.20})$$

Derivando esta ecuación con respecto a t , obtenemos la ley de velocidades relativas:

$$\vec{v}_{A/O} = \vec{v}_{A/O'} + \vec{v}_{O'/O}. \quad (\text{III.21})$$

A su vez derivando esta ecuación con respecto al tiempo encontramos la ley de composición de las aceleraciones:

$$\vec{a}_{A/O} = \vec{a}_{A/O'} + \vec{a}_{O'/O}. \quad (\text{III.22})$$

Esta última deducción de la ley de composición de velocidades, es general. Demuestra que mantiene su forma aún en la presencia de aceleraciones relativas entre los distintos sistemas de referencia.

III.5. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Usaremos el ejemplo del transbordador analizado en la sección anterior para ilustrar el Principio de Superposición.

Supongamos que nos damos un intervalo arbitrario, por ejemplo una hora (por ser más útil) y en este intervalo realizamos un experimento pensado: imaginamos que la corriente del canal se detiene y calculamos el desplazamiento del barco sujeto a esa condición. En esa situación, el barco se desplaza 20 km, desde O' hasta el punto Pén el transcurso de la hora.

Enseguida –y siempre en nuestra imaginación– dejamos fluir la corriente del canal pero ahora suponemos que el barco no se propulsa, simplemente flota arrastrado por dicha corriente. En este caso, el desplazamiento debido al arrastre del canal, actuando también durante una hora, lleva al barco desde el punto P' hasta P (10 km hacia la derecha), como mostramos en la Figura.

El *desplazamiento total* durante esa hora es la superposición de ambos desplazamientos: el vector de O hasta P. Además, como el desplazamiento ocurrió en una hora, este vector representa también la velocidad del barco con respecto al observador ubicado en la orilla, medida en km/h.

Lo que hicimos fue *SUPERPONER* los dos movimientos, congelando uno primero y después el otro. Hemos supuesto que el resultado de esta operación, que sólo se puede realizar en la imaginación, arroja los mismos resultados que en la realidad donde ambos movimientos ocurren simultáneamente. Esta es, sin duda una suposición que confirma la experiencia (es decir, que da resultados semejantes a los que se obtienen haciendo el experimento correspondiente). Denominamos esta hipótesis, el **PRINCIPIO DE SUPERPOSICION**.

En forma algebraica este principio se materializa en la ley de composición de velocidades escrita anteriormente:

$$\vec{v}_{A/O} = \vec{v}_{A/O'} + \vec{v}_{O'/O},$$

el primer término indica lo que sucede en el sistema O', y el segundo lo que ocurre en el sistema O, y el resultado final es la suma (superposición) de ambos.

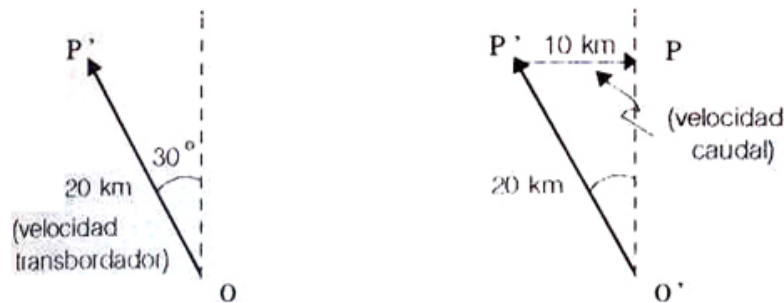


Figura III.12: Superposición de los movimientos del caudal y del barco. Hemos supuesto que el movimiento en una de las direcciones no afecta en absoluto al movimiento que se realiza simultáneamente en la dirección perpendicular.

Otra forma —equivalente a la anterior— de establecer este principio es la siguiente:

El Principio de Superposición nos garantiza que el movimiento en la dirección $\hat{i}$ no altera las leyes que rigen el movimiento en la dirección $\hat{j}$, y viceversa. Por lo tanto ambos movimientos pueden ser analizados en forma separada.

Enunciado de esta manera, el principio de superposición tiene aplicación inmediata en la resolución de problemas en dos (o más) dimensiones.

III.5.1. Caída libre (dos dimensiones)

En los tiempos de Galileo, la idea que un movimiento arbitrario se pudiera estudiar como la *superposición* de dos movimientos independientes, que no se influyen entre sí era absolutamente nueva y de hecho todo un descubrimiento. Para ilustrarlo, reproducimos brevemente un párrafo de su libro *Dos Nuevas Ciencias*:

*Supongamos una partícula que se desplaza con velocidad uniforme sobre la superficie de un plano hasta que llega al extremo, donde al abandonar dicho punto, adquiere **además** de su movimiento previo, una inclinación a caer hacia el centro de la tierra, debido a su propio peso; de forma que el **movimiento resultante** ...está **compuesto** por un desplazamiento, el cual es uniforme y horizontal y el otro vertical y naturalmente acelerado*

Con las palabras *movimiento resultante* y *está compuesto*, Galileo estableció su *Hipótesis* de trabajo. En su opinión, la validez de esta hipótesis se basaba en su *simplicidad* y en el hecho que sus predicciones *concordaban con las observado en la vida diaria*.

En el ejercicio anterior la hemos usado al afirmar que el movimiento del barco es la suma de sus dos desplazamientos y que éstos no interfieren entre sí.

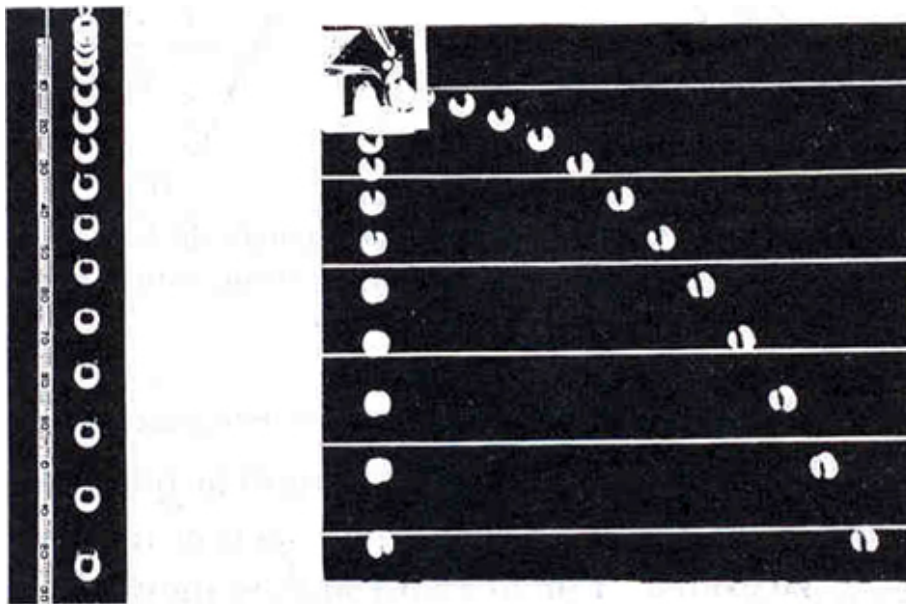


Figura III.13: A la izquierda se superponen las fotografías de la caída libre de un cuerpo. A la derecha se muestra el caso de un movimiento parabólico, considerado como la superposición de dos movimientos independientes: uno horizontal con velocidad constante y la caída libre.

La Figura [III.13] muestra una pelota en caída libre. La foto permite calcular el camino recorrido entre cada destello puesto que éstos ocurren a intervalos iguales.

En la misma Figura se incluye una foto que compara la caída libre de un cuerpo con el movimiento parabólico que describe una partícula que tiene inicialmente una velocidad horizontal.

Antes de Galileo, los filósofos habían dedicado mucho tiempo intentando explicar el *origen* de este movimiento. Galileo centró su interés en su *descripción*. Para ello elaboró un argumento sencillo y directo.

El movimiento parabólico cuya secuencia aparece en la fotografía, Galileo lo analizó como una superposición de dos componentes: una era la tendencia *natural* de los cuerpos a mantener su velocidad (Ley de Inercia) y por lo tanto el cuerpo mantenía su desplazamiento horizontal después de abandonar el borde de la mesa y la otra componente era la caída libre. Ambos movimientos se *superponen* simultáneamente y dan origen al *movimiento parabólico* (la curva que describe la pelota es una parábola). Galileo fue

el primero en descomponer de esta forma la trayectoria de un cuerpo en caída libre en dos dimensiones.

Una vez aceptado que este movimiento es una superposición de dos desplazamientos que ocurren simultáneamente, continuamos con la descripción cuantitativa del movimiento en dos dimensiones.

Para comenzar debemos especificar el sistema de referencia con respecto al cual referimos los vectores posición, velocidad y aceleración usados en la cinemática de dos dimensiones.

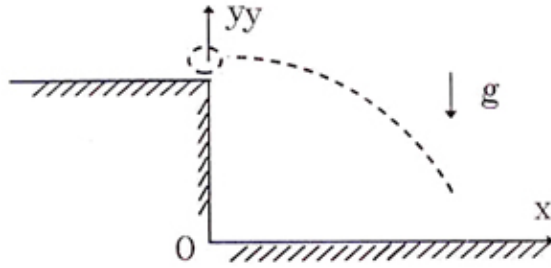


Figura III.14: Definimos el instante inicial cuando la partícula se encuentra justo al borde del precipicio y con una velocidad que apunta en la dirección positiva del eje x . El origen de coordenadas se ubica en O .

Sabemos que éste se puede descomponer en la superposición de dos movimientos independientes, en consecuencia las fórmulas que debemos usar en *cada una de las direcciones* corresponden a las ya conocidas para el movimiento acelerado en una dimensión. A continuación las escribimos explícitamente.

COMPONENTE-X:

$$x(t) = x_0 + (v_0)_x \cdot t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (\text{III.23})$$

$$v_x(t) = (v_0)_x + a_x \cdot t \quad (\text{III.24})$$

$$v_x^2 - (v_0)_x^2 = 2a_x \cdot (x - x_0) \quad (\text{III.25})$$

COMPONENTE-Y:

$$y(t) = y_0 + (v_0)_y t + \frac{1}{2}a_y \cdot t^2 \quad (\text{III.26})$$

$$v_y(t) = (v_0)_y + a_y \cdot t \quad (\text{III.27})$$

$$v_y^2 - (v_0)_y^2 = 2a_y(y - y_0) \quad (\text{III.28})$$

En el caso de una partícula cayendo por el borde de una mesa, como se indica en la Figura, estas cantidades toman los siguientes valores:

$$\vec{v}_0 = [v_0, 0], \quad \vec{x}_0 = [0, h], \quad \vec{a} = [-g, 0].$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ v_x(t) &= v_0 \end{aligned} \right\} \text{Componente-X}$$

$$/$$

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= h - \frac{1}{2}g \cdot t^2 \\ v_y(t) &= -g \cdot t \\ v_y^2 &= -2g \cdot (y - h) \end{aligned} \right\} \text{Componente-Y}$$

Con estas ecuaciones escritas, ya estamos preparados para resolver un problema. Inventemos un enunciado que combine con la Figura hecha anteriormente:

Ejemplo

Un bombardero vuela con una velocidad horizontal v_0 , constante, y a una altura h dirigiéndose directamente hacia su objetivo.

¿A qué distancia L el piloto debe *soltar* la bomba, para alcanzar el blanco asignado? Exprese su respuesta en función del ángulo ϕ .

Nota:

Al decir que *suelta* la bomba, estamos aclarando que, en el instante que se deja libre, la bomba tiene la *misma* velocidad que el bombardero .

Queremos saber en qué momento el piloto debe accionar el mecanismo para que la bomba, considerada como una partícula puntual sin fricción, comience su caída parabólica y dé en el objetivo.

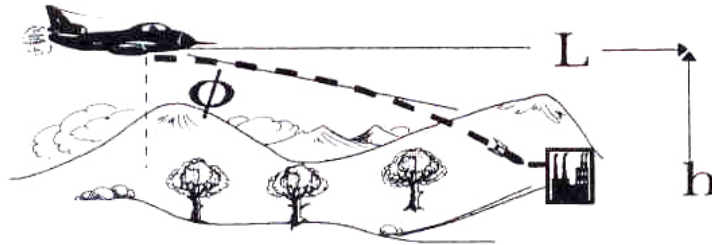


Figura III.15: Para esta situación se desea encontrar el valor del ángulo que debe medir el artillero para saber cuando accionar el misil. Este es, conceptualmente, el mismo problema que aquel de una partícula cayendo del borde de una mesa con una velocidad inicial.

Cabe notar que el considerar la bomba como una partícula es una mala aproximación. En realidad, deberíamos considerar la viscosidad del aire y la presencia de las aletas que permiten planear al misil, para calcular correctamente el punto donde tocará tierra. Esta es una primera aproximación, la más simple, a este problema típico.

La Figura correspondiente a este problema es, salvo detalles, igual a la anterior, donde se examinó la caída de un objeto puntual desde el borde de una mesa. El problema es el mismo y, en consecuencia, las ecuaciones son las mismas.

Nos interesa conocer el ángulo ϕ , tal que $\tan \phi = \frac{L}{h}$

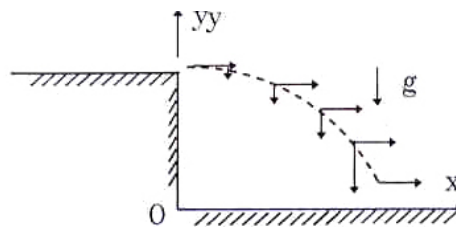


Figura III.16: La bomba sigue una trayectoria parabólica, tal como el movimiento de caída libre de un objeto puntual. Esta es una primera aproximación.

De la componente horizontal x , tenemos:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ \Downarrow \\ L &= v_0 T. \end{aligned}$$

Pero, en el mismo instante T , la bomba, de acuerdo al sistema de referencia elegido, alcanza $y = 0$, entonces:

$$0 = h - \frac{1}{2} g T^2.$$

De aquí, obtenemos:

$$T = \left\{ \left[\frac{2h}{g} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Examinando las dimensiones, vemos que T tiene las dimensiones de tiempo:

$$T = \left\{ [L] \frac{[T^2]}{[L]} \right\}^{\frac{1}{2}} = [T]$$

Como h y g son datos, T es conocido. Reemplazando en L :

$$L = v_0 \left[\frac{2h}{g} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{L}{h} = \left[\frac{2v_0^2}{gh} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Analicemos ahora las dimensiones:

$$[v_0^2] = \left[\frac{L^2}{T^2} \right] \quad [g \cdot h] = \left[\frac{L}{T^2} \cdot L \right]$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2v_0^2}{gh} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{no tiene dimensiones,}$$

como corresponde, puesto que $\tan \phi$ es adimensional.

Al trabajar en dos dimensiones, no se necesita memorizar más fórmulas que las ya conocidas en una dimensión. Lo que se debe hacer es escribir las mismas fórmulas anteriores en forma *vectorial*:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \quad (\text{III.29})$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad (\text{III.30})$$

$$\Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a_x(x - x_o) + 2a_y(y - y_o) \quad (\text{III.31})$$

$$\vec{x} = [x(t), y(t)], \quad (\text{III.32})$$

posición de la partícula en el instante t ,

$$\vec{x}_0 = [x(0), y(0)], \quad (\text{III.33})$$

posición inicial de la partícula,

$$\vec{v}_0 = [(v_0)_x, (v_0)_y], \quad (\text{III.34})$$

velocidad de la partícula en el instante inicial,

$$\vec{v} = [v_x(t), v_y(t)], \quad (\text{III.35})$$

velocidad de la partícula en el instante t ,

$$\vec{a} = [a_x, a_y], \quad (\text{III.36})$$

componentes de la aceleración *constante*.

Ejemplo (Revista **Quantum**, Sep.– Oct. 1992, pág 16.)

Dos atletas están parados en los puntos A y B , sosteniendo una cuerda elástica. A una señal, el corredor A se mueve en dirección Este (eje- x) con una velocidad v_o y el corredor B se desplaza hacia el sur (eje- y) con *aceleración constante*. Ambos atletas mantienen su movimiento a lo largo del eje x y el eje y sin desviarse.

La razón $|AC|/|CB| = 1/4$ fija la posición del punto C en la cuerda al inicio del movimiento.

Determine el valor de esta aceleración, si sabemos que el nudo C de la cuerda elástica pasa por el punto D , cuyas coordenadas son ℓ y h (ver Figura).

Tomamos como origen del eje de coordenadas el punto A . La coordenada y apunta hacia el borde inferior de la página. Los puntos A , B y C se identifican mediante los subíndices a , b y c .

La distancia entre los puntos A y B *no* es constante, puesto que la cuerda es elástica.

Vamos a suponer que *la cuerda se estira uniformemente*, es decir, la razón entre la distancia de C a cada uno de los extremos A y B permanece *constante* durante el movimiento. Su valor es $|AC|/|CB| = 1/4$.

Antes de comenzar a calcular, analicemos qué es lo que se pide. Debemos encontrar la trayectoria del punto C , de forma que pase por D , cuyas coordenadas son conocidas. Como el atleta B tiene una aceleración constante, el punto C también la tiene, y debemos

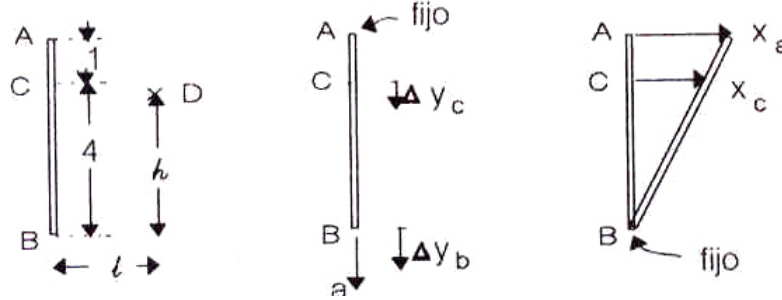


Figura III.17: Los atletas estiran la cuerda *uniformemente* de forma que el punto C, pasa por el punto D. A la derecha se incluyen dos figuras: en una se suprime el movimiento horizontal y en la otra el movimiento vertical.

calcularla. De igual forma, el punto C, debido a la velocidad de A, también tiene una velocidad horizontal, que a su vez debemos encontrar en base a los datos. Con estas cantidades establecidas: la aceleración vertical de C y su velocidad horizontal, el ejercicio se reduce a calcular la trayectoria de una partícula de forma que pase por un punto pre-establecido, D. Para ello podemos regular la aceleración vertical de B solamente.

Como se señala en la Figura, usaremos el *Principio de Superposición* para resolver este problema. Para ello desconectamos uno de los movimientos: el del atleta A, es decir, consideramos sólo el movimiento en la dirección y . Designamos v_a como la velocidad del punto A. Con esta suposición tenemos $v_a \equiv v_o = 0$.

El objetivo del cálculo que haremos a continuación es encontrar la relación entre las aceleraciones de los puntos C y B.

Las posiciones de cada uno de los puntos de la cuerda están relacionadas por la fórmula de la aceleración constante:

$$y_c(t) = y_c(0) + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$y_b(t) = y_b(0) + \frac{1}{2} a_b t^2,$$

donde a_c y a_b son las aceleraciones verticales de los puntos A y B. Del enunciado se desprende que $a_a = 0$, puesto que se mueve sobre el eje horizontal.

Como la cuerda se estira uniformemente, la razón entre sus posiciones permanece constante en el tiempo:

$$\frac{y_c(t)}{y_b(t)} = \frac{y_c(0)}{y_b(0)} = \frac{|AC|}{|AC| + |CB|} = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5}.$$

Donde hemos usado que $|AC|/|CB| = 1/4$. Con esta información podemos encontrar las relaciones entre las coordenadas de C y B y sus respectivas aceleraciones. Después de reordenar la última expresión, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{y_c(t)}{y_c(0)} &= \frac{y_b(t)}{y_b(0)} \text{ y componiendo la fracción,} \\ \frac{y_c(t) - y_c(0)}{y_c(0)} &= \frac{\frac{1}{2} a_c t^2}{y_c(0)} = \frac{y_b(t) - y_b(0)}{y_b(0)} = \frac{\frac{1}{2} a_b t^2}{y_b(0)},\end{aligned}$$

donde usamos la ecuación de movimiento, para los puntos C y B, escrita anteriormente. Finalmente esto se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2} a_c t^2}{y_c(0)} &= \frac{\frac{1}{2} a_b t^2}{y_b(0)} \\ \frac{a_c}{a_b} &= \frac{y_c(0)}{y_b(0)} = \frac{1}{5}, \\ a_c &= \frac{1}{5} a_b.\end{aligned}\tag{III.37}$$

Donde a_b es la aceleración que debemos regular para que C pase por el punto D.

Ahora, en el siguiente paso en la aplicación del Principio de Superposición, anulamos la aceleración vertical $a_b = 0$ y ponemos $v_o \neq 0$, es decir, conectamos sólo el movimiento horizontal.

De la Figura es fácil ver que:

$$\begin{aligned}\frac{x_a}{|AB|} &= \frac{x_c}{|BC|} \Rightarrow \frac{x_a}{x_c} = \frac{|AB|}{|BC|}, \\ x_c &= \frac{|BC|}{|AB|} x_a = \frac{4}{5} x_a.\end{aligned}$$

Como la velocidad es constante,

$$\frac{x_c - 0}{\Delta t} \equiv v_c = \frac{4}{5} \frac{x_a - 0}{\Delta t} = \frac{4}{5} v_o.$$

En resumen usando el Principio de Superposición y la hipótesis de elongación uniforme de la cuerda, hemos logrado encontrar la velocidad horizontal de C, v_c y su aceleración vertical (Norte-Sur) en función de la aceleración de B: a_b .

Para determinar el valor que debe tomar a_b , usemos el dato que C cruza el punto D , es decir, en un cierto instante τ

$$x_D = \frac{4}{5} v_o \tau = \ell, \quad y$$

$$y_D = \frac{1}{2} a_c \tau^2 = \frac{1}{10} a_b \tau^2 = h.$$

Despejando τ y a_b de estas dos ecuaciones,

$$a_b = \frac{10 h}{\left[\frac{5 \ell}{4 v_o} \right]^2} = \frac{32}{5} \frac{h v_o^2}{\ell^2}.$$

Este es el valor buscado para la aceleración del atleta B.

Ejercicio

- Verifique que el resultado anterior tiene las dimensiones correctas.
- Resuelva este mismo problema sin usar el Principio de Superposición. $\square$

Ejemplo

En el problema de la figura, [III.18], se pide calcular la máxima distancia Δ que un objeto puede alejarse del borde del precipicio para evitar ser alcanzado por los objetos lanzados desde el punto A. La velocidad de lanzamiento es v_0 y la distancia de A hasta el borde del precipicio es L y h su altura.

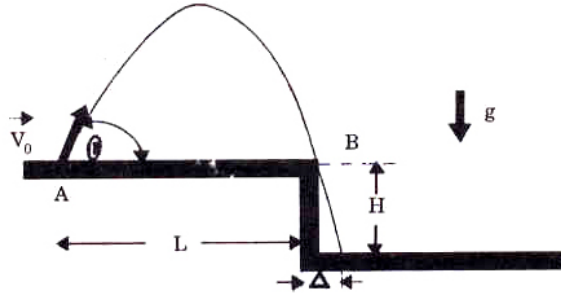


Figura III.18: En este problema debemos imponer la condición que la partícula cruce (o apenas toque) el borde del precipicio. De las dos soluciones que existen, una sola de ellas corresponde al máximo de Δ .

Datos

$v_0 = |\vec{v}_0|$, g , L y H conocidas.

$$\theta = ?$$

Debemos calcular θ de forma que el proyectil se aproxime lo más posible al punto B.

Método

- i) Calculamos θ de forma que el proyectil pase justo por B (puesto que necesitamos conocer el valor mínimo de Δ)
- ii) Una vez conocido θ , calculamos Δ .

En el primer punto, es relativamente simple adelantar la relación que existirá entre las variables conocidas del problema L y v_0 , usando análisis dimensional.

$$[L] = \left[\frac{v_0^2}{g} \right].$$

$\Rightarrow L \propto \frac{v_0^2}{g}$, sospechamos que para reemplazar el signo *proporcional* por una igualdad se debe incluir el otro parámetro que afecta la respuesta: el ángulo θ , ya que $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sin 2\theta$, ... son adimensionales.

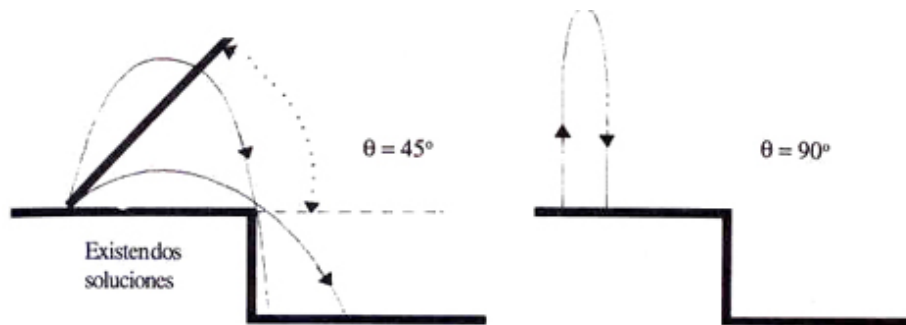


Figura III.19: La Figura indica las distintas posibilidades que pueden ocurrir dependiendo del valor del ángulo de lanzamiento. No aparece $\theta = 0$, que equivale a enviar la bomba rodando por el piso...

Solución:

Componente x : $x = (v_0 \cos \theta)t$

Componente y : $y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

$$v_y = v_0 \sin \theta - g t$$

$$v_y^2 - v_0^2 \sin^2 \theta = -g(y - o)$$

Si nos detenemos a pensar lo que significa que el movimiento sea una superposición de un desplazamiento con velocidad constante hacia la derecha y una caída libre con aceleración $(-g)$, es posible darse cuenta que al tocar B en el instante $t = T$, se debe cumplir que:

$$v_y(T) = -(v_0 \sin \theta).$$

Repase el ejemplo de la caída libre de un objeto.

En ese mismo instante $x(T) = L = T \cdot v_0 \cos \theta$ y usando la ecuación para la velocidad:

$$v_y(T) = -v_0 \sin \theta = v_0 \sin \theta - g T$$

$$2 v_0 \sin \theta = g T = \frac{g L}{v_0 \cos \theta}$$

De forma que:

$$(*) \quad \sin 2\theta = \frac{g L}{v_0^2}, \quad L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Conviene examinar mejor la fórmula (*). Al graficar la función $\sin \alpha$ vs. α vemos que $\sin \alpha$ toma su valor máximo en $\alpha = \pi/2$ de modo que si g y v_0 permanecen inalterados y nos permitimos cambiar θ , el máximo alcance se produce cuando $2\theta = \pi/2 \Rightarrow \theta = \pi/4$.

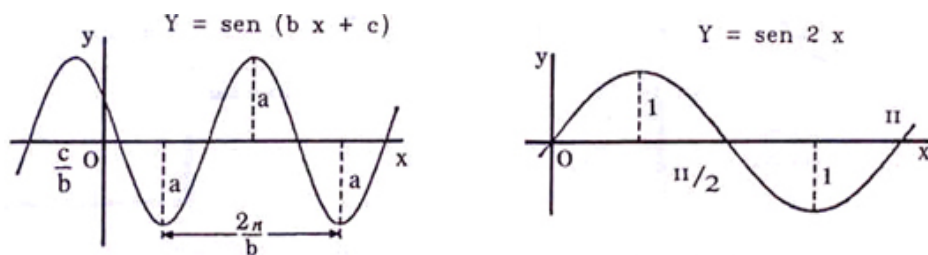


Figura III.20: Gráfico del seno del ángulo doble. Esta Figura indica que el ángulo de mayor alcance corresponde a 45 grados. En ese caso $b=2$, $c=0$ y $a=1$.

Resumiendo: dado g , L y v_0^2 , usando la ecuación (*) podemos determinar el ángulo θ de lanzamiento.

Ahora comenzamos la segunda etapa: el cálculo de Δ

Notemos que : $L + \Delta = x$, en el instante τ . Pero $y(\tau) = -H$, puesto que durante la trayectoria no cambia el valor de la aceleración,

$$L + \Delta = v_{ox} \cdot \tau,$$

$$-H = v_{oy} \tau - \frac{1}{2} g \tau^2,$$

Hemos escrito dos ecuaciones independientes y contienen dos incógnitas: Δ, τ . Despejando estas dos incógnitas, obtenemos:

$$\tau^2 - \left(2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}\right) \tau - \frac{2H}{g} = 0$$

$$\tau = \frac{1}{2} \left[\frac{2v_0 \sin \theta}{g} \pm \left(\frac{4v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} + \frac{8H}{g} \right)^{1/2} \right],$$

$$\tau = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2Hg}{v_0^2 \sin^2 \theta}} \right]$$

$$\Delta = \tau v_{0x} - L$$

$$\Delta = \frac{L}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2Hg}{g L \sin \theta}} \right] - L$$

$$\Delta = \frac{L}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4H}{L \tan \theta}} - 1 \right]. \quad \square$$

Esta es la distancia máxima que podemos alejarnos de la base del precipicio. La cantidad entre corchetes en la fórmula anterior no tiene dimensiones.

Otra forma de obtener el mismo resultado

$$L + \Delta = v_{ox} \cdot \tau, \quad (\text{eje } x)$$

$$-2g(-H - o) = v_{fy}^2 - [v_0 \sin \theta]^2. \quad (\text{eje } y)$$

De esta última ecuación obtenemos el tiempo τ que tarda en llegar al fondo del precipicio.

$$v_f|_y = -[(v_0 \sen \theta)^2 + 2gH]^{1/2}.$$

El signo menos proviene del hecho que la raíz cuadrada tiene ambas posibilidades como resultado y el signo de $v_f|_y$ es *negativo* pues apunta en la dirección negativa del eje y .

Pero $v_f|_y = v_{oy} - g\tau$

$$g \cdot \tau = v_0 \sen \theta + [(v_0 \sen \theta)^2 + 2gH]^{1/2},$$

$$\tau = \frac{v_0 \sen \theta}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gH}{v_0^2 \sen^2 \theta}} \right].$$

De aquí obtenemos Δ en forma análoga al desarrollo anterior.

III.6. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En la sección anterior estudiamos el caso de la aceleración constante en *magnitud* y *dirección*. Ahora proseguiremos con otro caso, donde sólo la *magnitud* de la aceleración permanece constante en el tiempo, pero su *dirección* varía.

Este es el caso del *movimiento circular*.

Se trata de una partícula que describe una circunferencia. El caso más simple, y con el cual conviene comenzar es el *movimiento circular uniforme*. El término *uniforme*, indica que la partícula recorre arcos iguales en tiempos iguales, sin importar su ubicación en la circunferencia; en consecuencia demora el mismo tiempo en cada giro completo. Este tiempo se denomina el período T del movimiento.

Para estudiar este movimiento conviene *parametrizar* la circunferencia –asignar un número a cada uno de sus puntos, su coordenada– con el fin de poder identificarlos.

III.6.1. Parametrización

Podemos identificar una curva a través de la función que relaciona x con y : $y = y(x)$. Otra alternativa, consiste en asignar a cada punto de la curva un número único y expresar cada una de las componentes, x e y , en función de este número. Esta es la forma *paramétrica* de describir una curva. El parámetro es precisamente el número asignado a cada punto, que en física es, el tiempo o el largo de la trayectoria recorrida.

Ejemplo

a) Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta cuya ecuación paramétrica es:

$$\vec{r}_1(t) = [x(t), y(t)] = [t + 2, t]$$

¿Cuál es la ecuación de la trayectoria de esta partícula?

Debemos despejar el parámetro t de esta ecuación para encontrar la relación entre la coordenada x e y .

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = t + 2 \\ y(t) = t \end{array} \right\} \quad x = y + 2, \Rightarrow y = x - 2.$$

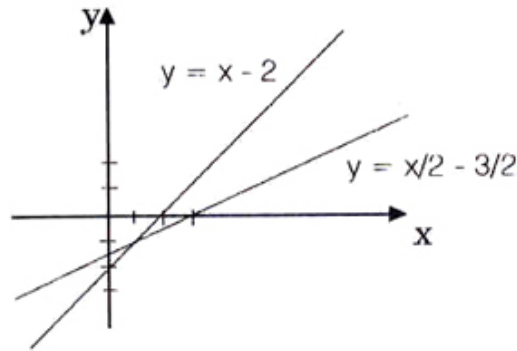


Figura III.21: Se muestra las trayectorias de dos partículas y su punto de encuentro. En este ejemplo las trayectorias son líneas rectas, pero el mismo método es válido también en casos más generales.

b) Encuentre la trayectoria $y = f(x)$, de la siguiente partícula cuya ecuación de movimiento se da –en forma paramétrica–, a continuación:

$$\vec{r}_2(t) = [x_2(t), y_2(t)] = [3 + 2t, t],$$

La ecuación de la trayectoria se obtiene, al igual que el caso anterior, eliminando t de las dos ecuaciones paramétricas dadas. El resultado es:

$$x = 3 + 2y, \quad \text{o, de otra forma:} \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

c) Supongamos ahora que el parámetro t corresponde, efectivamente, al tiempo que marca el reloj que acompaña a cada una de las partículas que siguen las trayectorias descritas arriba. Si los relojes de ambos observadores están sincronizados, encuentre la

posición de ambas partículas en el instante $t = 0$. Además, encuentre el instante t en que ellas chocan.

En el instante $t = 0$, las partículas se ubican en:

$$\text{Partícula 1 : } x_1 = 2 \quad y_1 = 0,$$

$$\text{Partícula 2 : } x_2 = 3 \quad y_2 = 0.$$

Cuando se encuentran, como ambas partículas tienen sus relojes sincronizados, el tiempo que marca cada uno de ellos debe coincidir. Lo mismo sucede con las coordenadas, puesto que deben ocupar el mismo punto del plano simultáneamente. Esta es la definición matemática de choque entre dos partículas.

De este modo, debe cumplirse que:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \text{ en el instante } t = \tau.$$

Examinando esta condición en la coordenada- x , tenemos:

$$x_2 = 3 + 2\tau = x_1 = \tau + 2$$

y de aquí se obtiene:

$$2\tau + 3 = \tau + 2, \quad \tau = -1.$$

Compruebe que la ecuación para la coordenada- y , no aporta información.

El punto donde ambas partículas se encuentran tiene coordenadas:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad y_1 = y_2 = -1. \quad \square$$

Ejemplo

Analicemos la parametrización de una circunferencia. Consideramos dos casos:

- a) La circunferencia está centrada en el origen de coordenadas.
- b) La circunferencia está centrada en un punto del eje x .

La ecuación de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{III.38}$$

Podemos parametrizar esta Figura usando el ángulo que forma el vector que apunta hacia un punto arbitrario de la circunferencia y el eje- x . Para esto procedemos de la siguiente forma:

$$x(t) = a \cos \theta, \tag{III.39}$$

$$y(t) = a \sin \theta,$$

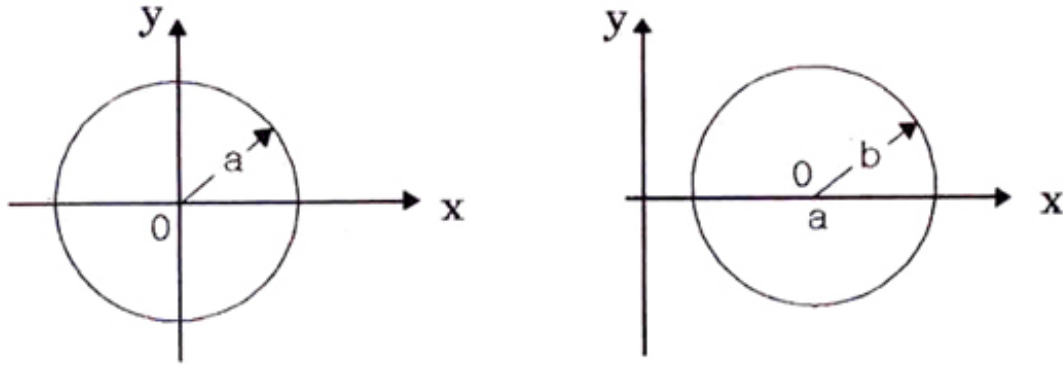


Figura III.22: Aparecen las dos circunferencias que se desea parametrizar. Una de ellas centrada en el origen y la otra en un punto arbitrario del eje x .

donde $\theta \in [0, 2\pi]$, es el parámetro que determina cada punto de la curva. En otras palabras, para cada valor del ángulo θ se asocia un único punto de la circunferencia.

La ecuación de una circunferencia cuyo centro O tiene las coordenadas $[a, 0]$ es:

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2$$

$$x(t) - a = b \cos \theta,$$

$$y(t) = b \sin \theta. \square$$

Ejemplo

Otro caso de interés es el de una **Elipse**, que corresponde al movimiento que realizan los planetas en torno al Sol. Su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{III.40})$$

La elipse se puede dibujar con una cuerda fija en los puntos F_1 y F_2 , y de largo $(r_1 + r_2)$. F_1 y F_2 se denominan los **focos** de la elipse.

La forma paramétrica de esta curva es:

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad y(t) = b \sin \omega t, \quad (\text{III.41})$$

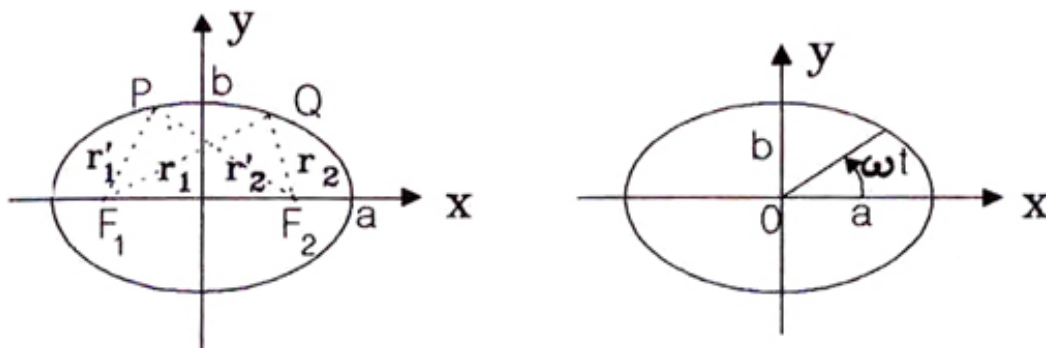


Figura III.23: La definición de la distancia focal y los semiejes a y b aparece indicada en el diagrama. Para diferenciar este ejemplo del anterior, supondremos que una partícula viaja a lo largo de esta elipse y que demora un tiempo T en completar una vuelta alrededor de la elipse.

donde t es un instante de tiempo cualquiera y $\omega = 2\pi/T$. T es el tiempo que demora la partícula en realizar una vuelta completa alrededor de la circunferencia. t es el parámetro usado para describir la elipse.

Al final de este capítulo se demuestra que el ángulo indicado en la Figura *no corresponde a la posición que la partícula ocupa en el instante t* . También se indica que, aun cuando ω es constante, la velocidad angular de la partícula, definida por $\dot{\varphi}$, no permanece constante a lo largo de la trayectoria. Esta parametrización de la elipse es directa, pero presenta esta dificultad.

Como se establece en el Apéndice, el argumento de las funciones trigonométricas seno y coseno, debe ser *adimensional*, por esta razón, ω tiene las dimensiones de $1/T$. Al multiplicarla por t produce un número sin dimensiones.

La suma de los largos de r_1 y r_2 , indicados en la Figura, permanece constante para cualquier punto de la elipse. Es decir, dados dos puntos arbitrarios de la elipse, se cumple que $r_1 + r_2 = r'_1 + r'_2$.

La forma paramétrica de una órbita cualquiera, determina las coordenadas de cada punto de la trayectoria en función del valor que toma el parámetro t . $\square$

III.6.2. Velocidad en el movimiento circular uniforme

Comencemos resolviendo un ejercicio.

Ejemplo

Una partícula recorre una circunferencia con *rapidez constante*, $|\vec{v}_0|$.

- a) Calcule la velocidad promedio entre el instante $t = 0$ y $t = 1$.
- b) Calcule la velocidad instantánea en $t = 0$.
- c) Calcule la velocidad instantánea para un valor arbitrario de t .

Nota

Recordemos que la velocidad es tangente a cada uno de los puntos de la trayectoria, y en este caso específico, tangente a cada uno de los puntos de la circunferencia.

Rapidez constante indica que el módulo del vector velocidad permanece sin variar, pero su dirección cambia. Si retomamos la definición de aceleración: diferencia entre el vector velocidad entre dos puntos dividido por el intervalo transcurrido, podemos darnos cuenta que, por el sólo hecho de cambiar la dirección de la velocidad en cada punto, el vector diferencia no es nulo y, en consecuencia, *existe aceleración*.

Esta es una de las características del *movimiento circular uniforme*; la aceleración aparece únicamente por el *cambio de dirección* de la velocidad. Además, es importante recordar que la dirección de la aceleración siempre *apunta hacia el centro de la circunferencia*. $\square$

Solución

a) El vector $\vec{x}(t)$, que describe la posición de la partícula en cada instante, lo hemos definido como:

$$\vec{x}(t) = [a \cdot \cos \omega t, \quad a \cdot \sin \omega t].$$

De acuerdo a esta definición, en $t = 0$ la partícula se encuentra justo sobre el punto $x = a$, $y = 0$, en el eje x . Esto es lo que se denomina la condición inicial, la posición del objeto en el instante cuando se comienza a medir el tiempo.

Recordemos que la velocidad media se define como la posición final menos la inicial dividida por el tiempo empleado. Esta definición aplicada a cada una de las componentes de la velocidad, da lo siguiente:

$$\langle \vec{v} \rangle_x = a \frac{(\cos \omega - 1)}{1} = a(\cos \omega - 1)$$

$$\langle \vec{v} \rangle_y = a \sin \omega.$$

Notemos que $\langle v \rangle_x \leq 0$, $\cos \omega \leq 1$ (ver Figura).

b) La velocidad instantánea en cualquier punto está representada por la pendiente de la tangente a la curva (a la circunferencia, en este caso). En $t=0$:

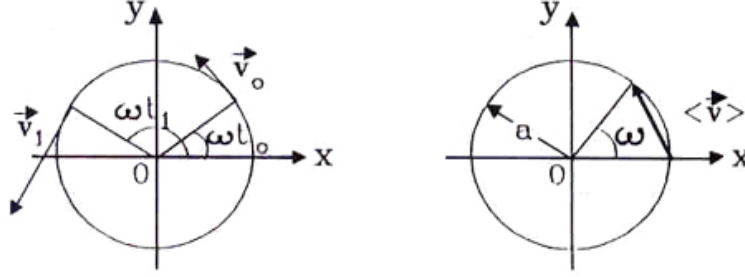


Figura III.24: El traslado a lo largo de una circunferencia es un caso particular de un movimiento en dos dimensiones. A la derecha se indica el vector velocidad promedio entre los instantes $t=0$ y $t=1$.

$$\vec{v}_x(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0} a \frac{(\cos \omega t - 1)}{t} = a \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \omega t - 1}{t} \right),$$

si t es muy pequeño, podemos desarrollar la función coseno en la serie de potencias descrita en el Apéndice, y considerar sólo los dos primeros términos de la serie:

$$\cos \omega t \simeq 1 - \frac{(\omega t)^2}{2} + \dots$$

$$v_x(t=0) = a \frac{\omega^2}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t} = 0.$$

Análogamente, en el eje y ,

$$v_y(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0} a \left(\frac{\sin \omega t}{t} \right) = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\omega t)}{t} = a \cdot \omega$$

c) Calculemos la velocidad en cualquier instante t . Este es un ejercicio similar al anterior, solo aumenta la complejidad matemática del desarrollo. Calcularemos la componente x de la velocidad, el cómputo de v_y será propuesto como ejercicio.

$$v_x = a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \omega(t + \Delta t) - \cos \omega t}{\Delta t},$$

pero,

$$\cos(\omega t + \omega \Delta t) = \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega \Delta t) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega \Delta t),$$

de aquí tenemos que:

$$\cos(\omega t + \omega \Delta t) - \cos \omega t = \cos(\omega t) \cdot [\cos(\omega \Delta t) - 1] - \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega \Delta t),$$

finalmente, desarrollando en la última expresión $\cos \omega \Delta t$ y $\sin \omega \Delta t$ en serie de potencias y cortando esta serie debido a que Δt tiende a cero, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos(\omega t + \omega \Delta t) - \cos \omega t}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[-\cos \omega t \frac{(\omega \Delta t)^2}{2 \Delta t} - \sin \omega t \frac{(\omega \Delta t)}{\Delta t} \right], \\ &= -\omega \sin \omega t + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega^2}{2} [\cos \omega t] \cdot \Delta t \right), \\ &= -\omega \sin \omega t. \end{aligned}$$

Nota

En este último paso hemos usado dos propiedades de los límites que son fáciles de comprobar en casos simples:

- $\lim_{t \rightarrow 0} k \cdot A(t) = k \lim_{t \rightarrow 0} A(t)$, donde k es una constante (no depende de t).
- $\lim_{t \rightarrow 0} [A(t) + B(t)] = \lim_{t \rightarrow 0} [A(t)] + \lim_{t \rightarrow 0} [B(t)]$

De vuelta a la penúltima línea de nuestro cálculo, allí vemos que el límite en el segundo término de la ecuación es proporcional a Δt , por lo tanto es tan pequeño como Δt , luego tiende a cero junto con Δt . Concluimos que la velocidad en la dirección x toma el siguiente valor:

$$v_x(t) = -a \cdot \omega \sin \omega t \quad (\text{III.42})$$

Para la otra componente de la velocidad se opera en forma similar y se obtiene el siguiente resultado:

Ejercicio

Demuestre que:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\omega t + \omega \Delta t) - \sin(\omega t)}{\Delta t} \right] \\ v_y(t) &= a \left[1 - \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right)^2 \right] \frac{\sin \omega t}{\Delta t} + \omega \cdot \cos \omega t - \frac{\sin \omega t}{\Delta t} \\ v_y(t) &= a \omega \cos \omega t. \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

□

$$(\text{III.44})$$

Resumiendo:

Los vectores relevantes para el movimiento circular uniforme son:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= a[\cos \omega t, \sin \omega t] \\ \vec{v}(t) &= a \cdot \omega [-\sin \omega t, \cos \omega t]\end{aligned}\tag{III.45}$$

III.6.3. Velocidad angular

La *velocidad angular* indica el cociente entre el ángulo descrito y el tiempo que tarda en recorrerlo. Se denomina ω y se mide en radianes por segundo.

En el caso de un movimiento circular *uniforme*, el objeto siempre viaja alrededor de la circunferencia con la misma *rapidez* (recuerde que su velocidad cambia de dirección en cada punto de la circunferencia pero la magnitud de la velocidad permanece constante). Tal como se indicó, definimos T como el tiempo empleado en describir una vuelta

completa (2π radianes) a la circunferencia. De esta forma, la *velocidad angular* es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{\text{radianes}}{\text{s}} \right]. \quad (\text{III.46})$$

III.7. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Dado un par de vectores arbitrarios: $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el *producto escalar* se define como una operación matemática que asocia a estos dos vectores un número real. Este número tiene una interpretación geométrica bien definida.

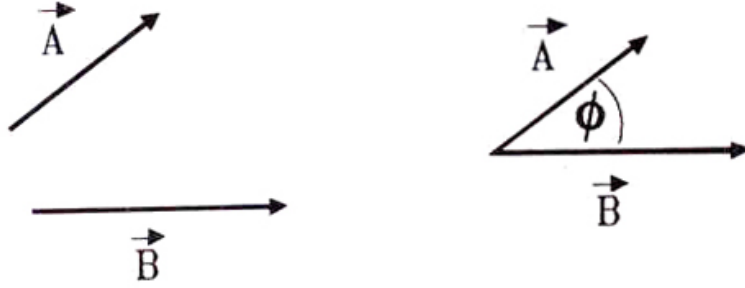


Figura III.25: Con dos vectores podemos definir una operación que consiste en el producto de los módulos de ambos vectores multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman. Esta operación se denomina el producto escalar entre estos dos vectores.

III.7.1. Definición del producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi, \quad (\text{III.47})$$

en palabras, el producto escalar entre dos vectores es igual al producto de los *módulos* de ambos vectores por el coseno del ángulo más pequeño que ellos forman.

Por ejemplo, si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, con $\vec{A} \neq 0$ y $\vec{B} \neq 0 \Rightarrow \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm(2n - 1) \cdot \pi/2$, donde n es un entero cualquiera. De acuerdo a la definición de producto escalar y el hecho que la función $\cos \phi$ es *par*, ($\cos \phi = \cos(-\phi)$), el ángulo que debemos considerar es $\frac{\pi}{2}$.

De aquí podemos concluir que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B} \quad (\text{III.48})$$

si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ no son idénticamente nulos.

III.7.2. Interpretación geométrica

El producto escalar es el producto entre la magnitud de uno de los vectores (cualquiera de los dos) por la proyección del otro vector sobre el anterior.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi = |\vec{B}| |\vec{A}| \cos \phi,$$

donde $|\vec{B}| \cos \phi$ es la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$, o como en la expresión de la derecha, con el vector $\vec{A}$ proyectado sobre el vector $\vec{B}$: $|\vec{A}| \cos \phi$.

La función $\cos \phi$, cumple el rol de proyectar uno de los vectores sobre el otro.

De la anterior discusión se desprende que el producto escalar es *conmutativo*, no depende del orden de los factores:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}.$$

III.7.3. Interpretación analítica

A partir de la definición de un vector a través de sus componentes,

$$\vec{A} = [a_x, a_y] \quad \text{y} \quad \vec{B} = [b_x, b_y],$$

se define el producto escalar de estos dos vectores como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv [a_x, a_y] \cdot [b_x, b_y] = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y. \quad (\text{III.49})$$

Esta definición de producto escalar es equivalente a la anterior y, al igual que ella *invariante*, es decir, tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia.

A continuación demostraremos esta propiedad. Para ello usaremos el producto escalar entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, donde hemos *rotado ambos vectores*, manteniendo constante el ángulo entre ellos ϕ . Los ángulos α y β que aparecen en la Figura, son los ángulos que estos vectores hacen con los nuevos ejes coordenados.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = [a_x, a_y] \cdot [b_x, b_y] = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y,$$

usando el hecho que $a_x = |\vec{A}| \cos \alpha$, y análogamente para el resto de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se tiene:

$$\begin{aligned} &= |\vec{A}| |\vec{B}| [\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta] \\ &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

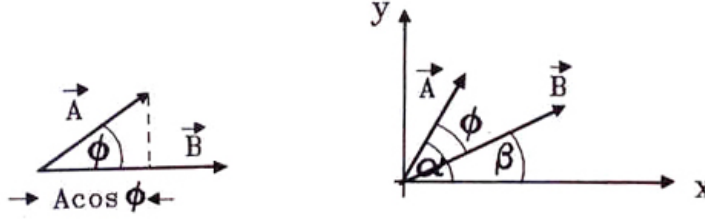


Figura III.26: El producto escalar es la proyección de un vector sobre el otro. No importa cuál de ellos se proyecte. El resultado no depende del sistema de referencia, sólo depende del ángulo entre los vectores, como se ilustra en la Figura.

Como $\alpha - \beta = \phi$, entonces la fórmula anterior se convierte en:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \phi.$$

Todos los elementos que aparecen en la definición son independientes del sistema de referencia usado. Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, sus módulos: $|\vec{A}|$ y $|\vec{B}|$ son únicos, lo mismo sucede con el ángulo entre ellos.

Queda claro que si cambiamos el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cambia el valor del producto escalar entre ellos.

Ejemplo

Usemos esta definición en el caso del movimiento circular. Veamos qué sucede con el producto escalar entre el vector posición y la velocidad de un punto que recorre una circunferencia [III.46].

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{v} &= a^2 \omega [\cos \omega t, \sin \omega t] \cdot [-\sin \omega t, \cos \omega t] \\ &= a^2 \omega [-\cos \omega t \cdot \sin \omega t + \cos \omega t \cdot \sin \omega t] = 0 \\ &\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{x} \quad \text{en todo instante } t. \end{aligned}$$

Por ejemplo si $\omega t = \pi/2$, $\vec{x}(t) = a[0, 1]$ y $\vec{v}(t) = a\omega[-1, 0]$.

Analizaremos nuevamente el significado de ωt . Como ωt es un ángulo, debe ser una cantidad adimensional, por lo tanto $[\omega] = \frac{1}{T}$. ω recibe el nombre de *velocidad angular* y se puede dar en diversas formas como las que se indican a continuación

$$\omega = \frac{\text{radianes}}{\text{s}} = \frac{2\pi}{T}, \quad (\text{III.50})$$

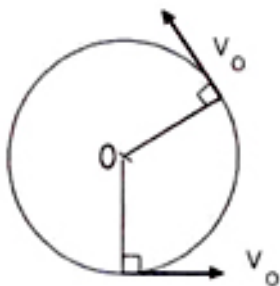


Figura III.27: El vector velocidad es siempre perpendicular al vector posición en el caso del movimiento circular.

aquí T identifica el tiempo que demora un objeto en recorrer 2π radianes, ó 360° .

$$\omega = \text{R.P.M} \equiv \text{Revoluciones por minuto} \equiv \frac{\text{número de vueltas}}{1 \text{ minuto}},$$

(una vuelta completa $\equiv 2\pi$ radianes, un minuto $\equiv 60$ segundos.)

Ejemplo

$$\omega = 60 \text{ RPM} = 60 \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} = \frac{60 \times 2\pi}{60} = 2\pi \frac{\text{radianes}}{\text{s}}$$

De esta forma, si ω se expresa en radianes/s y t en segundos, entonces $[\omega t] \equiv$ ángulo en radianes.

Ejemplo

Un automóvil recorre un camino con una velocidad promedio de 60 km/hora. Si el diámetro de sus ruedas es 60 cm, ¿cuál es el número de RPM de las ruedas del auto?

En una hora recorrió 60 km y la rueda dio $[60 \times 10^5 \text{ cm}]/[\pi \cdot 60 \text{ cm}]$ vueltas.

$$\frac{60 \times 10^5}{\pi \cdot 60} = \frac{1}{\pi} \times 10^5 \quad \text{Vueltas por hora.}$$

$$= (10^5/\pi) \frac{\text{vueltas}}{1 \times 60 \cdot \text{min}} \simeq 5,12 \times 10^2 \text{ RPM.}$$

III.7.4. Aceleración en un movimiento circular uniforme

Expresión algebraica

Supongamos que un objeto se mueve sobre una circunferencia de radio $\mathbf{r}$ con una velocidad angular ω constante. Su velocidad tangencial está dada por:

$$\vec{v}(t) = r\omega[-\sin \omega t, \cos \omega t]$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} a_x(t) &= -r\omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega t + \omega \Delta t) - \sin \omega t}{\Delta t} \\ &= -r\omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t \cos \omega \Delta t + \cos \omega t \sin \omega \Delta t - \sin \omega t}{\Delta t} \end{aligned}$$

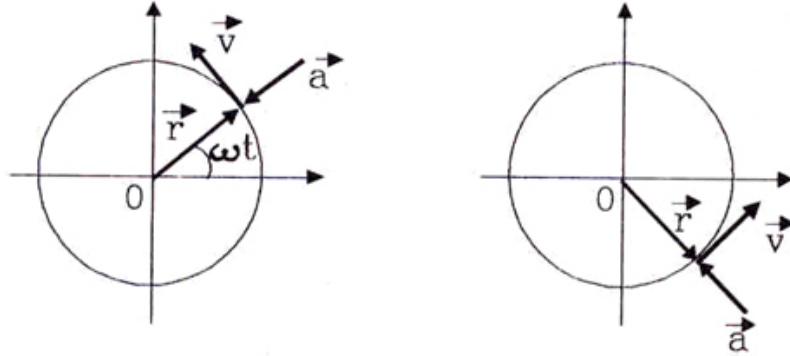


Figura III.28: Representación gráfica de los vectores posición, velocidad y aceleración en un punto arbitrario de la trayectoria del cuerpo.

Si $\omega \Delta t$ es muy pequeño podemos desarrollar las funciones seno y coseno en serie de potencias. Para ello usamos las expresiones del Apéndice, obteniendo el siguiente resultado.

$$a_x(t) \simeq r\omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \omega t [1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{2}] + \omega \Delta t \cos \omega t - \sin \omega t}{\Delta t} \quad (\text{III.51})$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero, tenemos:

$$a_x(t) = -r\omega \cdot \omega \cos \omega t + 0(\Delta t)$$

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= -r\omega^2 \cos \omega t, \text{ y, análogamente} \\
 a_y(t) &= -r\omega^2 \sin \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{III.52}$$

Finalmente, a partir de este resultado verificamos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = r \cdot (r\omega^2) \cos \pi = -(r\omega)^2.$$

$$|\vec{a}| = r\omega^2$$

Por lo tanto $\vec{a} \perp \vec{v}$ y $\vec{a} \parallel \vec{r}$.

III.7.5. Interpretación geométrica de la aceleración centrípeta

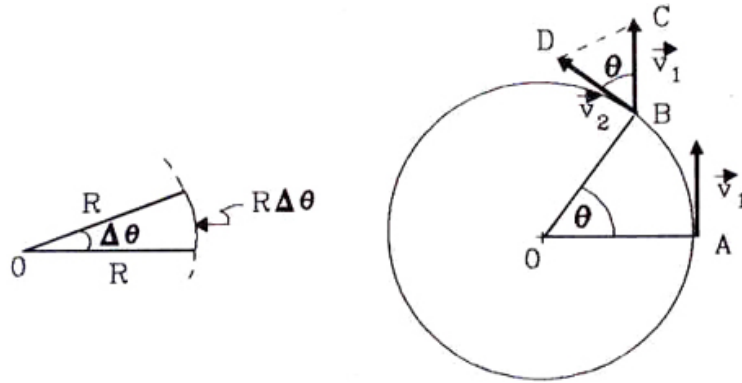


Figura III.29: Se ilustra en forma geométrica la aceleración centrípeta en el movimiento circular uniforme. El ángulo θ se supone pequeño, a pesar que aparece aquí exagerado para no agrupar demasiado las componentes de la Figura.

La aceleración asociada al arco de circunferencia AB es:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \text{con} \quad \Delta \vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

pero como es un movimiento circular *uniforme*, (la velocidad sólo cambia de dirección):

$$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|.$$

Usando la semejanza entre los triángulos:

$$\Delta OAB \sim \Delta BCD \quad (\overrightarrow{BC} \parallel \vec{v}_1),$$

se obtiene la siguiente igualdad entre su cociente:

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}.$$

A continuación, si tomamos dos instantes muy cercanos, podemos *aproximar* $|\overrightarrow{AB}|$ por el largo de la cuerda $R \Delta \theta$, obteniendo:

$$|\Delta \vec{v}| = \Delta \theta |\vec{v}|,$$

y, finalmente:

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} |\vec{v}| = \omega \cdot |\vec{v}| \quad (\text{III.53})$$

En la Figura, el vector $\overrightarrow{CD}$ representa geoméricamente la aceleración $\vec{a}(t)$.

Usando sólo geometría, podemos demostrar que la aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia, como explicamos en el siguiente párrafo.

De los triángulos semejantes ΔOAB y ΔBCD , definidos anteriormente, se tiene que $\vec{v}_2$ es perpendicular a OB , y de aquí se desprende que en el límite, cuando la cuerda AB tienda a confundirse con la tangente, el vector $\Delta \vec{v}$ tiende a su vez a posicionarse apuntando hacia el centro de la circunferencia.

Analíticamente podemos reforzar este argumento, mostrando que el vector aceleración en el movimiento circular uniforme apunta radialmente hacia el centro de la circunferencia. Para ello necesitamos jugar con vectores unitarios, aquellos de módulo unitario, como $\hat{i}$, por ejemplo.

Sabemos que $|\vec{a}| = \omega |\vec{v}|$. Hemos demostrado que a partir de *cualquier* vector $\vec{A}$, podemos construir un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{A}$: $\vec{A}/|\vec{A}| = \hat{A}$. Luego, $\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$, pero a partir de las ecuaciones [III.52]:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -[\cos \omega t, \sin \omega t] = -\hat{x} \equiv -\frac{\vec{x}(B)}{|\vec{x}(B)|}$$

Recordemos que el vector posición de B es:

$$\vec{x}(B) = R[\cos \omega t, \sin \omega t],$$

su módulo es: $|\vec{x}(B)| = R$, y el término entre corchetes en la expresión anterior para $\vec{x}(B)$, agrupa precisamente a las componentes del vector unitario $\hat{x}$. Este resultado nos permite expresar la aceleración $\vec{a}$ en distintas formas como se señala a continuación:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= -\omega|\vec{v}|[\cos \omega t, \sin \omega t] = -\omega|\vec{v}|\hat{x}, \\ \vec{a} &= -\omega^2 R[\cos \omega t, \sin \omega t] = -\omega^2 \vec{x}, \\ \vec{a} &= -\frac{|\vec{v}|^2}{R}[\cos \omega t, \sin \omega t] = -\frac{|\vec{v}|^2}{R}\hat{x}.\end{aligned}\tag{III.54}$$

Donde hemos usado $|\vec{v}| = \omega R$, en la segunda ecuación.

En las expresiones anteriores hemos escrito $|\vec{a}|$ de tres formas diferentes. Los corchetes identifican al vector unitario $\hat{a}$. Una vez que nos hemos familiarizado con las direcciones, magnitudes y sentidos de los vectores aceleración y velocidad, podemos trabajar con ellos usando simplemente sus módulos puesto que el resto de la información ya la conocemos.

La aceleración que sufre un objeto en un movimiento circular y que apunta hacia el centro se denomina **aceleración centrípeta**.

III.8. RESUMEN DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

- El vector velocidad es tangente a la circunferencia en todo instante. Su módulo (longitud del vector) permanece *constante*, pero su dirección cambia de punto a punto en la circunferencia.
- El módulo de la velocidad es $|\vec{v}| = \omega R$. Donde ω es la velocidad angular de la partícula: radianes por unidad de tiempo.
- El vector aceleración apunta permanentemente hacia el centro de la circunferencia y su módulo permanece constante. Por esta razón se denomina aceleración centrípeta. Es perpendicular a la velocidad.
- Su valor absoluto es:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}, \text{ escrito de otra forma: } |\vec{a}| = |\omega|^2 R.$$

Ejemplo

Escriba la ecuación paramétrica de una elipse centrada en el origen de coordenadas.

La ecuación de una elipse con esta característica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si escribimos las variables x e y de la siguiente forma:

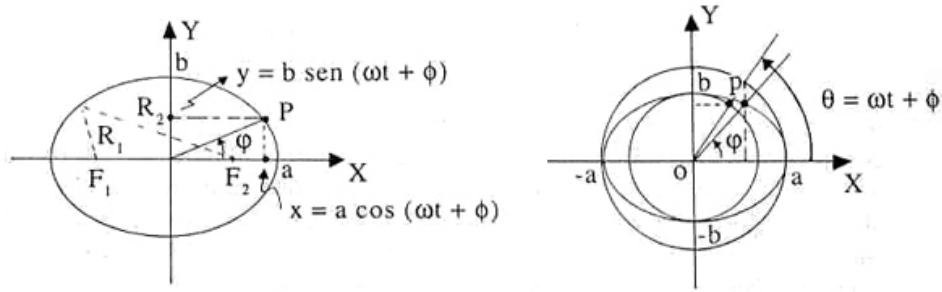


Figura III.30: La suma de R_1 y R_2 es la misma para cualquier punto de la elipse. Los valores a y b son los semiejes de la elipse. Se indica el significado del ángulo $\theta = \omega t + \phi$ y ϕ . Este último señala la posición de la partícula P .

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi), \quad (III.55)$$

$$y(t) = b \sin(\omega t + \phi),$$

la ecuación de la elipse se satisface para cualquier instante de tiempo t . Lo que ocurre es que al reemplazar x e y por estas expresiones, la ecuación original se transforma en una identidad trigonométrica:

$$\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) = 1.$$

Si $a = b$, las ecuaciones anteriores corresponden a una circunferencia.

Es claro que a y b representan la amplitud máxima que logran las coordenadas sobre el eje x e y respectivamente. Esta expresión es válida para todo valor de $(\omega t + \phi)$.

El ángulo ϕ señala la posición de la partícula que orbita la elipse. θ es un ángulo que permite encontrar los valores de x e y en forma directa, pero *no identifica la posición de la partícula en forma inmediata*. La relación entre ambos ángulos es:

$$\tan \phi = \frac{y}{x} = \frac{b \sen \theta}{a \cos \theta} = \frac{b}{a} \tan \theta.$$

θ y φ coinciden sobre los ejes coordenados.

Relación entre $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$

En lo que sigue sólo consideraremos el caso $\dot{\theta} \equiv \omega_o = \text{constante}$. El vector OQ recorre ambas circunferencias, de radio a y b , con velocidad angular constante. Debemos relacionar este valor con $\dot{\varphi}$, la velocidad angular del vector que apunta hacia la partícula que recorre la elipse.

Para encontrar esta relación, recurrimos al resultado del problema 23 del capítulo II. Allí se establece que:

$$\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\tan(\theta + \Delta \theta) - \tan \theta}{\Delta \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta},$$

así es que una pequeña variación de la tangente está dada por:

$$\Delta \tan \theta \equiv \tan(\theta + \Delta \theta) - \tan \theta = \frac{\Delta \theta}{\cos^2 \theta},$$

usando la igualdad $\tan \varphi = \frac{b}{a} \tan \theta$, podemos relacionar la variación de $\Delta \varphi$ y $\Delta \theta$:

$$\frac{\Delta \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{b}{a} \frac{\Delta \theta}{\cos^2 \theta},$$

suponiendo que esta variación ocurre en Δt segundos y definiendo $\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$, tenemos:

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{b \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \theta} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \frac{b \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \theta} \omega_o.$$

Expresando esta cantidad en función del ángulo θ :

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{a b \omega_o}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sen^2 \theta} = \frac{a b \omega_o}{|\vec{r}|^2},$$

donde $|\vec{r}|$ es el módulo del vector que une el origen de coordenadas con la partícula que viaja por la elipse.

Consideremos el caso en que el ángulo θ toma la siguiente forma: $\theta = \omega_o t + \phi$, es decir, en $t = 0$, $\theta = \phi$. La partícula no comienza su movimiento de $\varphi = 0$.

¿Qué representa ϕ ?

El movimiento de una partícula no tiene porqué comenzar justamente en el extremo de uno de los semiejes. Lo más probable es que en un cierto instante, digamos $t = 0$, la partícula se ubica en un punto de coordenadas $x(t = 0) = p$ e $y(t = 0) = q$, donde p y q son las coordenadas del punto P de la Figura. En base a estos datos se ajusta el valor de ϕ .

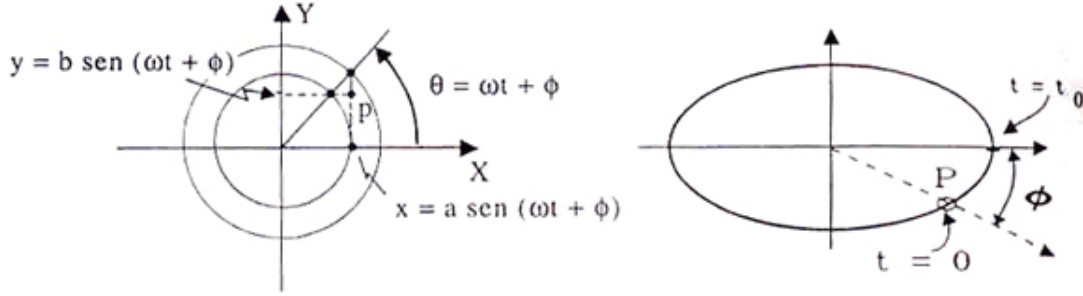


Figura III.31: El ángulo ϕ indica la posición de la partícula en la elipse en el instante $t=0$

Como ϕ debe ser un número adimensional podemos expresarlo como $(-\omega t_0)$, donde ω es la velocidad angular del punto que recorre la elipse y t_0 es una constante que determina el valor de ϕ al comenzar el movimiento. Con este reemplazo, las ecuaciones quedan:

$$x(t) = a \cos(\omega t - \omega t_0) = a \cos[\omega(t - t_0)], \quad y(t) = b \sin[\omega(t - t_0)].$$

Ejemplo

$x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$ e $y(t) = b \sin(\omega t + \phi)$ forman la expresión más general para describir el movimiento de una partícula sobre una elipse generado por el movimiento circular uniforme. Represente este movimiento de la siguiente forma:

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (III.56)$$

$$y(t) = D \cos \omega t + F \sin \omega t, \quad (III.57)$$

donde A, B, D, F son constantes que dependen de a, ϕ y b.

Desarrollando cada una de las funciones trigonométricas definidas en el ejercicio anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cos(\omega t + \phi) = a [\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi], \\
 &= [a \cos \phi] \cos \omega t + [-a \sin \phi] \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Aquí hemos usado $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Comparando con la función trigonométrica dada, se encuentra que:

$$A = a \cos \phi, \quad B = -a \sin \phi.$$

Análogamente se pueden encontrar D y F.

¿Qué sucede con la velocidad de esta partícula?

Calcularemos su velocidad tomando la razón entre el límite de dos posiciones cercanas y el tiempo que le toma en ir de la posición inicial a la final. Esto lo haremos sólo para una de las componentes y dejaremos el cálculo de la otra componente como ejercicio, porque su desarrollo es muy similar.

$$\begin{aligned}
 v_x(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right] \equiv \frac{dx(t)}{dt} \\
 v_x(t) &= \frac{d}{dt}(a \cos[\omega t + \phi]) = \frac{d}{dt}[A \cos \omega t + B \sin \omega t]
 \end{aligned}$$

Usando la propiedad que el límite de una suma es la suma de los límites de cada una de las componentes y que las constantes no son afectadas por el límite tenemos:

$$v_x(t) = A \frac{d}{dt}(\cos \omega t) + B \frac{d}{dt}(\sin \omega t),$$

pero, esta derivada ya la hemos estudiado antes, en la descripción del movimiento circular uniforme. El resultado es:

$$v_x(t) = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t,$$

Reemplazando las expresiones para A y B escritas anteriormente,

$$v_x(t) = a \omega [-\cos \phi \sin \omega t - \sin \phi \cos \omega t],$$

y usando la definición del valor del seno de una suma de ángulos tenemos:

$$v_x(t) = -a \omega \sin(\omega t + \phi). \quad (\text{III.58})$$

Se deja propuesto demostrar que: $v_y(t) = b \omega \cos(\omega t + \phi)$. $\square$

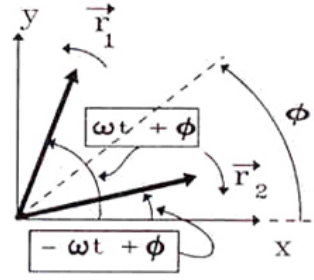
Ejercicio

Para los valores de $x(t)$ e $y(t)$, ya dados, demuestre que:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \right] = \frac{d}{dt} v_x = -a \omega^2 \cos(\omega t + \phi), \quad a_y = -b \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

Ejemplo

Dos vectores, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, de igual módulo giran con velocidad angular $+\omega$ y $-\omega$ respectivamente. En $t = 0$ ambos apuntan en la misma dirección y sentido (ver Figura). Demostrar que el vector resultante de la suma de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es un vector que *no* gira, sino que oscila a lo largo de la dirección determinada por el ángulo ϕ .

**Nota:**

Usaremos las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\cos(\pm \omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi \mp \sin \omega t \sin \phi \quad (\text{III.59})$$

$$\sin(-\omega t + \phi) = -\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi \quad (\text{III.60})$$

Desarrollando cada uno de los vectores en componentes tenemos:

$$\vec{r}_1 = a [\cos(\omega t + \phi), \sin(\omega t + \phi)] = a \cos(\omega t + \phi) \hat{i} + a \sin(\omega t + \phi) \hat{j},$$

$$\vec{r}_2 = a [\cos(-\omega t + \phi), \sin(-\omega t + \phi)] = a \cos(-\omega t + \phi) \hat{i} + a \sin(-\omega t + \phi) \hat{j}.$$

La resultante de la suma de ambos vectores es la suma de sus componentes:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = a [\cos(\omega t + \phi) + \cos(-\omega t + \phi)] \hat{i} + a [\sin(\omega t + \phi) + \sin(-\omega t + \phi)] \hat{j},$$

Después de aplicar las igualdades trigonométricas señaladas anteriormente, se obtiene:

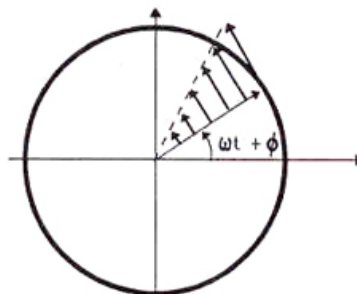
$$\vec{R} = \{a \cos \omega t\}[\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}]. \quad (\text{III.61})$$

De la ecuación anterior vemos que el vector suma de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ permanece apuntando siempre en la misma dirección ϕ , como lo indica el vector $[\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}]$. Por otra parte el módulo del vector $\vec{R}$ está dado por $|\vec{R}| = a \cos \omega t$, de donde concluimos que varía sinusoidalmente en el tiempo.

Ejercicio

Demuestre que la magnitud de la velocidad de un punto de la rueda, en cualquier instante de tiempo, crece linealmente con la distancia de este punto al centro.

Dibuje el vector velocidad asociado a distintos radios de la rueda.



Solución

$$\vec{v} = r \omega [-\sin(\omega t + \phi), \cos(\omega t + \phi)]$$

$$|\vec{v}| = r \omega, \quad \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

III.9. EJERCICIOS

- 1.- a) Un hombre camina a lo largo de una circunferencia centrada en el origen, desde la posición $x = 5$ m, $y = 0$, a una posición final $x = 0$, $y = 5$ m. ¿Cuál es su desplazamiento?
- b) Un segundo hombre camina desde la misma posición inicial a lo largo del eje x hasta el origen y luego camina a lo largo del eje y hasta $y = 5$ m, $x = 0$ ¿Cuál es su desplazamiento?
- 2.- Exprese los siguientes vectores en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.
 - a) Una velocidad de 10 m/s y un ángulo de elevación de 60° .
 - b) Un vector $\vec{A}$ de magnitud $A = 5$ y $\theta = 225^\circ$ con respecto al x.
 - c) Un desplazamiento desde el origen al punto $x = 14$ m, $y = -6$ m.

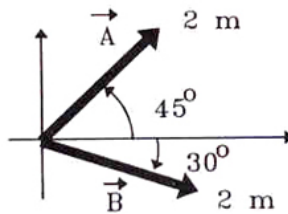


Figura III.32: Ejercicio # 3. Suma y resta de vectores

- 3.- Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la Figura, encuentre sus componentes según x e y . Determine las componentes, magnitud y dirección de la suma $(\vec{A} + \vec{B})$ y de su diferencia $(\vec{A} - \vec{B})$.
- 4.- Las componentes del vector posición de una partícula (x, y) son $(2m, 3m)$ en $t = 0$, $(6m, 7m)$, en $t = 2$ s y $(13m, 14m)$ en $t = 5$ s.
- Encuentre $\vec{V}_M$ (velocidad media) entre $t = 0$ y $t = 2$ s.
 - Encuentre $\vec{V}_M$ entre $t = 0$ y $t = 5$ s.
- 5.- Una partícula tiene un vector posición dado por $\vec{r} = (30t)\hat{i} + (40t - 5t^2)\hat{j}$ donde t representa el tiempo y las dimensiones de los números son tales que r tiene dimensiones de longitud (metros). Encuentre los vectores velocidad y aceleración instantáneas para este movimiento.
- 6.- Una partícula tiene una aceleración, constante, determinada por:

$$\vec{a} = (6 \cdot \hat{i} + 4 \cdot \hat{j})[m/s^2].$$

Si en $t = 0$, su velocidad es nula y su vector posición es $\vec{x}_0 = 10 \cdot \hat{i}$ [m]:

- Encuentre los vectores velocidad y posición en un instante t cualquiera.
 - Encuentre la ecuación de la trayectoria en el plano y dibújela.
- 7.- Las direcciones de dos barcos A y B que se alejan del puerto forman un ángulo θ entre ellas como se indica en la Figura.
- El barco A se aleja con una rapidez constante de 5 m/s, en tanto que el barco B se mueve con *aceleración constante* de 2 m/s². Si ambos partieron simultáneamente del puerto, y la rapidez inicial de B era nula, calcule:

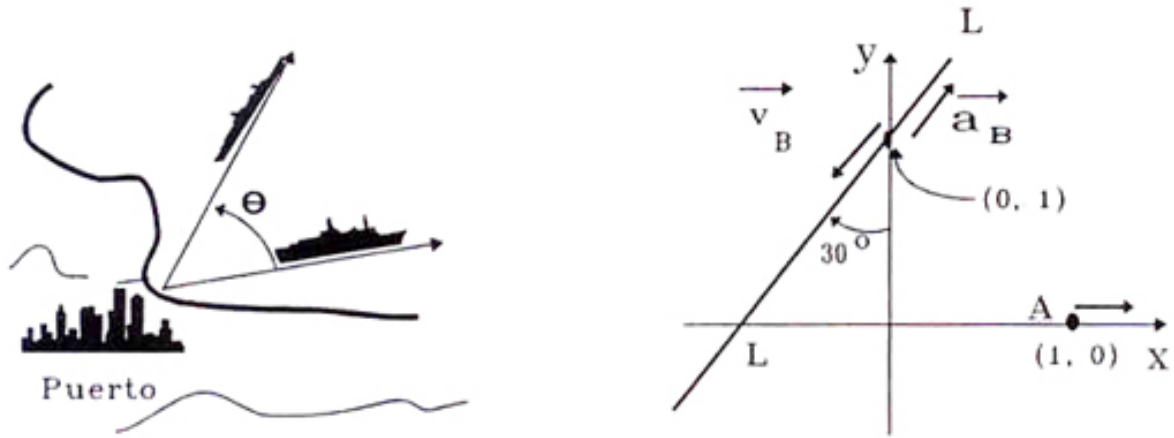


Figura III.33: Ejercicio # 7

Ejercicio # 9

- a) ¿Cuál es la distancia que separa los barcos al cabo de 10 segundos?
- b) ¿A qué distancia están del puerto y cuál es la velocidad de cada uno de ellos en ese instante?
- 8.– Desde un avión situado a una altura $h = 1$ km, se lanza una bomba con velocidad inicial V_0 , horizontal. Por efecto del viento la bomba experimenta, además de la aceleración de gravedad, una desaceleración horizontal cuya magnitud es de 1 m/s^2 . Si $V_0 = 50 \text{ m/s}$, calcule:
- a) El tiempo que demora en caer. ¿Cómo se afectaría el resultado anterior si no hubiera viento?
- b) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento toca Tierra?
- 9.– La partícula A de la Figura, se desliza sobre el eje x y la partícula B sobre la recta L-L que forma un ángulo de 30° con el eje vertical.
- En $t = 0$, A se encuentra en $(1, 0)$ y B en $(0, 1)$. Sus velocidades y aceleraciones son: $V_A = 0$, $a_A = 2 \text{ m/s}^2$ (constante), $V_B(0) = 4 \text{ m/s}$ y $a_B = 4 \text{ m/s}^2$ (constante). El sentido de cada una de ellas aparece indicado en la Figura.
- A partir de estos datos determine a qué distancia se encuentran ambos móviles cuando la velocidad de B se hace instantáneamente cero.
- 10.– Un proyectil se lanza con velocidad inicial V_0 y ángulo de lanzamiento θ , ambos conocidos. El proyectil sobrepasa una barrera rectangular de altura desconocida h , rozando sus dos vértices A y B.

- a) Calcular la distancia x que separa el punto de lanzamiento, de la pared más cercana del obstáculo.
- b) Calcular la altura de la barrera.

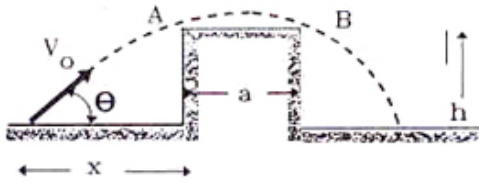
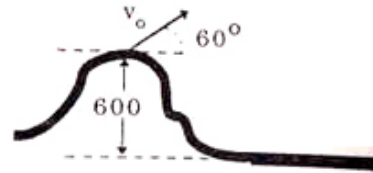


Figura III.34: Ejercicio #10



Ejercicio #11.

- 11.- Se lanza un proyectil desde la cima de una cumbre cuya altura es de 600 m, con una velocidad $V_0 = 200$ m/s y un ángulo $\theta = 60^\circ$. Despreciando la resistencia del aire, ¿en qué punto toca tierra el proyectil?
- 12.- Desde una distancia d del borde recto de un tobogán, se dispara una bengala. Si el tobogán tiene una altura h y un largo b , determinar ambas componentes de la velocidad inicial del proyectil para que haga contacto con el tobogán justo en el vértice superior y que su velocidad en ese punto, sea paralela al plano inclinado.
- 13.- Desde lo alto de una escalera con peldaños de largo a y altura a , se lanza un proyectil con velocidad horizontal $\vec{v}_0$.

Determine en función de los parámetros dados, el peldaño en que caerá el proyectil.

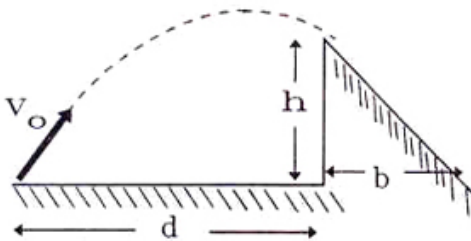
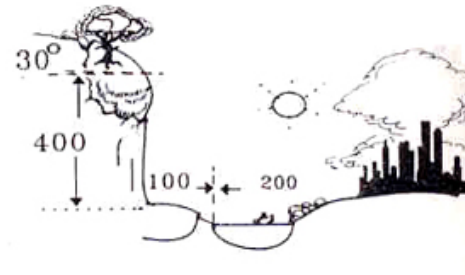


Figura III.35: Ejercicio # 12



Ejercicio# 14.

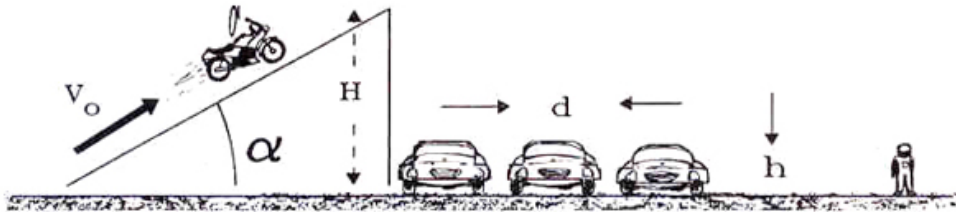
- 14.– Una gran roca está suelta sobre un risco de 400 m de altura, cerca de una pequeña villa, a la cual amenaza con su caída. Se calcula que la inclinación media del risco es de 30° y que al caer, tendrá una rapidez 50 m/s justo al enfrentar el precipicio. Junto a la villa hay un lago de 200 m de diámetro y que a su vez se encuentra a 100 m de la base del risco.

- a) ¿Dónde caerá la roca?
b) ¿Qué rapidez tendrá al llegar al suelo?

- 15.– El motociclista de la Figura desea saltar por sobre N autos de altura h y ancho d . Para ello usará una rampa inclinada (*que no tiene roce*) en un ángulo α y de altura H . El motociclista ingresa a la rampa con una velocidad v_0 y sube por ella sin *acelerar* (ya que no puede, debido a la ausencia de roce).

Se pide que calcule la velocidad mínima con la cual debe ingresar el motociclista a la rampa, si desea saltar por sobre 14 autos dispuestos como muestra la Figura.

Los valores numéricos para las variables son: $h = 1$ m $H = 12$ m $\alpha = 45^\circ$ $d = 2$ m.



- 16.– La Figura muestra dos autos que corren con *rapidez constante* en un autódromo circular. El auto A corre por la pista interior de radio r_A y el auto B por la pista exterior de radio r_B , con $r_A < r_B$.

Se sabe que la rapidez de B es v_B , ¿cuál es la máxima rapidez que puede tener A, para que en el caso más adverso, alcance dos veces a B, mientras éste último describe una sola vuelta al circuito?

- 17.– La Figura indica la conexión en una caja de cambios de un automóvil. Si la razón entre los radios de ambos engranajes es la misma para ambos pares, encuentre este número si deseamos que en la primera marcha con el motor a 2000 RPM, el auto tenga una velocidad de 30 Km/h. Por cada cinco vueltas en la salida de la caja de cambios, las ruedas dan una vuelta. El radio de las ruedas es de 50 cm.

- 18.– Un agricultor se encuentra viajando en su camioneta a una velocidad tal que sus ruedas, de 40 cm de radio, giran a una razón de seis vueltas por segundo. Este

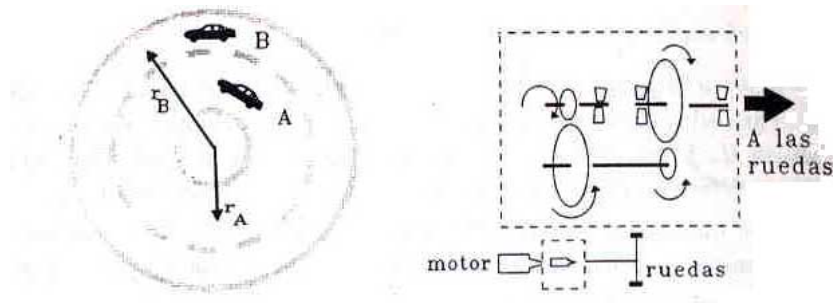


Figura III.36: Ejercicio # 16

Ejercicio# 17.

conductor –infringiendo abiertamente el reglamento,– lleva en la parte trasera a un niño. Este al encontrar una naranja en el piso, la lanza con un ángulo de 45° y con una velocidad $v_N = 20 \text{ m/s}$ respecto a la camioneta. Si la altura de este lanzamiento es de 1 metro; ¿a qué distancia del punto P, que marca el lugar de lanzamiento, cayó la naranja? (No considere el roce con el aire).

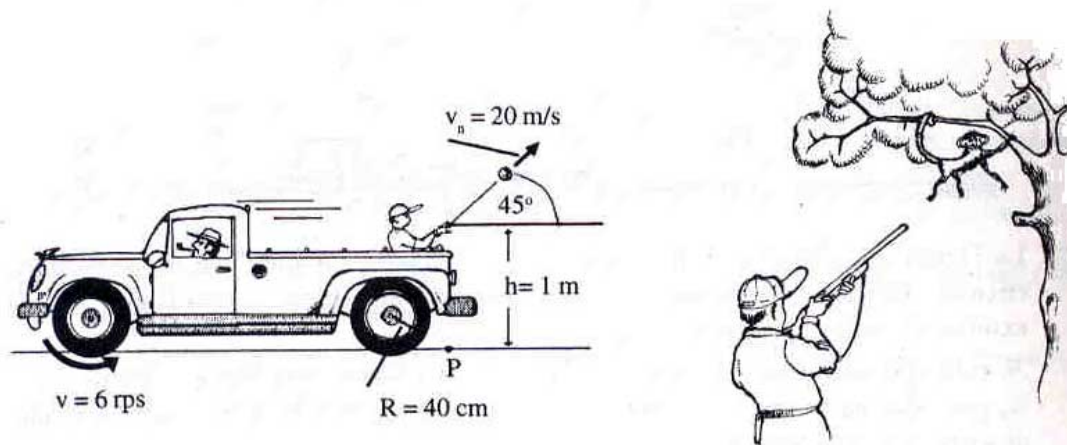


Figura III.37: Ejercicio # 18

Ejercicio # 19

- 19.– Un mono está colgado a una altura h de un árbol. Un cazador le apunta directamente con un rifle desde una distancia d . En el mismo instante en que dispara el rifle, el mono se suelta del árbol. ¿Cree Ud. que podrá sobrevivir este animalito?
- 20.– Un pájaro vuela horizontalmente con velocidad V y a una altura constante h . En el instante que sobrevuela a un rufián armado de una piedra, éste se la lanza con su máxima velocidad posible: U .

- a) ¿Cuál es el valor mínimo de la velocidad U , para que el proyectil pueda alcanzar al pájaro?
- b) ¿Cuál es el ángulo, medido con respecto a la normal, con el cual debe disparar la piedra?
- c) ¿Qué distancia recorre el pájaro antes de ser malherido?

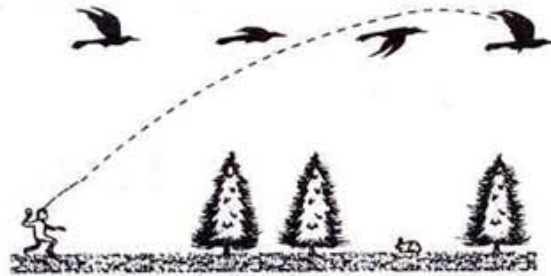


Figura III.38: Ejercicio # 20

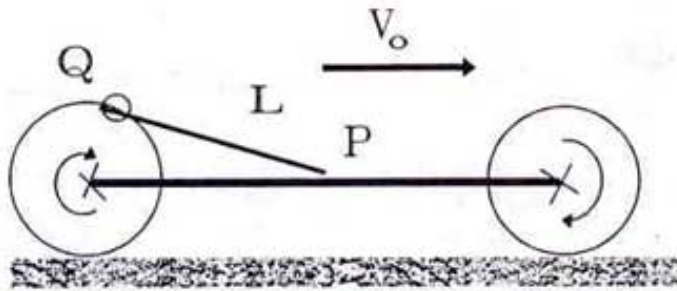


Figura III.39: Ejercicio # 21

- 21.- Un carro se mueve con velocidad uniforme $v_0 = 2 \text{ m/s}$. El punto P se puede deslizar horizontalmente y está unido al borde de una rueda de radio $R = 3 \text{ m}$ por medio de una vara de largo $L = 5 \text{ m}$. Encuentre la velocidad del punto P en función de t si para $t = 0$ el punto Q está junto al suelo.
- 22.- Un objeto celeste situado a una gran distancia, emite una nube brillante de gas que viaja a la velocidad V , y formando un ángulo θ con nuestra línea visual (ver Figura).
- a) Teniendo presente que la velocidad de la luz es finita e igual a c , demuestre que la velocidad *transversal aparente* que mide un observador en nuestro planeta es:

$$V_{\text{aparente}} = \frac{V \sin \theta}{1 - \frac{V \cos \theta}{c}}.$$

b) Demuestre que esta velocidad aparente puede ser mayor que la velocidad de la luz c .

23.– La Figura muestra dos ruedas de radios r_1 y r_2 , las cuales están unidas por una correa de transmisión inextensible. Los ejes de las ruedas permanecen fijos.

a) Compare las velocidades angulares y tangenciales de ambas ruedas. b) Si la rotación de las ruedas es uniforme, encuentre una relación entre las frecuencias f_1 y f_2 , y los radios r_1 y r_2 .

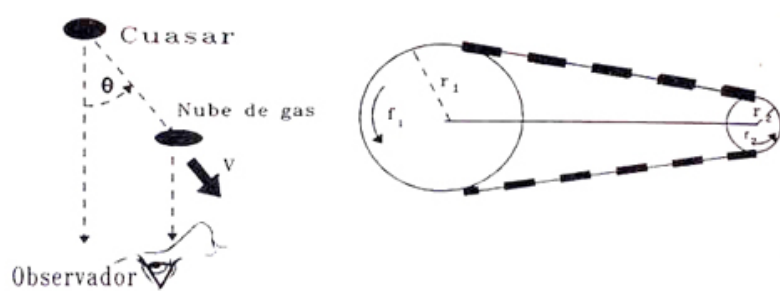


Figura III.40: Ejercicio # 22

Ejercicio # 23

Dinámica

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

IV

Índice general

IV.DINAMICA	143
IV.1. LEYES DE NEWTON, LA SINTESIS FINAL	143
IV.1.1. Dimensiones	147
IV.2. APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON: ESTÁTICA	148
IV.2.1. Diagrama de cuerpo libre	148
IV.3. SISTEMAS INERCIALES	152
IV.4. EJEMPLOS DE DINAMICA	155
IV.5. FRICCION	176
IV.6. EJERCICIOS	189

Capítulo IV

DINAMICA

A modo de introducción, se incluye un párrafo que aparece en el libro de ejercicios numéricos de física de C. W. Misner y P. J. Cooney¹:

*El área de física que desarrolla un vocabulario para describir el movimiento se llama **cinemática**. ... Un vuelco sensacional en este problema, (del movimiento de los cuerpos) que culminó con los trabajos de Galileo y Newton, fue el descubrimiento que ni la posición x ni la velocidad v tenían causas inmediatas, en contraste con la aceleración, que sí las poseía. Este resultado fue –y aún es– difícil de aceptar, porque la gente estudiosa de estas materias había logrado obtener gran parte de su información a través de la observación, a simple vista. El ojo es muy sensitivo a la velocidad pero a menudo ignora la aceleración, en consecuencia encontramos difícil de aceptar que las leyes fundamentales de física no consideren la velocidad.*

Nuestro sentidos táctiles (tacto y equilibrio) nos proporcionan la ayuda esencial que necesitamos para estudiar la aceleración, la segunda derivada de $x(t)$.

La aceleración es central en las Leyes de Newton que dejamos establecidas en la siguiente sección.

IV.1. LEYES DE NEWTON, LA SINTESIS FINAL

La aparición de las tres leyes de movimiento y la ley de gravitación universal, todas descubiertas por Isaac Newton, constituyó la culminación de una serie de logros alcanzados durante los siglos XVI y XVII. Entre ellos se destacan: las leyes de Kepler en el

¹*Spreadsheet Physics*, C. W. Misner y P. J. Cooney, Addison Wesley Publishing Company

campo de la astronomía, las ideas de Galileo y su descripción del movimiento de los cuerpos, el progreso logrado por Descartes en geometría analítica, Huygens y su libro acerca de la luz, el perfeccionamiento del reloj de péndulo... Estos y muchos otros, hicieron del siglo XVI y XVII un período brillante en el desarrollo de la humanidad. Todo sucedió en el lapso de tiempo comprendido entre dos generaciones: la de Galileo y Newton. Este último nació el mismo año de la muerte de Galileo, en 1642.

La revolución que produjo la publicación de su libro “Principia” (1687) que contenía sus leyes más famosas, no puede ser considerada como la obra de un sólo hombre, sino el broche genial que coronó el esfuerzo de quienes lo precedieron.

Las leyes de Newton desenmascaran el origen de la aceleración.

PRIMERA LEY

Cada cuerpo material persiste en su estado de reposo o de movimiento uniforme, solamente si la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él, se anulan entre sí.

Esta es la ley de **inercia**. Es la definición de un **sistema inercial**. Por ejemplo, si en un cierto sistema de referencia un objeto que inicialmente estaba en reposo permanece en reposo, entonces este sistema constituye un sistema de referencia inercial.

Históricamente ésta fue una de las afirmaciones más difíciles de sostener. Es una abierta contradicción a la física Aristotélica que postulaba que la *fuerza* (o acción ejercida por un agente externo) era proporcional a la velocidad. Se oponía también al sentido común: cualquier observador puede comprobar que para mantener un carro en movimiento con velocidad constante, necesita aplicar una fuerza constante. Galileo, como vimos, ya había dado el primer paso al atribuir a los cuerpos esta *modorra* que los hacía mantener su movimiento adquirido. Newton generalizó este principio e incluyó el movimiento circular. Esta afirmación contradecía a los filósofos antiguos y también a Galileo que pensaban que el movimiento circular –en particular el de los planetas–, era natural y no necesitaba la presencia de una fuerza (o mejor de un agente extraño) que cambiara constantemente su velocidad. Newton coincidía con Descartes en esta disputa, quien afirmaba que una partícula que describe un movimiento circular tiende a seguir por la tangente a la circunferencia en ese punto, si no es retenida en su órbita por una cuerda.

Lo usual es que la velocidad de los cuerpos cambie. En este contexto, cuando se menciona la palabra *cambio*, se incluye los siguientes casos: variaciones de la velocidad en su módulo solamente, (es decir, en su magnitud), las variaciones de su dirección manteniendo el módulo del vector constante, o al caso en que ambas, módulo y dirección, cambian en forma simultánea.

La segunda ley de Newton, contiene la relación entre la fuerza externa y la aceleración adquirida por el cuerpo. Originalmente fue escrita utilizando el *momentum*, que es el producto de la velocidad por la masa inercial de un cuerpo.

SEGUNDA LEY

El cambio de momentum es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, y apunta en la dirección y sentido de la línea generada por la fuerza neta.

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{P}.$$

La segunda ley establece en forma cuantitativa *cómo* cambia el movimiento debido a la aparición de la fuerza. Al enunciar su segunda ley, Newton dió especial importancia al concepto de *cantidad de movimiento* (momentum) $\vec{P}$

$$\vec{P} \equiv m \cdot \vec{v}_0 \quad (\text{IV.1})$$

en esta fórmula el concepto de masa es aceptado en forma intuitiva.

Si la masa permanece constante, entonces:

$$\vec{F} \Delta t = \Delta(m \cdot \vec{v}) = m \Delta \vec{v}.$$

Ahora podemos introducir la aceleración en la fórmula anterior,

$$\vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv m \cdot \vec{a}. \quad (\text{IV.2})$$

Vemos que si $\vec{F} = 0$, entonces $\Delta \vec{v} = 0$, es decir, no cambia ni la dirección ni la magnitud de la velocidad y el movimiento permanece rectilíneo.

Por otra parte si la fuerza es constante y la masa no varía, se origina un movimiento con aceleración constante. Un ejemplo, es la caída libre de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra.

La definición de *masa inercial* m , se hace a través de un experimento pensado, es decir, un experimento que es fácil describir y entender pero, difícil de realizar en la forma descrita².

² Un ensayo escrito por el Profesor Igor Saavedra acerca de las ideas y conceptos introducidos por Newton al anunciar sus leyes, se incluye en un Apéndice, al final del libro.

Por ahora aceptamos la masa inercial como un número real que asociamos con cualquier objeto y para el cual existe un procedimiento bien determinado que fija su valor sin ambigüedades.

Vemos que la expresión $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ incluye dos conceptos nuevos: fuerza y masa. Si aceptamos la definición de masa, entonces la segunda ley de Newton es una definición de fuerza, y viceversa. No hay forma de salir de este círculo vicioso puesto que tenemos una ecuación y dos conceptos nuevos.

Esta característica de las ecuaciones de Newton es común a todas las teorías realmente *nuevas*. No constituyen una extensión de los conceptos antiguos, sino más bien los conceptos antiguos *caben* y se ordenan dentro de este nuevo esquema. En este escenario se introducen conceptos nuevos –como la **fuerza**– y, simultáneamente se provee una receta consistente (vía leyes simples y universales) de cómo usarla en distintas circunstancias.

En este caso, la receta consiste en describir un procedimiento que defina la masa de un objeto en forma *única*: de una vez para siempre.

Con la masa ya definida y suponiendo que el objeto no sufre ningún cambio físico, tenemos el número que asociamos a m en las ecuaciones de Newton.

En forma *independiente*, definimos la fuerza que incluiremos en cada caso. Por ejemplo, fuerzas de interacción gravitacional si hay un objeto masivo en la cercanía, fuerzas de contacto si hay objetos que se tocan, fuerzas de roce si hay deslizamiento relativo entre superficies...etc. y, con cualquiera de estas u otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo, aplicamos la segunda ley de Newton. Enseguida verificamos si la aceleración *observada* coincide con el comportamiento obtenido a partir de la teoría. Si hay acuerdo entre la teoría y la observación, aceptamos esta ley de movimiento como verdadera. Si aparece una contradicción que no encuentre explicación dentro del esquema descrito, debemos revisar la teoría.

Newton dió una (y sólo una) prescripción clara, concreta y corta para determinar en forma única las fuerzas que intervienen en una situación dada y que es necesario utilizar para resolver cualquier problema propuesto.

Cada vez que olvidemos incluir una de las fuerzas que, de acuerdo a la prescripción, deba ser considerada, llegaremos a un resultado erróneo y, en ese caso, se nos podrá señalar *sin ambigüedades*, qué fuerza se nos olvidó incluir en el problema.

En resumen, lo impresionante en las leyes de Newton es su esquema simple y claro de funcionamiento, que es capaz de predecir acertadamente una gran cantidad de fenómenos observados en la vida diaria.

TERCERA LEY

Si un cuerpo **A**, ejerce una fuerza sobre otro **B**, éste último ejerce sobre **A**, una fuerza igual en magnitud y dirección,

pero en sentido opuesto. Estas fuerzas, denominadas de acción y reacción actúan siempre en puntos diferentes.

La tercera ley de Newton define una propiedad que deben tener todas las fuerzas. Las fuerzas de *acción* y *reacción* aparecen bien delineadas al existir dos objetos en contacto. Por ejemplo, esta prescripción indica que al tener dos bloques, A y B, y en el caso que uno, A, empuja al otro, B, se debe reemplazar A por una fuerza que actúa sobre B y, simultáneamente, una fuerza actuando sobre A, en la misma dirección que la anterior pero con sentido contrario.

Por ejemplo: al tirar un bloque mediante una cuerda se ejerce una fuerza (acción) F_0 sobre el bloque, en consecuencia –de acuerdo a la tercera ley de Newton– este objeto aplica sobre la mano una fuerza (reacción) cuya magnitud es la misma $|F_0|$, pero cuyo sentido es opuesto.

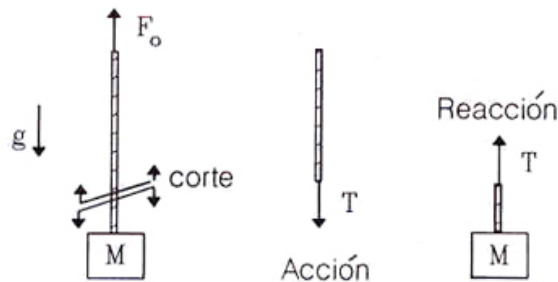


Figura IV.1: La Tercera Ley de Newton en acción. F_0 representa la fuerza que se aplica sobre el bloque a través de la cuerda. El tipo que sujeta la cuerda soporta una fuerza $-F_0$. Al cortar esta cuerda, en forma imaginaria, debemos reemplazar en cada extremo cortado la tensión T de acuerdo a esta ley.

La utilidad de esta ley es transparente cuando analizamos sistemas complejos (con varios cuerpos interactuando entre ellos). En este caso debemos *cortar (imaginariamente)*, los vínculos que une cada uno de los cuerpos y reemplazarlo por su fuerza equivalente de acuerdo a la tercera ley de Newton.

IV.1.1. Dimensiones

Si la masa se mide en kgs. y la aceleración en (m/s^2) , entonces la fuerza viene dada en newtons.

$$1 \text{ newton} \equiv 1 \text{ kg} \times 1 \frac{m}{(s)^2} \equiv 1N, \quad \text{MKS} \quad (\text{IV.3})$$

$$1 \text{ newton} = 1000 \text{ gr} \times \frac{100 \text{ cm}}{(s)^2} = 10^5 \frac{\text{gr} \times \text{cm}}{(s)^2} \equiv 10^5 \text{ dinas} \quad \text{CGS.} \quad (\text{IV.4})$$

Es interesante notar que, a pesar de que Newton fue un ciudadano Británico, el concepto de fuerza, que constituyó sin duda, una gran contribución a la ciencia, se midió hasta hace poco en Gran Bretaña, en otras unidades denominadas Libras. Hoy este desorden en las unidades está llegando a su fin debido a la necesidad de los países de uniformar sus unidades de medida. El newton como unidad de fuerza es universal.

IV.2. APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON: ESTÁTICA

Los problemas de dinámica, por complejos que sean, son al fin de cuentas, una superposición de problemas simples. A continuación resolveremos una serie de problemas cortos para ilustrar su uso.

Siempre que aparezca un problema de dinámica en el cual sea necesario calcular una fuerza, como la tensión que soporta una cuerda o la fuerza que soporta un piso...etc, debemos estudiar el cuerpo por partes, descomponerlo para aislar la fuerza que se nos pide. El proceso de aislar una parte de un objeto del resto es lo que llamamos un diagrama de cuerpo libre.

IV.2.1. Diagrama de cuerpo libre

Analizar las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo es equivalente a aislarlo del resto de los objetos que interactúan con él. Cada objeto que interactúa con este cuerpo es borrado y reemplazado por una fuerza de acuerdo con la tercera ley de Newton. El resultado de esta operación es un cuerpo aislado (libre) sobre el cual actúan diversas fuerzas. Es lo que se denomina un DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE del objeto.

Ejemplo

Analizar las fuerzas que actúan sobre un bloque que permanece en reposo sobre el piso.

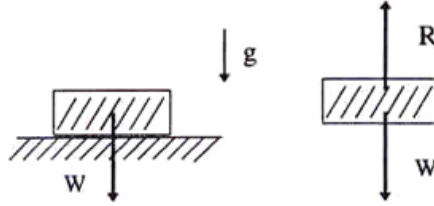


Figura IV.2:

Comenzaremos definiendo una de las fuerzas que debemos incluir en la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, cuando estudiemos el movimiento de un objeto situado sobre la Tierra. Esta fuerza es el *peso*:

A cada objeto, le asignamos una fuerza, que definimos como: $\vec{W} = M \cdot \vec{g}$, y que apunta hacia el centro de la Tierra. Posteriormente analizaremos su origen, por ahora la aceptamos como una propiedad de cada objeto. Esta fuerza es, por definición:

$$\vec{W} = -Mg\hat{j}, \quad W \equiv \text{peso del objeto.}$$

Como el bloque se apoya sobre el piso, al retirar el piso para hacer el diagrama de cuerpo libre, lo debemos reemplazar por una fuerza, que llamamos la *reacción* del piso $\vec{R}$. Estas, $\vec{R}$ y $\vec{W}$ son todas las fuerzas que actúan sobre el bloque.

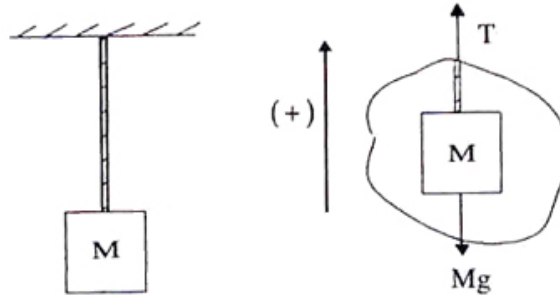


Figura IV.3:

Como además nos dicen que el bloque permanece en reposo en la dirección vertical entonces $v_y = 0$, en todo instante y por lo tanto $a_y = 0$, y, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la suma de todas las fuerzas externas en esa dirección debe anularse. De esta forma la fuerza que ejerce el piso *sobre* el bloque debe ser *igual en magnitud y de sentido*

opuesto al peso del bloque. Tomando como vector unitario $\hat{j}$ en la dirección vertical y , sumamos todos los vectores en dicha dirección y obtenemos:

$$(+R - W)\hat{j} = M(\vec{a} \cdot \hat{j}) \equiv Ma_y = 0 \Rightarrow R = W.$$

En la dirección x , no existen ni fuerzas ni aceleraciones.

Nota

• R representa el módulo del vector $\vec{R}$, y análogamente, W es el módulo del vector $\vec{W}$, son por lo tanto **positivos**. Si al resolver las ecuaciones uno de ellos resulta ser negativo, nos indica que el sentido asignado inicialmente a dicho vector, no corresponde con el sentido que tiene dicha fuerza.

Las ecuaciones, si son aplicadas consistentemente, proporcionan el sentido correcto de los vectores.

• En la segunda ley $\vec{F} = m\vec{a}$, la fuerza $\vec{F}$ denota la suma de **todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo**. Así, en rigor debemos escribir la segunda ley como:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Si el cuerpo no sufre ninguna aceleración, ($\vec{a} = 0$) y $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$. Esta ecuación define la *estática* de objetos puntuales.

Ejemplo

Un objeto de masa M cuelga desde el techo mediante una cuerda, que suponemos sin masa. (Es decir la masa de la cuerda es despreciable al compararla con la masa del bloque). Encontrar la tensión en la cuerda.

Para calcular la tensión, cortamos la cuerda y hacemos el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte inferior del dibujo.

Como este elemento permanece en reposo absoluto, la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre él, debe ser cero. Además, como lo hemos aislado del resto del medio (de la parte superior de la cuerda, de la atracción de la tierra) debemos reemplazar cada uno de ellos por la interacción (**fuerza**) con que actuaba sobre nuestro sistema. Las denominamos T y $W = Mg$.

Haciendo una elección juiciosa de las coordenadas (ver Figura) tenemos:

$$+T - Mg = Ma = 0 \quad \Rightarrow \quad T = Mg.$$

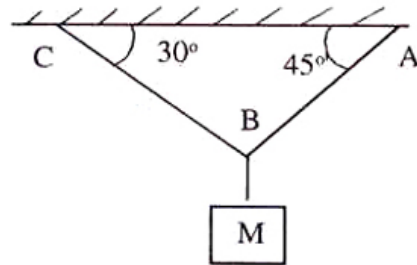


Figura IV.4:

Ejercicio

Calcular la tensión sobre cada una de las cuerdas AB y BC de la Figura.

Nota

Este es un problema en que están envueltas dos dimensiones espaciales. Opere en forma similar al ejemplo anterior, pero recuerde que la segunda ley de Newton es vectorial y por lo tanto debe usarla separadamente en cada una de las dos direcciones. En este caso Ud. no conoce la magnitud de ninguna de las dos reacciones en la cuerda, pero sí conoce su dirección y sentido; su dirección es la misma que adoptan las cuerdas y el sentido de la fuerza debe ser tal que mantenga la cuerda estirada (tensa).

Respuesta: $T_C = T_A \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad T_A = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{3}} M g$

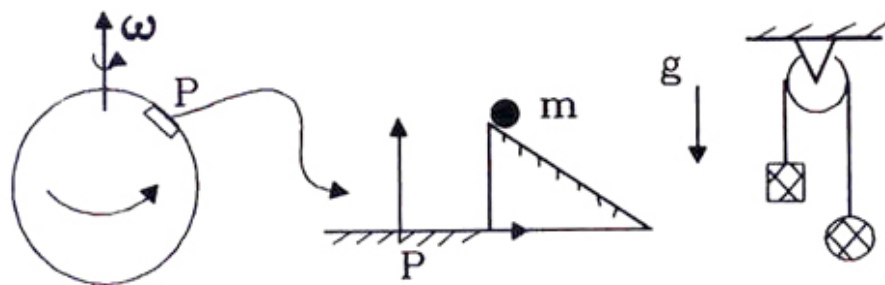


Figura IV.5:

IV.3. SISTEMAS INERCIALES

Existe otra condición adicional para que las Leyes de Newton sean aplicables en la forma enunciada. El sistema de referencia usado debe permanecer en reposo absoluto o con una velocidad constante con respecto a otro sistema que permanece en reposo absoluto.

Ilustremos esta afirmación con un ejemplo.

Si se deja caer una pedazo de plasticina en el interior del Metro cuando está detenido, la plasticina cae verticalmente hacia el suelo. Ahora si lo hacemos cuando el Metro está acelerando (en el momento de partir, por ejemplo) podemos verificar que la plasticina *no* cae en el mismo punto que en el caso anterior, verticalmente bajo el punto de lanzamiento, sino que se desvía con respecto al observador. En los dos casos el objeto fue lanzado bajo las mismas condiciones, y una vez en el aire está sujeto a la misma fuerza, la atracción gravitacional (despreciamos la resistencia del aire). Sin embargo, la diferencia está que *en el segundo caso, el Metro no constituye un sistema de referencia inercial, por estar acelerado*, y por lo tanto no podemos aplicar las Leyes de Newton en la forma usual; aparecen fuerzas no inerciales, que deben ser incluidas para poder predecir correctamente las trayectorias observadas.

Resumiendo: Las Leyes de Newton son válidas cuando están referidas a un *Sistema Inercial*, es decir, uno que permanece en reposo absoluto o que se desplaza con una velocidad constante con respecto a otro que está en reposo absoluto.

No existe en la naturaleza un sistema inercial.

Mas claro aún, las ecuaciones de Newton son válidas en un sistema de referencia que **no** existe en la naturaleza.

La pregunta obvia en este punto es con qué objeto enunciamos las leyes de Newton si no existe el sistema de referencia donde podamos aplicarlas.

Esta dificultad se resuelve de la siguiente forma:

En todos los ejemplos que estudiemos, existe un sistema de referencia en el cual los efectos introducidos por el origen no-inercial del sistema de referencia son tan pequeños, que en condiciones normales, no somos capaces de distinguirlos.

Ejemplo

El sistema de referencia más usado es la superficie de la Tierra. Este no es inercial puesto que está girando con respecto a un eje. Sabemos que al girar existe un aceleración y por lo tanto deben aparecer efectos de las fuerzas no inerciales en este sistema.

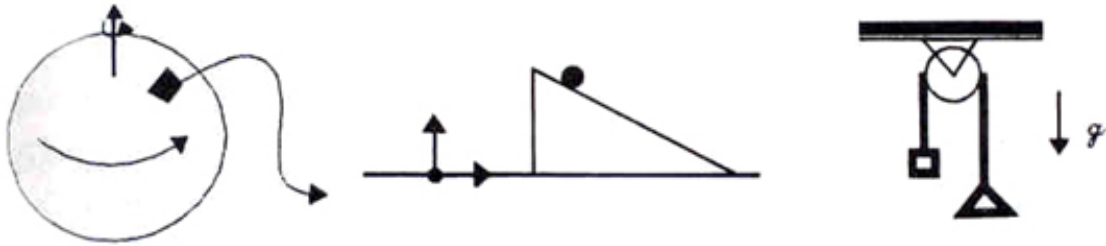


Figura IV.6: Normalmente ignoramos los efectos de la rotación de la Tierra. Su efecto en sistemas como planos inclinados, péndulos, etc. es muy pequeño, y si no contamos con instrumentos muy precisos, escapan a nuestra detección. Esto no significa que estén ausentes.

Si estudiamos el movimiento de partículas en un plano inclinado o el movimiento de un par de masas unidas mediante una cuerda que cruza una polea y en todas ellas la superficie de la Tierra es un buen sistema de referencia. Los efectos de la rotación son despreciables.

Con esto queda claro que *la física es una ciencia de aproximaciones*. El sistema de referencia inercial no existe, pero podemos encontrar uno que se adapte al grado de precisión de nuestras mediciones. En caso que sea necesario incluir la rotación de la Tierra en algún ejemplo, ubicamos nuestro sistema de referencia que no gira en el centro de la Tierra. En este ejemplo estamos despreciando el movimiento de rotación de la Tierra en torno al Sol. Pero este inconveniente puede resolverse ubicándonos en el centro del sistema solar...y así sucesivamente.

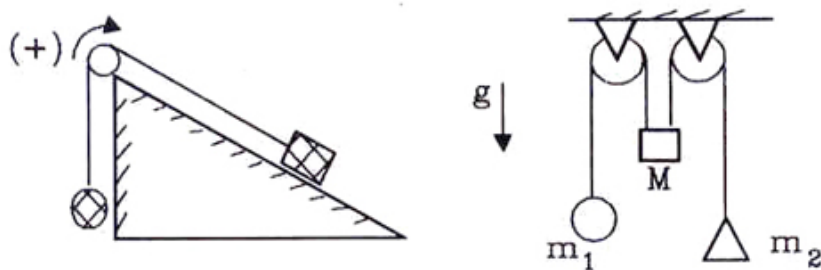


Figura IV.7: Los sistemas de la Figura sirven para aprender a usar las Leyes de Newton y comprobar la exactitud de sus predicciones con lo observado. En ellos las correcciones debidas a la rotación de la Tierra son despreciables, es decir, se confunden con los errores experimentales.

Existen algunos fenómenos, observables en la vida diaria, que se originan debido a la naturaleza no-inercial de la Tierra debido a su rotación. Nos limitaremos únicamente a describir algunos.

- Uno de ellos es el remolino que se forma en el lavamanos. Si observamos lo que sucede en cualquier punto del Hemisferio Sur, Santiago entre ellos, notaremos que el agua al escurrirse del lavamanos **gira** en dirección contraria a los punteros del reloj. Este remolino que forma el agua se debe exclusivamente a la rotación de la Tierra. Es más, en el Hemisferio Norte se puede observar el mismo fenómeno, pero ahora la rotación del agua se produce a favor de los punteros del reloj.

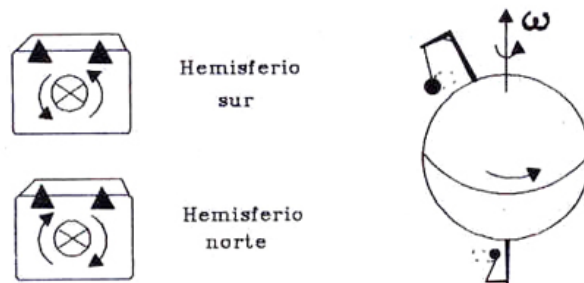


Figura IV.8:

- Si hacemos oscilar un péndulo justo en el Polo Sur —o mejor, justo en el eje de rotación de la Tierra—, no es difícil imaginar que al cabo de 24 horas, nuestro observador habrá dado una vuelta completa en torno a su eje. La *dirección de oscilación del péndulo* habrá permanecido, durante todo este tiempo, fija con respecto a las estrellas. La explicación para la rotación de este péndulo que gira sin razón aparente según el observador, se debe a que el péndulo, al estar sostenido por un hilo, no está obligado a seguir a la rotación de la Tierra, y por tanto oscila conforme a las leyes de Newton pero referidas a un sistema de referencia fijo al centro de la Tierra, con respecto a las estrellas— y que, obviamente, no gira con la Tierra.

Algo similar sucede con un péndulo que oscila en Santiago (o cualquier otro lugar). El péndulo oscila y a la vez comienza a rotar, más lentamente esta vez, con respecto a su eje.

Este es el péndulo de Foucault que se exhibe en algunos Museos de Ciencia y Tecnología.

- Todos sabemos que es muy peligroso caminar sobre un disco que está girando. Es muy difícil saber qué debemos hacer para equilibrarnos. Sin embargo la Tierra está girando y nosotros no perdemos el equilibrio. La explicación radica en la pequeña magnitud

que tiene la velocidad angular de la Tierra. Consecuentemente, sus efectos son difíciles de captar.

- Otros fenómenos similares ocurren con las corrientes oceánicas, las direcciones de los vientos en las vecindades de la zona tropical, el movimiento de los glaciares que se desvían con respecto a las corrientes oceánicas que los ponen en movimiento ...etc.

Todos estos fenómenos se originan cada vez que existe un movimiento sobre un sistema de referencia que está en rotación. La aceleración que se genera se denomina la aceleración de Coriolis y tiene la expresión siguiente:

$$|\vec{a}_{\text{coriolis}}| = 2 v_{\text{relativa}} \cdot \omega_{\text{Tierra}}.$$

En consecuencia, cuando dejamos caer un objeto sobre la Tierra éste no cae verticalmente, sino que desvía su trayectoria debido a la aceleración de Coriolis. Afortunadamente este efecto es muy pequeño. Podemos **estimar** el valor máximo de la aceleración de Coriolis para un objeto que se deja caer desde una altura de 10 metros.

Sabemos que la desviación es pequeña, así que podemos considerar la velocidad relativa a la Tierra como la velocidad de caída libre. Esta es de aproximadamente 14 m/seg (cuando llega al suelo), si es lanzada desde una altura de 10 metros. Por otra parte, la velocidad angular de la Tierra es aproximadamente $0,7 \times 10^{-4}$ rad/seg, de esta forma el valor máximo de la aceleración de Coriolis es aproximadamente de 10^{-3} m/seg². Si comparamos este número con el valor de la aceleración de gravedad, 10 m/s², se percata que existen 4 órdenes de magnitud de diferencia entre ellas y que se necesita bastante más precisión que la habitual para detectar este efecto.

Ejercicio

Obtenga el valor de la velocidad angular de la Tierra establecido aquí.

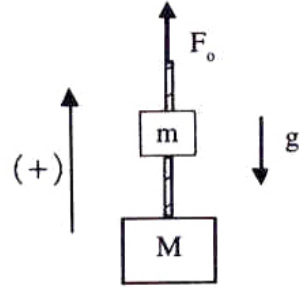
IV.4. EJEMPLOS DE DINAMICA

Proseguimos resolviendo ejemplos con aplicaciones de las leyes de dinámica. En todos consideramos la Tierra como un sistema inercial.

Ejemplo

Dos bloques m y M , están atados por una cuerda. El bloque superior m está sostenido verticalmente por otra cuerda a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}_0$. Los bloques están sometidos a la atracción gravitacional de la Tierra.

- a) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para mantener ambos bloques en reposo? (Suponga ambas cuerdas sin masa).
- b) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza $\vec{F}_0$ para comunicar a ambas masas una aceleración $\vec{a}_0$?
- c) Suponga ahora que la cuerda que une ambas masas tiene, a su vez, una masa μ . ¿Cuál es la tensión de la cuerda que las une?



a) Definimos como positivo el sentido opuesto a la aceleración de gravedad $\vec{g}$. Si consideramos como nuestro sistema el conjunto de las dos masas, entonces en el diagrama de cuerpo libre, la suma de las fuerzas externas es F_0 y el peso de cada una de las masas:

$$\sum F_{ext} = F_0 - (M + m)g,$$

Incluyendo el término de la aceleración en la ecuación anterior, tenemos:

$$F_0 - (M + m)g = (M + m) \cdot a_0,$$

donde hemos supuesto que las masas son *aditivas*: si existen varias masas, la masa total es la *suma* de ellas.

No existe ninguna razón, para que esta suposición sea válida, pero los resultados que genera se ajustan a lo que se observa.

Si exigimos que $a_0 = 0 = v_0$, vale decir, que el sistema se encuentre en reposo, entonces:

$$F_0 = (M + m)g.$$

- b) Si $a_0 \neq 0$, entonces $F_0 = (M + m)(g + a_0)$.

Ahora podemos dar a a_0 diferentes valores: si $a_0 < 0$, indica que la aceleración está apuntando en el mismo sentido que g , ahora si su módulo es igual a g , entonces $a_0 = -g$ y $F_0 = 0$. Este caso indica que el objeto está en caída libre y, obviamente, no se necesita aplicar ninguna fuerza sobre el cuerpo para lograr este resultado.

c) Calculemos la tensión en la cuerda que une las masas. En este caso tomemos como nuestro sistema, la masa M .

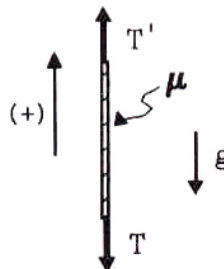
$F_{ext} \equiv T - Mg = Ma_0$ (Recordemos que T indica el módulo de la tensión $\vec{T}$ donde ya hemos incluido el signo correspondiente, lo mismo es válido para el peso de la masa M). Ordenando tenemos $T = M(a_0 + g)$.

El diagrama de cuerpo libre de la cuerda aparece en la Figura. Las fuerzas que actúan sobre ella son:

$$F_{ext} \equiv T' - T - \mu g = \mu a_0,$$

donde a_0 es la aceleración dada. Despejando, $T' = T + \mu(a_0 + g)$. Reemplazando el valor de T indicado más arriba obtenemos:

$$T' = (M + \mu)(a_0 + g)$$



Vemos nuevamente que si $a_0 = -g$ (caída libre), la tensión T' sobre el extremo superior de la cuerda es nula, como era de esperar, puesto que si el cuerpo está en caída libre, nadie sostiene la masa m .

Si $\mu = 0$, entonces $T' = T$: el módulo de la tensión en ambos extremos de la cuerda es la misma.

De la ecuación obtenida para T' , se desprende que si $M \gg \mu$, podemos desprestigiar el efecto de la masa de la cuerda μ en la dinámica del sistema.

Si la masa de la cuerda es despreciable comparada con el resto de las masas que intervienen en el sistema en estudio, podemos suponer que la tensión es la misma en ambos extremos de la cuerda $T' = T$. Esta es una aproximación usada frecuentemente.

Podemos volver a este mismo ejercicio y analizarlo desde un punto de vista diferente. Al considerar como nuestro sistema las dos masas (unidas por una cuerda ideal, sin masa) entonces las fuerzas *externas* que actuaban sobre el sistema eran $\vec{F}_{ext} = +\vec{F}_0 - m\vec{g} - M\vec{g}$.

Ahora, si tomamos como nuestro sistema la masa M , entonces el diagrama de cuerpo libre nos muestra las fuerzas externas del sistema: $\vec{F}_{ext} = \vec{T} - M\vec{g}$. La pregunta que surge es: ¿por qué se dejó fuera la fuerza $\vec{T}$ (tensión en la cuerda) cuando se consideró cómo nuestro sistema el conjunto de las dos masas?

La respuesta es la siguiente: como consecuencia de la tercera ley de Newton *todas las fuerzas internas del sistema escogido se anulan mutuamente*, sólo sobreviven las fuerzas *externas* al sistema.

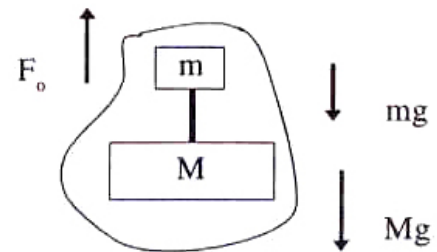
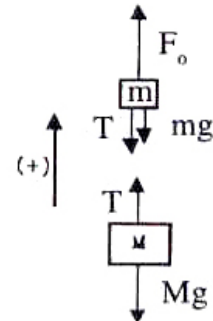
En el diagrama de Fuerzas que se acompaña intentamos explicar gráficamente este resultado. Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de cada una de las masas m y M separadamente (no incluimos la masa de la cuerda) y sumamos todas las fuerzas que actúan sobre ambas masas. Por el principio de acción y reacción las tensiones T se anulan entre ellas y sólo sobreviven las fuerzas externas al sistema.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sistema m.} \\ F_{ext.}^m = F_0 - mg - T, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sistema M.} \\ F_{ext.}^M = T - Mg, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sistema } \{m + M\} \\ F_{ext.}^{m+M} = F_{ext.}^m + F_{ext.}^M \\ F_{ext.}^{m+M} = F_0 - mg - Mg \end{array} \right\}$$

□

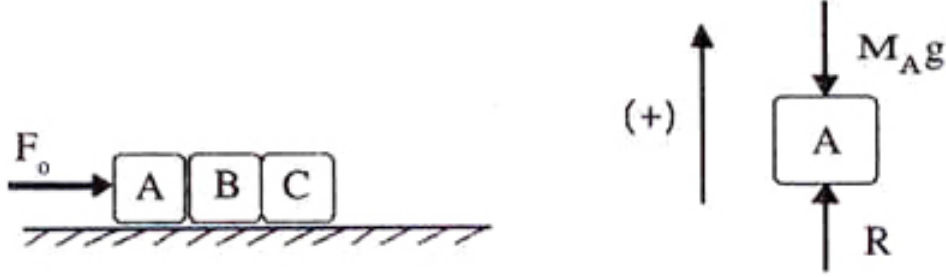


Ejemplo

Tres bloques idénticos de masa M son empujados por una fuerza horizontal F_0 sobre una mesa sin fricción.

- ¿Cuál es la fuerza *neta* vertical sobre el bloque A?
 - ¿Cuál es la fuerza *neta* horizontal sobre el bloque A?
 - ¿Cuál es la aceleración del bloque C?
 - ¿Cuál es la fuerza que ejerce el bloque B sobre el bloque A?
- Fuerza vertical *neta* sobre A.

Como siempre, debemos comenzar con el diagrama de cuerpo libre de A. Reemplazo el piso por una fuerza que llamamos $\vec{R}$ (Reacción del piso). Debemos incluir el peso de la masa A. Como el bloque A se desliza sobre la mesa sin saltos, tenemos que la *velocidad* de A en la dirección *vertical* es nula. Como su velocidad vertical no cambia, su aceleración en esa dirección es nula.



Usando la segunda Ley de Newton obtenemos:

$$F_y = R - M_A g = 0 \Rightarrow R = M_A g.$$

La reacción del piso es igual al peso del cuerpo.

b) Para calcular la fuerza horizontal que actúa sobre A debemos aislarlo: sacar el bloque B. Para que las leyes de Newton se enteren de la existencia de B, debemos incluir una fuerza que lo reemplace: $\vec{F}_{BA}$ (acción de B sobre A, una fuerza de contacto). Como no existe fricción, los 3 bloques se desplazan hacia la derecha con una cierta aceleración a_0 (que *no* conocemos por el momento).

A partir de la segunda ley de Newton obtenemos:

$$\underbrace{F_0 - F_{BA}}_{\text{Fuerza neta sobre el bloque A}} = M_A \cdot a_0$$

c) Aceleración del bloque C.

Como todos los bloques viajan juntos, la aceleración de C es la misma que la aceleración del conjunto. El sistema elegido para hacer el diagrama de cuerpo libre en este caso es el conjunto de los tres cuerpos, de modo que:

$F_{ext} = F_0$ (sólo consideramos la dirección x).

$$F_0 = [M_A + M_B + M_C] \cdot a_0.$$

Si todas las masas resultan ser iguales, tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{3} \left[\frac{F_0}{M} \right].$$

d) Ahora estamos en condiciones de calcular el valor de F_{BA} . Usando el resultado de la parte b) tenemos:

$$F_0 - F_{BA} = M a_0 = M \left[\frac{1}{3} \frac{F_0}{M} \right],$$

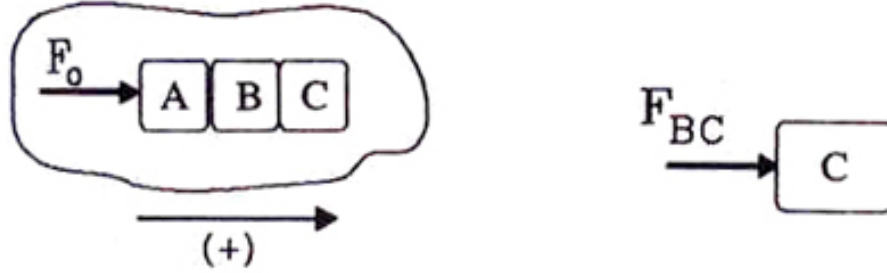


Figura IV.9:

despejando F_{BA} :

$$F_{BA} = \frac{2}{3} F_0,$$

y análogamente, la reacción de A sobre B es $F_{AB} = -F_{BA}$ de acuerdo al principio de acción y reacción, de modo que $F_{AB} = -\frac{2}{3} F_0$.

Para calcular la reacción de B sobre A, debemos hacer el diagrama de cuerpo libre de B y escribir la ecuación de fuerzas correspondiente:

$$F_{AB} - F_{CB} = M a_0,$$

como ya conocemos F_{AB} y a_0 , obtenemos F_{CB} y entonces la fuerza del bloque B sobre C es:

$$F_{BC} = \frac{1}{3} F_0.$$

Es interesante notar que la intensidad de la fuerza neta, horizontal, que actúa sobre cada una de las masas es la misma. Por ejemplo, la fuerza sobre C es $\frac{1}{3} F_0$, sobre B es $-\frac{1}{3} F_0 + \frac{2}{3} F_0 = \frac{1}{3} F_0$, y sobre A es $F_0 - F_{BA} = F_0 - \frac{2}{3} F_0 = \frac{1}{3} F_0$.

Este resultado es natural, puesto que si todas las masas son iguales y tienen la misma aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza neta actuando sobre cada una de ellas debe ser la misma.

También es posible ver que la masa A está más comprimida que el resto: como es fácil de intuir.

Ejemplo

La figura representa una polea ideal (sin roce) sobre la que cuelgan dos masas M_1 y M_2 , unidas por una cuerda sin masa e inextensible.

Encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema bajo la acción de la fuerza de gravedad.

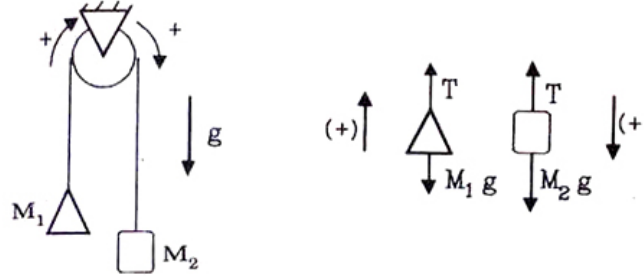


Figura IV.10:

De acuerdo a las suposiciones establecidas en el enunciado, la polea no gira y la cuerda se desliza sobre ella sin arrastrarla debido a la ausencia de roce.

Es claro que el sistema va a girar, salvo que las masas sean iguales. Una forma conveniente de resolver este caso es asignando, desde un comienzo, un valor positivo a una determinada rotación del sistema. Cuando se resuelve este problema a través de las ecuaciones de Newton, esta forma de asignar las coordenadas resulta simple y directa.

El diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas se indica en la Figura. *Note que mantenemos el sentido positivo a lo largo de la cuerda.*

Al cortar la cuerda la reemplazamos por una tensión que se transmite con igual magnitud al otro extremo puesto que la cuerda no tiene masa. La polea sólo cambia el sentido de la tensión. Las ecuaciones son:

$$T - M_1 g = M_1 a,$$

$$-T + M_2 g = M_2 a.$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas T y a , por lo tanto podemos resolver el problema. Al sumar ambas ecuaciones la tensión T desaparece y obtenemos la aceleración a . Reemplazando el valor de la aceleración en cualquiera de las ecuaciones obtenemos T .

$$a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} \cdot g, \quad T = \frac{2 M_2 M_1}{M_1 + M_2} \cdot g. \quad (\text{IV.5})$$

Vemos que si $M_2 = M_1$, la aceleración es nula como debe ser. Si $M_2 = 0$, la aceleración de M_1 es $-g$, de acuerdo a la convención de signos usada, y la tensión de la cuerda es nula, como era predecible.

Otro caso límite interesante es $M_2 \rightarrow \infty$. Demuestre que bajo estas condiciones la aceleración del sistema es g y la tensión alcanza el valor $T = 2 M_1 g$. Dé una razón física para justificar estos resultados.

Ejemplo

La masa M_3 en el sistema que se indica en la Figura [IV.11] representa la masa del tramo de la cuerda que se extiende entre las dos poleas ideales. Si despreciamos los trozos de cuerda que cuelgan de ambos lados, entonces podemos pensar en este problema como un intento de estudiar el efecto de la masa de la cuerda en el movimiento del sistema.

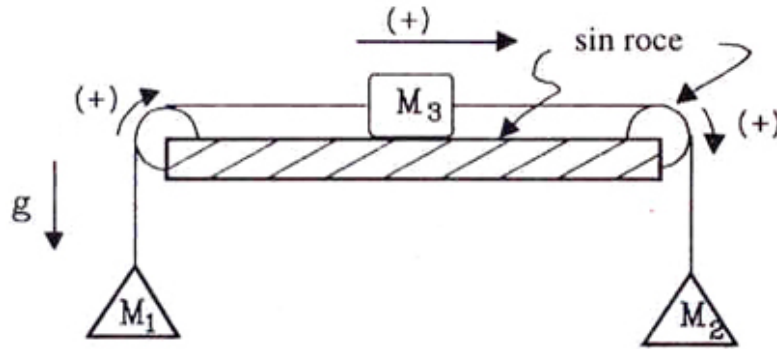


Figura IV.11: Este problema incorpora la masa de la cuerda –a través de M_3 – a la dinámica de las masas del ejemplo anterior. Hemos reemplazado la cuerda por una masa puntual para evitar el análisis de la variación de masa debido al movimiento de la cuerda en los costados.

Las siguientes son cantidades conocidas que intervienen en el problema: M_1 , M_2 , M_3 y g . A partir de estos datos y de la información de la Figura se pide encontrar:

- ¿Cuál es la fuerza neta sobre M_1 y M_2 ? Dé sus respuestas en función de M_1 , M_2 , g , T_1 y T_2 .
- Si se mantiene fija la masa M_3 mediante una fuerza horizontal externa, por ejemplo con la mano, ¿cuál sería, en este caso, el valor de T_1 ?
- Ahora suponga que M_1 se mantiene fijo aplicando una fuerza vertical con la mano, ¿cuál sería el valor de T_1 ?
- ¿Cuál es la aceleración del sistema si se deja mover libremente? Dé sus respuestas en función de las masas M_1 , M_2 , M_3 , y g .

La convención de signos para este ejemplo está indicada en la Figura.

- Del diagrama de cuerpo libre de la masa M_1 se obtiene:

$$T_1 - M_1 g = M_1 a_1.$$

La fuerza neta sobre M_2 es:

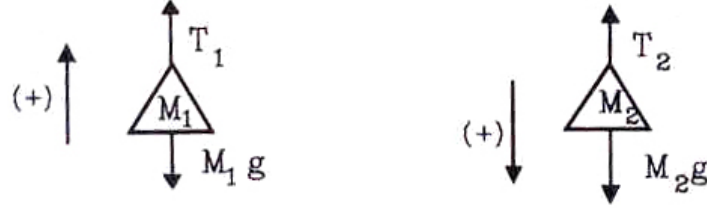


Figura IV.12:

$$-T_2 + M_2 g = M_2 a_2$$

Nota

Tomamos a_1 y a_2 como positivos. Si esto no resulta ser correcto, las ecuaciones nos lo indicarán.

Como la cuerda es inextensible, ambas aceleraciones deben ser iguales $a_1 \equiv a \equiv a_2$.

La fuerza neta sobre la masa M_3 es: $F_{ext}|_y = N_3 - M_3 g = 0$, (no existe aceleración en la dirección del eje y , puesto que el bloque no salta ni tampoco se hunde durante su desplazamiento sobre la mesa).

$$F_{ext}|_x = -T_3 + T_4.$$

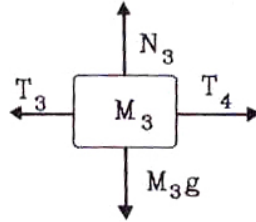


Figura IV.13: Diagrama de cuerpo libre de la masa que representa a la cuerda. Como no existe movimiento en la dirección vertical, la componente de la aceleración en esa dirección es nula.

b) Calculemos los valores de T_3 y T_4 .

Como la masa de la cuerda es nula $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_3|$, (Figura [IV.14]). La polea sólo cambia la dirección de la fuerza y no su *magnitud*. En cada punto de contacto de la cuerda con la polea se ejerce una fuerza (sobre la cuerda) perpendicular a la superficie de la polea.

La suma de todas esas fuerzas da como resultado una fuerza neta R , que es ejercida por la mesa y que cancela exactamente la suma de las dos tensiones T_1 y T_3 .

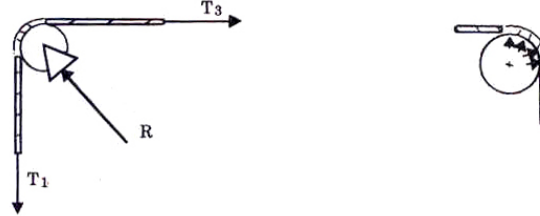


Figura IV.14:

La suma de todas las fuerzas actuando sobre la polea, incluyendo a las tensiones, se debe cancelar exactamente puesto que la polea no rota ni tampoco se acelera.

Los sentidos indicados para T_1 y T_3 son los correctos puesto que una cuerda sólo puede transmitir tensión, como es obvio.

El mismo razonamiento se aplica a la otra polea, de modo que $|\vec{T}_2| = |\vec{T}_4|$.

Reemplazando los valores de las tensiones, tenemos:

$$\text{Fuerza Neta sobre } M_3|_x = T_2 - T_1.$$

Ahora si M_3 se mantiene fija con la mano, la fuerza neta es $M_3 = T_2 - T_1 + F_{\text{mano}} = 0$, y todo el sistema permanece en reposo ($a = 0$). Reemplazando los valores $T_1 = M_1 g$ y $T_2 = M_2 g$ obtenidos en la parte a), tenemos que:

$$\text{Fuerza aplicada por la mano} = (M_1 - M_2)g.$$

c) Si sólo M_1 se mantiene fijo, entonces todo el sistema está en reposo. Resuelvo las ecuaciones de derecha a izquierda. Las ecuaciones de Newton aplicadas a la masa M_2 , dan como resultado: $T_2 = M_2 g$, puesto que M_2 no se mueve.

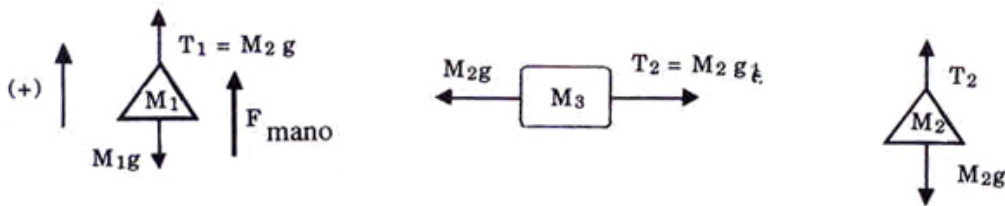


Figura IV.15: Diagrama de fuerzas correspondientes al caso c) para cada una de las masas.

Como M_3 permanece en reposo, entonces:

$$T_1 - T_2 = 0 \implies T_1 = T_2.$$

Las fuerzas actuando sobre M_1 , cumplen la siguiente ecuación:

$$T_1 - M_1 g + F_{mano} = 0, \quad \text{pero} \quad T_2 = M_2 g = T_1,$$

entonces, reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos el valor de la fuerza ejercida por la mano, que es el mismo resultado obtenido en la parte b), como era de esperar:

$$F_{mano} = -(M_2 - M_1)g.$$

Si $M_2 > M_1 \Rightarrow F_{mano} < 0 \Rightarrow$ Debo tirar la masa M_1 hacia abajo para mantenerla en posición.

d) Veamos ahora los valores que se obtienen si el sistema se mueve libremente. Suponemos que el sistema se desplaza hacia la *derecha* con aceleración a .

$$T_1 - M_1 g = M_1 a.$$

En este caso registramos sólo las ecuaciones en la dirección horizontal, puesto que en la dirección vertical no existe movimiento para M_3 :



Figura IV.16: Diagrama de cuerpo libre para el caso d). Si $M_2 > M_1$, entonces $a > 0$, y el sistema se acelera en el sentido indicado en la Figura. Si $M_2 < M_1$, $a < 0$ y el sistema se mueve en el sentido opuesto.

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= M_3 a, \\ -T_2 + M_2 g &= +M_2 a. \end{aligned}$$

Sumando las 3 ecuaciones obtenemos:

$$-M_1 g + M_2 g = (M_1 + M_2 + M_3) a \implies a = \frac{(M_2 - M_1) g}{M_1 + M_2 + M_3},$$

De la segunda ecuación, se llega a:

$$T_2 - T_1 = \frac{M_3(M_2 - M_1)g}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Si $M_3 = 0$, entonces $T_2 = T_1 \equiv T$.

Análogamente, si $M_2 = M_1$ entonces $T_1 = T_2$ y además $a = 0$. El sistema permanece en reposo si lo estaba inicialmente. $\square$

Cabe notar que las reacciones denominadas por R que aparecen debido al cambio de dirección que sufre la tensión en las poleas, generan una fuerza neta sobre la mesa.

Ejemplo

¿Cuál es el valor de $\vec{F}_0$ para que M_1 (y por lo tanto M_2) permanezca en reposo con respecto a M ? No existe roce en ninguna superficie. La cuerda es inextensible y no tiene masa.

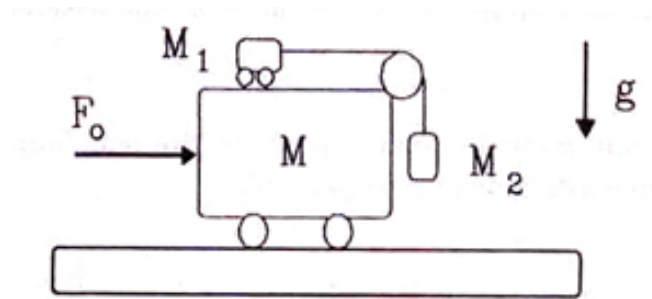


Figura IV.17: En este problema debemos encontrar el valor de la fuerza que le comunica al sistema una aceleración igual a la que experimenta la masa M_1 que va montada sobre el carro. La aceleración de ésta última se debe al peso de M_2 .

Como M_1 sostiene a M_2 , debe sufrir una aceleración generada a través de la tensión de la cuerda que los une. Para que M_1 permanezca en *reposo con respecto a M* el valor de su aceleración debe ser igual al que adquiere M debido a las fuerzas que actúan sobre ella. Estas fuerzas son: la reacción horizontal de M_2 sobre M , la *reacción R que se ejerce sobre la polea y que proviene de la tensión de la cuerda* y la fuerza externa $\vec{F}_0$.

No podemos ubicarnos en un sistema de referencia que se mueva con M puesto que *no* es un sistema inercial. (En realidad es posible, pero debemos incluir fuerzas no inerciales y no estamos preparados para hacerlo).

A continuación aplicamos las leyes de Newton para resolver el problema.

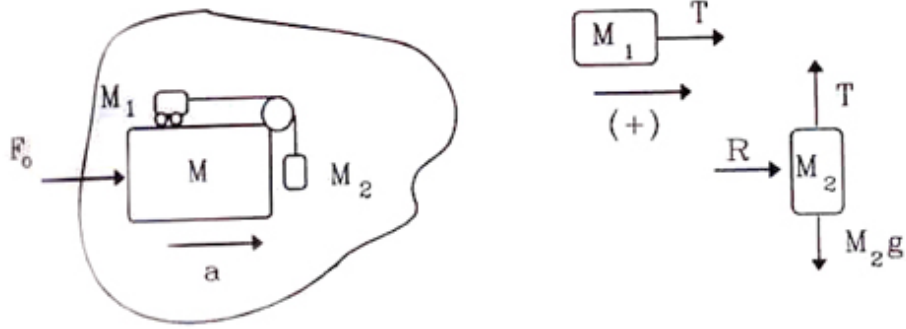


Figura IV.18: Se incluye a la izquierda el diagrama de cuerpo libre de *el sistema considerado como un todo*. A la derecha aparecen los diagramas de cuerpo libre de las masas M_1 y M_2 .

Supongamos que F_0 tiene el valor correcto y que, por tanto, la masa M_1 no se mueve *con respecto a M*. A partir del diagrama de cuerpo libre de M_1 [IV.18] obtenemos para las fuerzas horizontales:

$$M_1 a = T.$$

donde a es la aceleración que adquiere el sistema. De la misma Figura, las fuerzas *verticales* sobre M_2 dan la siguiente ecuación:

$$-T + M_2 g = 0,$$

puesto que M_2 *no cae*, conserva la misma altura con respecto al piso durante todo el movimiento del sistema.

$$\Rightarrow a = \frac{M_2}{M_1} g,$$

pero, debido a que el sistema se mueve como un todo, entonces:

$$F_0 = (M + M_1 + M_2) \cdot a \quad \Rightarrow$$

$$F_0 = (M + M_1 + M_2) \frac{M_2}{M_1} \cdot g.$$

Este resultado parece razonable puesto que si $M_2 = 0$ entonces la fuerza que es necesario aplicar es nula puesto que M_1 no se moverá por sí sola. Si M_2 es mucho mayor que M_1 , entonces para evitar que M_2 se mueva, la fuerza inercial de M_1 ($M_1 a$) debe ser igual a la fuerza que se ejerce sobre M_2 ($M_2 g$) y como M_1 es pequeña, entonces la aceleración a debe tomar un valor muy alto.

Si M_1 se hace igual a cero, no existe ninguna posibilidad de mantener M_2 en reposo con respecto a M puesto que la tensión T se hace cero y no hay forma de equilibrar el peso de M_2 . $\square$

Ejercicio

Encontrar esta misma solución (Figura [IV.18]), analizando el diagrama de cuerpo libre en cada una de las masas.

Indicación: Recuerde incluir la reacción de la polea sobre M . $\square$

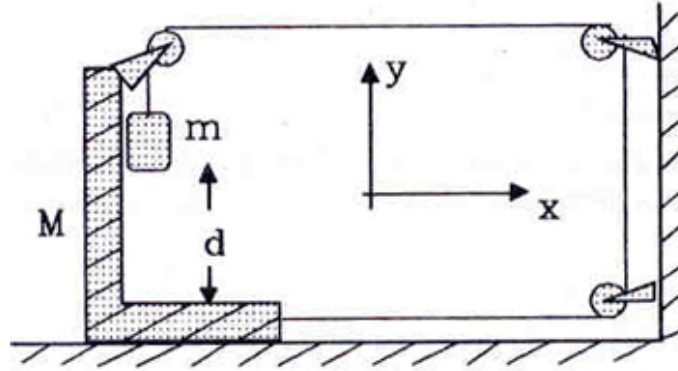


Figura IV.19:

Ejemplo

Las superficies que aparecen en la Figura [IV.19] no generan fuerzas de roce. Si en el instante $t = 0$ se suelta la masa m , calcule cuánto tiempo tarda en chocar con el piso. Los valores para cada una de las variables son: $m = 0,150$ kg, $M = 1,650$ kg, y la distancia $d = 1$ m.

La tensión en el hilo es la misma en el tramo horizontal superior o inferior puesto que el hilo *no* tiene masa y las poleas no ofrecen resistencia al movimiento.

En la parte a) de la Figura [IV.20] se indica el diagrama de cuerpo libre del sistema M y m . Considerando sólo las fuerzas horizontales, deducimos que,

$$T_1 = T_2 \equiv T$$

A continuación obtenemos la ecuación de movimiento para el sistema M y m . Como se mueve en la dirección positiva del eje x , la masa m se desliza cayendo sobre M pero siempre pegada a M , tal como lo indica la Figura. De esta forma $a_x^m = a_x^M \equiv a_x$.

Con el diagrama de cuerpo libre de la parte a) de la Figura, considerando sólo las fuerzas en la dirección x , se obtiene:

$$2T = (M + m) a_x.$$

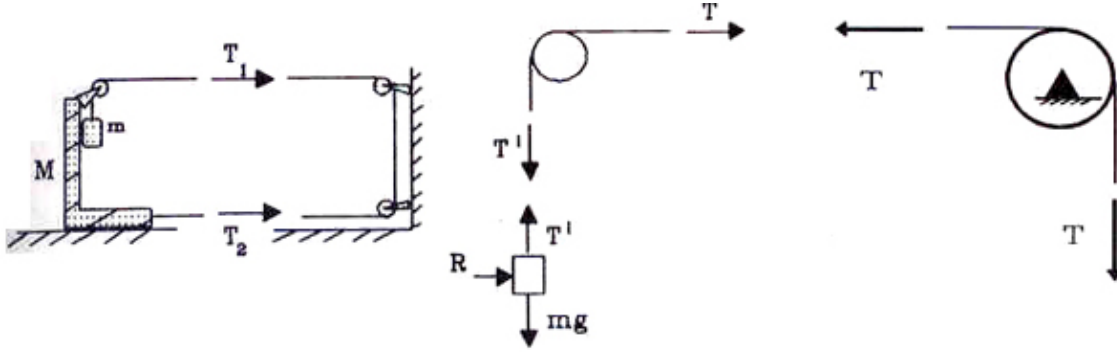


Figura IV.20: Aquí se incluye el sistema original y los diagramas de cuerpo libre de la masa M y m . La Figura muestra que si la masa M avanza, digamos 1 cm hacia la derecha, la distancia que recorre el hilo entre la masa M y la pared se acorta en 2 cm y, en consecuencia, la masa m baja 2 cm.

Tenemos una ecuación y dos incógnitas: a_x y T . Necesitamos más información.

Examinando el movimiento de la masa m en la dirección y , a partir del diagrama de cuerpo libre de la parte b) de la Figura [IV.20], obtenemos:

$$+T' - mg = m a_y. \quad (a_y^m \equiv a_y).$$

La aceleración de m es la única que tiene una componente adicional en la dirección y .

No hemos progresado mucho porque sumamos una ecuación a la anterior pero, aparecieron dos incógnitas: T' y a_y .

De la Figura se desprende que si en un intervalo Δt s, M avanza hacia la derecha Δx , metros, m cae, en el mismo intervalo, *dos veces esa cantidad* $2\Delta x$. Por lo tanto, *en cada instante, la componente vertical de la velocidad de m , es el doble de la componente horizontal de la velocidad de M , si la cuerda permanece en tensión.*

Concluimos que la aceleración de m debe ser el doble de la de M en todo instante. Para confirmar este resultado, basta examinar la definición de la aceleración:

$$a = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}, \quad a' = \frac{2v(t + \Delta t) - 2v(t)}{\Delta t} \implies a' = 2a.$$

En nuestro caso, este resultado se traduce en la siguiente ecuación:

$$a_y = 2a_x.$$

Con este resultado, tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas. Aún nos falta una ecuación.

Relacionaremos T' con T . Por las mismas razones explicadas anteriormente (esencialmente el hecho que la cuerda no tenga masa y que las poleas no tengan roce),

$$T' = T.$$

Con esta ecuación tenemos cuatro incógnitas para cuatro ecuaciones y podemos resolver el problema. Como las ecuaciones no son complicadas no detallamos los pasos intermedios (**Ejercicio**). La respuesta es:

$$a_y = \frac{4mg}{M + 5m}.$$

A partir de esta ecuación podemos obtener el resto sin dificultades.

Para calcular cuánto demora en caer la masa m , se usa la fórmula de cinemática, válida para aceleraciones constantes, indicada a continuación:

$$y = y_o + v_o t + \frac{1}{2} a_y t^2.$$

Introduciendo los datos numéricos en la ecuación, obtenemos $t = 0,9 \text{ s}$. $\square$

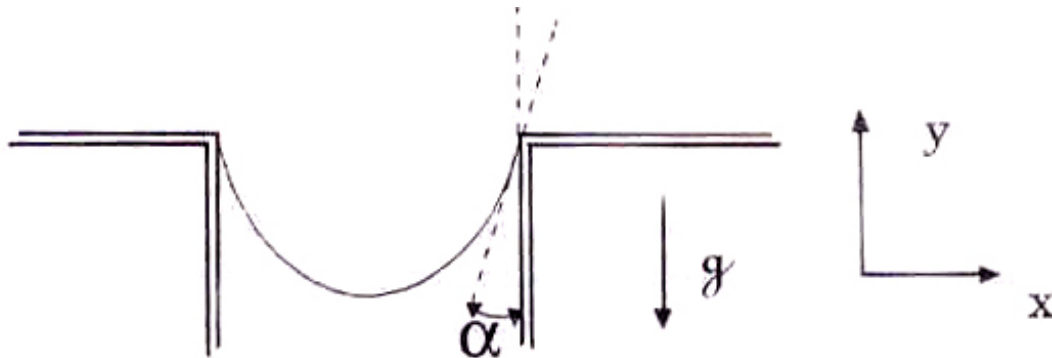


Figura IV.21: La cuerda está sostenida de sus extremos. Como es absolutamente flexible (se puede doblar sin ninguna dificultad), la forma que adopta depende de su longitud y del espacio que separa ambas paredes.

Ejemplo

La Figura [IV.21] muestra una cuerda de largo ℓ y de masa μ por unidad de largo, que cuelga entre dos paredes. La cuerda forma un ángulo α en el punto que toca a las paredes.

a) Encuentre el valor de la fuerza que se debe ejercer sobre cada uno de sus extremos para sostenerla.

b) Encuentre el valor de la tensión de la cuerda en su punto más bajo.

Por la simetría del problema, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debe ser la misma en ambos extremos. Basta pensar que no hay forma de distinguir un extremo del otro.

Debido a su extrema flexibilidad, la cuerda transmite sólo tensiones en la dirección de su tangente en cada punto.

Estos dos puntos serán usados en la resolución de este ejemplo y son, además, de aplicación general.

a) Para encontrar la fuerza sobre los extremos usamos un diagrama de cuerpo libre que incluya a toda la cuerda y reemplazamos las paredes por las fuerzas necesarias para sostenerla.

El peso total de la cuerda es $W = -\mu \ell g$ y apunta en sentido negativo (ver Figura).

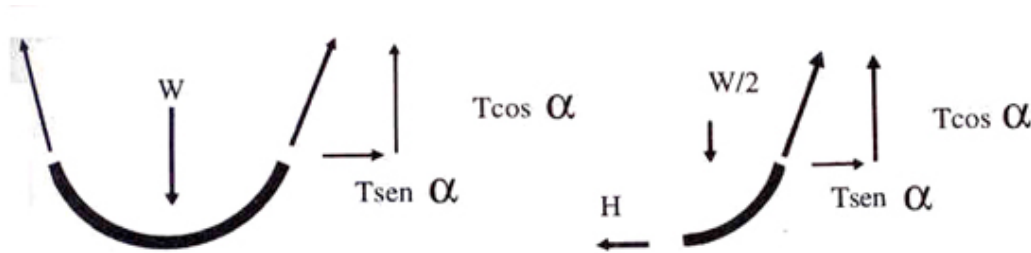


Figura IV.22:

Como la fuerza en el extremo superior se alinea con la dirección de la tangente a la cuerda, tiene una proyección vertical $T_y = T \cos \alpha$ y una componente horizontal $T_x = T \sin \alpha$.

Ya que el sistema permanece en reposo, no tiene velocidad ni aceleración, por lo tanto la suma de las fuerzas externas debe anularse, en cada una de las direcciones:

$$\text{En el eje x:} \quad T \sin \alpha - T \sin \alpha = 0,$$

$$\text{En el eje y:} \quad T \cos \alpha + T \cos \alpha - W = 0.$$

Sólo la última ecuación nos informa acerca del valor de la tensión en el extremo de la cuerda. La primera se cancela automáticamente debido a la simetría del problema.

Obtenemos para T , la siguiente expresión:

$$T = \frac{W}{2 \cos \alpha} = \frac{\mu \ell g}{2 \cos \alpha}.$$

Este resultado es razonable y coincide con lo esperado en casos particulares más simples: si $\alpha = 0$, las dos paredes están casi juntas y existen sólo componentes verticales. Cada extremo soporta la mitad del peso de la cuerda. Si $\alpha = \pi/2$, la fuerza necesaria para sostener la cuerda debido a su peso es infinita, sin importar el valor de su masa total. Este resultado nos señala que por pequeña que sea la fuerza aplicada sobre la cuerda (o, como en este caso, el efecto de su propio peso), para sostenerla, la cuerda debe deformarse.

b) Para calcular la tensión en el *punto más bajo* de la cuerda, debemos usar un diagrama de cuerpo libre que incluya explícitamente esa fuerza.

Tomemos la mitad derecha de la cuerda (ver Figura), y designemos la tensión en el punto más bajo como H (tangente a la cuerda). Ayudándonos de la geometría, podemos deducir que la fuerza en ese punto es horizontal: si no lo fuera uno de sus puntos vecinos estaría más bajo, contradiciendo la hipótesis inicial.

Aplicando nuevamente el equilibrio de fuerzas y recordando que debemos incluir el peso de la mitad de la cuerda: $W/2$, tenemos:

$$\text{En el eje x:} \quad -H + T \sen \alpha = 0, \implies H = T \sen \alpha,$$

$$\text{En el eje y:} \quad T \cos \alpha - W/2 = 0.$$

La segunda ecuación se cumple automáticamente al reemplazar los valores obtenidos anteriormente.

Introduciendo el valor de T en la primera ecuación, obtenemos el resultado buscado:

$$H = \frac{\mu \ell g}{2} \tan \alpha.$$

Al igual que en la parte a), si $\alpha \longrightarrow \pi/2$, o sea, a medida que se intenta formar una línea recta con la cuerda, la tensión tiende a ∞ . Por otra parte, si las paredes se acercan, la tensión en el punto más bajo disminuye tendiendo a cero con $\alpha = 0$. $\square$

Ejemplo

Una niña se desliza por un plano inclinado sobre un carrito, tal como se observa en la Figura [IV.23]. Si el ángulo del plano inclinado con la horizontal es θ , y la niña, que tiene masa M , parte del reposo desde una altura h , calcule:

- Cuánto se demora en llegar al piso.
- Suponga que en el carro va una balanza y la niña se desliza parada sobre ella, ¿cuál es la lectura de la balanza?

a) Para encontrar el tiempo que tarda la niña en llegar al piso, debemos calcular la componente de la fuerza que apunta en la dirección paralela al piso de la cuña, con

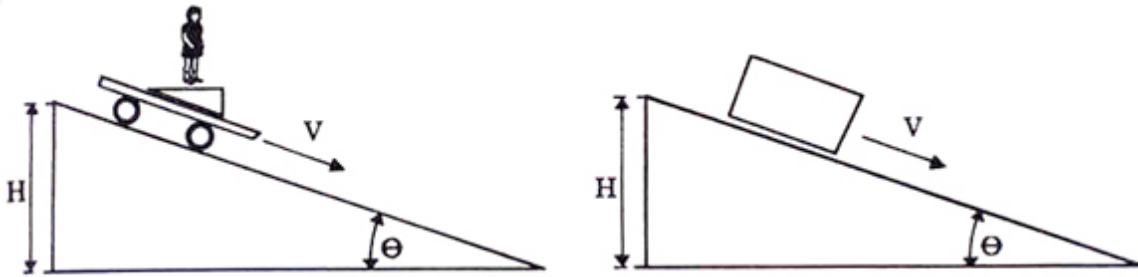


Figura IV.23: La niña se desliza por la pendiente. En la parte a) del problema podemos pensar en un bloque deslizándose. En el punto siguiente, lo imaginamos como dos bloques cayendo juntos y nos preocupamos de la fuerza de reacción del bloque inferior sobre el superior.

el valor de esta fuerza podemos encontrar la aceleración a través de la segunda ley de Newton. A continuación, con las ecuaciones de la cinemática, calculamos el tiempo que tarda en llegar al piso.

El hecho de identificar uno de los cuerpos como una niña es simplemente para relacionarlo con una situación real. Las leyes de Newton consideran a todos los cuerpos como masas puntuales *sin dimensiones espaciales*. Por esta razón, cuando utilizamos la segunda ley de Newton, trasladamos todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a un sólo punto. Más tarde, al incorporar el torque a nuestro análisis, aparecen más ecuaciones –que se suman a las anteriores–, y en ellas debemos especificar el lugar donde actúan las fuerzas.

Para calcular la aceleración del bloque, lo incluyo dentro del diagrama de cuerpo libre. En este caso conviene proyectar las fuerzas sobre un sistema de referencia donde el eje- x se alínea con la dirección del plano inclinado y el eje- y , en la dirección perpendicular a él. Esta elección de ejes coordenados nos facilita los cálculos.

Al sacar la cuña, la reemplazamos por una fuerza de contacto R , que apunta en la dirección del eje- y . Esta reacción no presenta componentes en la dirección x , porque hemos supuesto que el roce entre el bloque y el piso es despreciable. El peso de la niña (o el bloque) debe proyectarse sobre estos ejes coordenados (Figura [IV.24]). El resultado es:

$$\text{En el eje-}y \quad M g \cos \theta - R = 0, \quad a_y = 0,$$

$$\text{En el eje-}x \quad M g \sin \theta = M a_x.$$

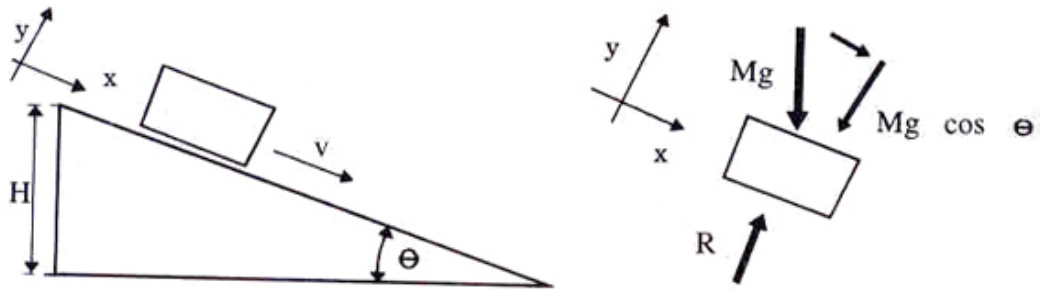


Figura IV.24:

El origen de cada una de estas ecuaciones es el siguiente: en la dirección y de la Figura, el bloque no cambia de velocidad, por lo tanto la componente a_y de la aceleración es nula, y la ecuación se reduce a la suma de las fuerzas externas en esa dirección.

Para los cálculos en la dirección x no debemos olvidar que a_x no es nula y que la única fuerza que tiene proyección en esa dirección es Mg .

De la última ecuación obtenemos la aceleración:

$$a_x = g \operatorname{sen} \theta.$$

(Note que la aceleración es independiente de la masa del cuerpo que resbala. Todos caen con la misma aceleración si no existe roce.)

A partir de esta aceleración podemos encontrar el tiempo que tarda en alcanzar el borde inferior de la cuña:

Como $x = \frac{1}{2} a_x t^2$, y $d = \frac{h}{\operatorname{sen} \theta}$, pero, $d = \frac{1}{2} g \operatorname{sen} \theta T^2$, obtenemos:

$$T = \left[\frac{2h}{g \operatorname{sen}^2 \theta} \right].$$

La expresión a la derecha de T tiene dimensiones de tiempo, como debe ser. Por otra parte, de esta fórmula deducimos que si $\theta = \pi/2$, la aceleración $a_x = g$, conforme a lo que esperábamos, puesto que $\theta = 90^\circ$, corresponde al caso de caída libre.

Ahora si $\theta = 0^\circ$, el tiempo que demora es infinito debido a la ausencia de pendiente en la cuña.

b) Calculamos ahora el peso que marcaría una balanza puesta en la cuña que se ubica inmediatamente debajo de la niña (Figura [IV.23]). Precisemos también a qué cantidad física corresponde la lectura de la balanza: *lo que mide la balanza es la reacción del bloque inferior sobre la niña.*

Por el principio de acción y reacción, esta reacción es la misma fuerza (pero con sentido opuesto) con la cual la niña presiona al bloque inferior, es decir lo que denominamos el peso.

Para calcular esta fuerza tomamos un sistema de referencia con un eje vertical y el otro horizontal. Este cambio de sistema con respecto al punto anterior obedece a que necesitamos calcular una aceleración vertical, por tanto usamos un sistema de referencia en el cual uno de sus ejes coincida con esa dirección.

Escogemos como nuestro objeto de estudio la niña y construimos su diagrama de cuerpo libre (Figura [IV.25]). En este caso nos interesan únicamente las fuerzas verticales, puesto que en esa dirección actúa la reacción del bloque inferior:

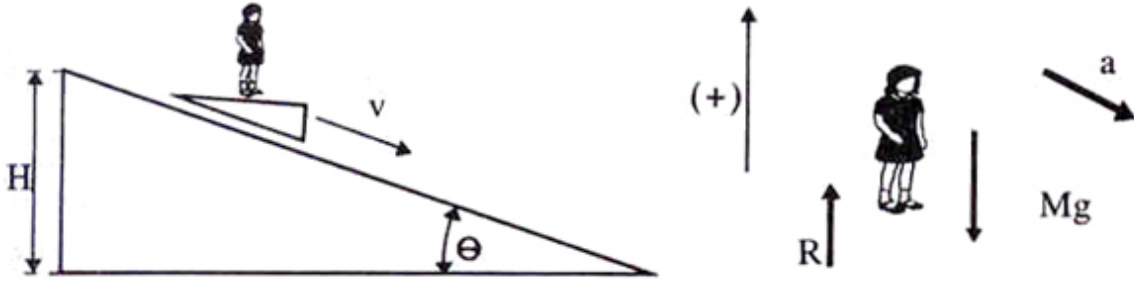


Figura IV.25:

$$R - M g = -M a,$$

la aceleración a que aparece en la ecuación, es la proyección de a_x , en la dirección vertical: la única aceleración distinta de cero obtenida en la pregunta anterior. Su proyección es $a_x \sin \theta$. Reemplazando a por este valor y despejando R , obtenemos:

$$R = M g [1 - \sin^2 \theta] = M g \cos^2 \theta.$$

Si $\theta = 0$, entonces $R = M g$, como era de esperar, puesto que la cuña se transforma en una placa paralela al piso.

Si $\theta = \pi/2$, entonces $R = 0$, debido a que ambos, el bloque y la niña están en caída libre y no hay reacción de uno sobre el otro. $\square$

IV.5. FRICCIÓN

Sabemos muy bien que no existe el movimiento perpetuo. Si observamos un cuerpo deslizando sobre otro, tarde o temprano el cuerpo se detendrá a menos que exista una fuerza externa que lo mantenga.

La fuerza que se opone al movimiento relativo entre los dos cuerpos se denomina *fuerza de roce cinético*. Se origina en la interacción de ambas superficies en contacto.

Un fenómeno similar ocurre cuando intentamos mover un cuerpo que está en *reposo*. Al hacerlo, notamos que a pesar de la fuerza aplicada, el cuerpo no se mueve. La fuerza que impide el desplazamiento se denomina *fuerza de roce estático*.

Se sabe muy poco acerca de estas fuerzas y es muy difícil medirlas porque dependen de las propiedades de la superficie, como: pulido, existencia de óxidos en la superficie, naturaleza de los materiales,... etc. También dependen de la historia de las superficies: si los bloques han sido deslizados previamente o no. Todo esto hace aún más difícil cuantificar su efecto.

Un ejemplo ilustrativo que aparece en la literatura consiste en lo siguiente: un vaso colocado sobre una bandeja de vidrio se tira con una cuerda y al medir la fuerza necesaria para moverlo se puede apreciar que es más o menos constante. Esto da una idea de la fuerza de roce o fricción cinética.

Sin embargo si la superficie se moja, el agua separa las partículas de polvo y la grasa que había sobre la superficie y al arrastrar el vaso se nota que la fuerza necesaria para hacerlo es ahora mayor. Los objetos tienden a pegarse. Al separarlos notamos que pueden existir rayas en el vidrio debido a que el contacto vidrio-vidrio es fuerte y se resiste a su separación.

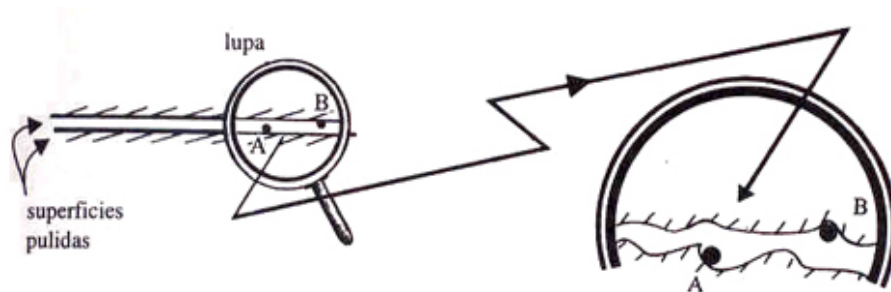


Figura IV.26: Dos superficies, por suaves que parezcan al tacto, tienen irregularidades que pueden ser vistas mediante un microscopio. Las fuerzas de roce tienen su origen en las microsoldaduras o en la resistencia al movimiento generada por estas irregularidades.

Las primeras investigaciones acerca de la fricción fueron realizadas por Leonardo da Vinci, hace 450 años atrás, pero nunca fueron publicadas y sólo se conocieron después que los investigadores franceses: Guillaume Amontons y Charles-Augustin de Coulomb, publicaron sus trabajos. Estos últimos propusieron *cuatro leyes* acerca del comportamiento de la fricción. Hoy sólo tres de ellas sobreviven, y su validez ha sido corroborada por aproximadamente 300 años de investigación en el tema.

Estas tres leyes son:

- La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal que ejerce el cuerpo sobre la superficie.
- La fuerza de fricción no depende del tamaño de las superficies en contacto.
- El coeficiente de fricción depende de las propiedades de las superficies que se deslizan.

La cuarta ley, que es incorrecta, afirmaba que el roce no dependía de la velocidad relativa de las superficies. Al final de este capítulo comentaremos acerca de la dependencia que existe entre la fuerza de roce y la velocidad y su aplicación al caso de las cuerdas de un violín y el origen del ruido que generan los goznes de las puertas.

Podemos afirmar que el *roce estático* se origina por la aparición de reacciones químicas entre las moléculas de ambas superficies que logran ubicarse muy cerca una de otra. Esta ligazón molecular genera microsoldaduras en determinados puntos de las superficies en contacto y es el origen de la fuerza de fricción estática que impide el desplazamiento relativo de dos cuerpos inicialmente en reposo. Al deslizar una sobre otra, se rompen estos vínculos, las moléculas quedan vibrando y disipan parte de su energía como calor, hecho que se puede constatar al tocar las superficies.

Una vez que las superficies comienzan a desplazarse entre ellas, estas aristas microscópicas se enganchan unas con otras y dan origen al *roce cinético*.

Todo este argumento es *cualitativo*. Las prescripciones que siguen a continuación no pueden tener el carácter de una ley fundamental de la naturaleza sino más bien un *resultado empírico*: una conclusión más o menos general que se obtiene después de realizar muchos experimentos.

Supongamos que tenemos un bloque descansando sobre el piso y que intentamos desplazarlo aplicando una fuerza horizontal F que la vamos incrementando lentamente. La fuerza de roce estático la designamos por f .

A continuación describimos la forma como actúa la fuerza de roce cuando intentamos deslizar un bloque sobre un piso.

- a) Cuando F varía desde 0 hasta un cierto valor F' , la fuerza de fricción también aumenta junto con ella, desde 0 hasta F' .
- b) Cuando $F = F'$ el bloque está a punto de comenzar a moverse. El valor de F' es fijo y depende en forma complicada de todos los parámetros mencionados más arriba. Por ahora olvidamos este último comentario y suponemos que tiene un valor conocido y fijo.
- c) Al aumentar levemente el valor de F , es decir al hacer $F > F'$, la fuerza de roce permanece constante $f = F'$, y el bloque comienza a moverse.

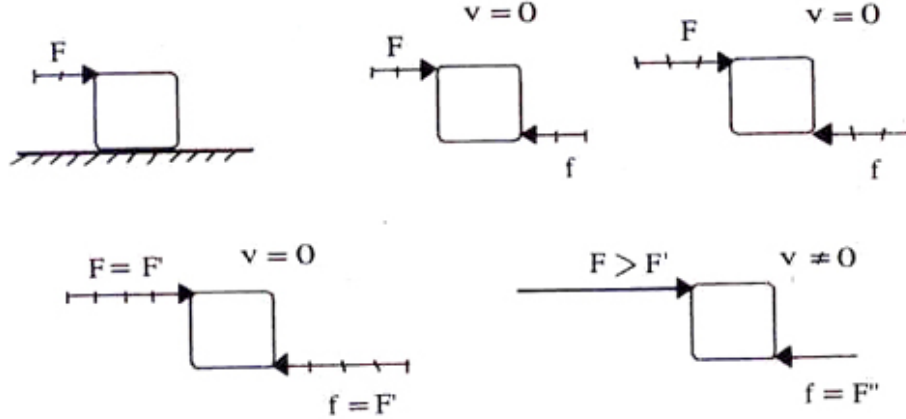


Figura IV.27: A medida que la fuerza horizontal F aumenta en magnitud, también lo hace la fuerza de roce f , hasta que llega a su cota máxima F' . Cuando F se hace mayor que este valor F' , el bloque comienza a moverse y el roce estático se transforma en roce cinético.

d) Cuando F es mayor que F' y el bloque está en movimiento, la fuerza de roce disminuye $f < F'$. En la mayoría de los casos esta disminución es pequeña.

Nos queda por determinar el valor de F' . Adoptamos la ley de Coulomb para el roce en seco y definimos el valor de F' de la siguiente forma:

Definición

El valor máximo de la fuerza de fricción $|\vec{F}'|$, es proporcional a la fuerza normal que se ejerce entre las superficies en contacto:

$$|\vec{F}'| = \text{Fuerza máxima de fricción estática} = \mu |\vec{N}|, \quad (\text{IV.6})$$

donde $\vec{N}$ es la fuerza normal entre las superficies y μ se denomina el *coeficiente de fricción*, y esconde nuestra ignorancia acerca del estado y características de las superficies en contacto que intervienen en el desplazamiento relativo.

Como se mencionó, existe un valor máximo para la fuerza de fricción estática y otro levemente menor para la fuerza de fricción cinética. Para distinguir ambos definimos un coeficiente de fricción cinético μ_c y otro estático μ_e .

$$\vec{F}_{roce} \equiv \mu_e \cdot |\vec{N}| \hat{t}, \quad (\text{IV.7})$$

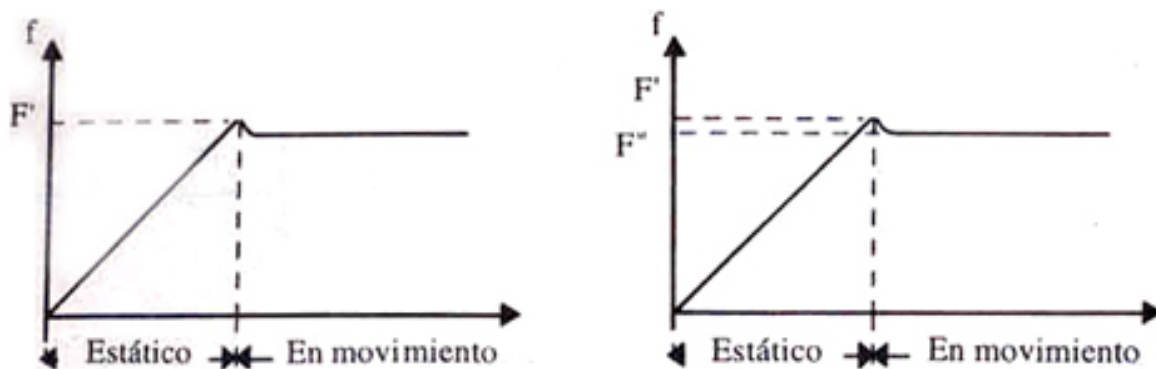


Figura IV.28: Se incluye un gráfico del valor con el cual la fuerza de roce responde a una fuerza externa. El movimiento comienza cuando se alcanza el valor F' . Posteriormente la fuerza de roce cambia y se estabiliza en el valor F'' , correspondiente al roce cinético.

donde $\vec{F}_{roce}$ representa la fuerza de roce que actúa en la dirección tangente a la superficie de contacto $\hat{t}$, y apunta en el sentido opuesto al movimiento relativo, en el caso de la fricción cinética y en el sentido opuesto a la fuerza aplicada, en el caso de la fricción estática.

En resumen: El módulo de las fuerzas F' y F'' , es proporcional al módulo de la fuerza normal a la superficie. El factor de proporcionalidad son los coeficientes de fricción estática en el primer caso y cinética en el segundo. La dirección de la fuerza de roce es siempre tangencial a la superficie de contacto y su sentido se opone al movimiento relativo.

Para sacar del reposo a un cuerpo debemos aplicar en forma tangencial una fuerza $F > F'$ y una vez en movimiento al menos una fuerza F'' para mantener su velocidad.

Nota

Antes de empezar a resolver un problema, es fundamental tener claro cuáles son los datos (es decir, lo que se conoce) y cuáles son las incógnitas. Después de plantear las ecuaciones debemos numerarlas (cada signo “=” revela una ecuación). Si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, podemos resolver el problema, en caso contrario debemos buscar nuevas ecuaciones.

En todos los problemas en que interviene el roce debemos suponer, de un comienzo, el sentido que tendrá el movimiento. Esta condición se debe a que el roce siempre se opone al movimiento, por lo tanto, para decidir su dirección y sentido es preciso suponer conocida la

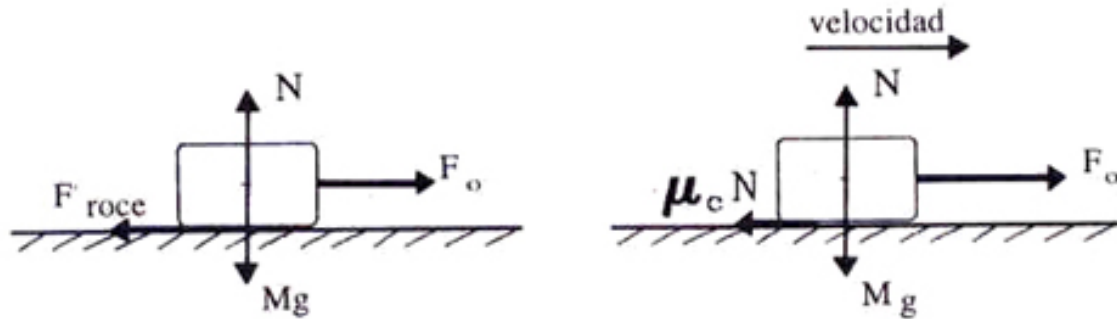


Figura IV.29: Se muestra el diagrama de cuerpo libre y la definición de la fuerza de roce con el coeficiente de roce *estático* (antes de que se produzca el movimiento) y el roce *cinético*, en el caso de un bloque deslizando sobre una superficie rugosa.

dirección y sentido en que viajará el móvil.

Si el movimiento obtenido a partir de esta suposición inicial ocurre en sentido opuesto, debemos resolver el problema nuevamente desde el comienzo cambiando el sentido del movimiento inicial.

Ejemplo

Resolvamos el movimiento de dos masas unidas por una cuerda de masa despreciable, una de ellas se desliza sobre un plano inclinado *con roce* y la otra cuelga, a través de una polea, del otro extremo de la cuerda.

En este problema suponemos conocidos: los valores de las masas, el coeficiente de roce cinético μ_c y el ángulo θ que forma el plano con el piso.

Se pide calcular la tensión de la cuerda y la aceleración de las masas M y m .

Recordemos que la cuerda debe estar siempre tensa. De esta forma la masa M se entera del movimiento de m únicamente a través de la tensión de la cuerda que debe (en módulo) ser la misma que la tensión que actúa sobre m . La polea del extremo no tiene roce y por lo tanto sólo cambia la dirección de la tensión. Como la cuerda es inextensible la aceleración de la masa M es la misma que la de m , sólo cambia su dirección.

Como ya establecimos cuáles eran las conexiones entre m y M , procedemos a elegir el sistema de coordenadas que mejor se adapte al problema. Designamos como eje- x a la dirección paralela a la superficie del plano inclinado. El eje- y es, por supuesto, perpendicular. Como el bloque se desliza sobre esta superficie, sin saltar o hundirse, éste es un sistema de coordenadas muy conveniente para resolverlo.

Enseguida hacemos el diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas. Para el

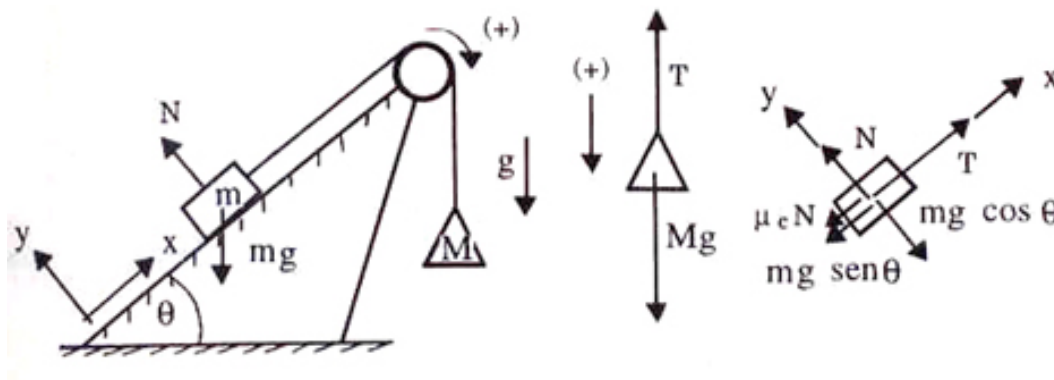


Figura IV.30: A cada una de las masas le asociamos una fuerza que corresponde a su peso. Sobre m actúa la reacción del piso que se descompone en una fuerza normal al piso y otra tangente que identifica a la fuerza de roce.

primer bloque de masa m tenemos, en el eje y :

$$1) \quad N - m g \cos \theta = 0,$$

De esta ecuación tenemos: $N = m g \cos \theta$.

Suponemos que la masa m remontará el plano en la forma indicada en la Figura. Si esta suposición es correcta, su ecuación de movimiento es:

$$2) \quad -\mu_c N - m g \sin \theta + T = m a.$$

La ecuación de movimiento para M es:

$$3) \quad -T + M g = +M a.$$

Las incógnitas son N , T y a . Y como tenemos tres ecuaciones, de forma que podemos despejarlas.

De la ecuación 1) despejamos N y su valor lo incluimos en 2), obteniendo:

$$-\mu_c m g \cos \theta - m g \sin \theta + T = m a$$

$$M g - T = M a$$

Sumando estas ecuaciones se cancela T y entonces podemos despejar la aceleración obteniendo:

$$a = \frac{M - m(\mu_c + \tan \theta) \cos \theta}{M + m} g.$$

Si la aceleración resulta ser negativa, debemos volver a las ecuaciones 1, 2 y 3 y plantearlas suponiendo que el movimiento se verificará en el sentido opuesto.

Como siempre, debemos comparar nuestros resultados con otros ya conocidos o con situaciones cuya solución es fácil de obtener.

Si el ángulo es $\theta = \pi/2$, entonces la aceleración está dada por:

$$a = g \frac{M - m}{M + m},$$

el mismo resultado obtenido para el sistema de las dos masas con una polea resuelto anteriormente.

Si $m = 0$, entonces $T = 0$ y $a = g$, que es lo esperado puesto que M estaría en ese caso en caída libre.

Si $M = 0$, entonces tenemos dos posibilidades: la masa m se desliza plano abajo o se queda en reposo. Esta situación es un caso particular de un ejemplo más complicado que discutimos a continuación. $\square$

Ejemplo

Suponga conocido el coeficiente de fricción estática entre la masa m y la superficie del plano inclinado, en la misma configuración estudiada en el ejemplo anterior.

Encuentre el rango de valores de m para el cual el sistema permanece en reposo.

En el ejemplo anterior supusimos que el peso de la masa M lo hacía caer, arrastrando consigo a la masa m .

Ahora debemos considerar otra posibilidad: si m aumenta su valor puede primero, detener el movimiento en el sentido indicado en el ejemplo anterior y, si m sigue aumentando, quedar a punto de levantar la masa M .

Estudiemos ambos límites en forma separada.

a) *El valor mínimo de m para que el sistema permanezca en reposo.*

Como no hay movimiento, debemos usar el valor del coeficiente de fricción estática. Este apunta hacia el vértice inferior del plano inclinado. La masa M se encuentra a punto de caer.

Conservando el convenio de signos del ejemplo anterior, el diagrama de cuerpo libre nos da la siguiente ecuación:

$$0 = -f_{\text{roce est.}} + T - m g \sen \theta.$$

Como no existe aceleración, el diagrama de cuerpo libre para M es directo: $T = M g$.

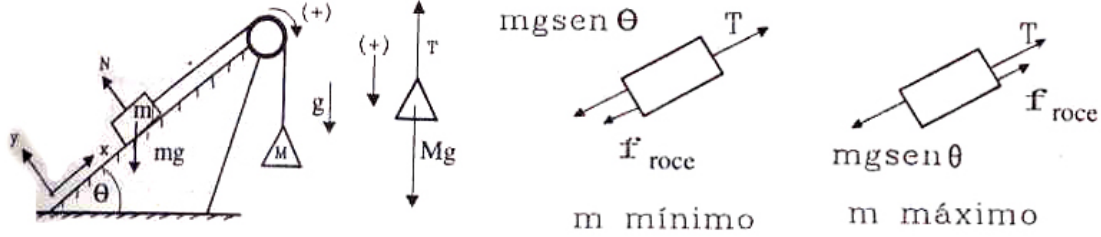


Figura IV.31: La fuerza de roce se opone al inicio del movimiento hasta que alcanza un valor límite igual a μN . En el primer caso apunta hacia el vértice inferior del plano (m mínimo). En el segundo caso invierte su sentido.

También, como estamos analizando el caso en el que m es *mínimo*, la fuerza de roce debe alcanzar su mayor valor: $f_{roce \text{ est.}} = \mu m g \cos \theta$, puesto que $m g \cos \theta$ es la fuerza normal que actúa sobre el plano. Reemplazando en la ecuación anterior, se obtiene:

$$0 = -\mu m g \cos \theta + M g - m g \sin \theta,$$

$$m_{\text{mínima}} = \frac{M}{\cos \theta [\mu_e + \tan \theta]}.$$

Siempre existe un valor finito de m que puede sostener la masa M . El coeficiente de roce estático μ_e , contribuye a disminuir el valor mínimo de m necesario para sostener M .

Si $\theta = \pi/2$, entonces $m = M$ es la única solución, puesto que en este caso la fuerza normal sobre el plano es nula y por lo tanto no hay roce.

b) *El valor mínimo de m para iniciar el movimiento del sistema.*

El diagrama de cuerpo libre es similar al anterior con la excepción del sentido que adopta la fuerza de roce estático. Como el cuerpo m está a punto de comenzar a deslizar hacia abajo, la fuerza de roce apunta hacia el vértice superior del plano inclinado. Conservando la convención de signos del caso anterior, tenemos:

$$0 = +\mu m g \cos \theta + M g - m g \sin \theta,$$

$$m_{\text{máximo}} = \frac{M}{\cos \theta [\tan \theta - \mu_e]}.$$

Este resultado tiene sentido sólo si $\mu_e < \tan \theta$: la masa m no puede ser negativa.

El caso $\mu = \tan \theta$ cobra sentido si $M = 0$. Este refleja la situación en la cual m permanece en reposo debido únicamente a la fricción estática con el piso.

En resumen, el sistema permanecerá en reposo si la masa m toma un valor entre:

$$\frac{M}{\cos \theta [\tan \theta - \mu_e]} \geq m \geq \frac{M}{\cos \theta [\tan \theta + \mu_e]}. \square$$

Cuando usamos μ_e siempre debemos tener presente que:

El roce estático responde a cualquier fuerza externa con la misma fuerza en dirección y magnitud pero, en sentido opuesto. Si la fuerza externa aumenta en intensidad, la fuerza de roce estático también lo hace hasta alcanzar un valor máximo.

Si la fuerza aplicada es mayor que este valor máximo, el cuerpo comienza a moverse, en cuyo caso debemos usar el coeficiente de roce cinético y poner la fuerza de roce en sentido opuesto a la dirección del movimiento.

Ejemplo

Obtener el valor *mínimo* de la fuerza F_0 para que m no deslice por el borde del bloque M (Figura [IV.32]).

Suponga conocidos los valores del coeficiente de roce estático entre ambos bloques, μ_{1e} , el roce cinético entre la masa M y el piso μ_{2c} , y los valores de las masas m y M , que se indican en la Figura [IV.32].

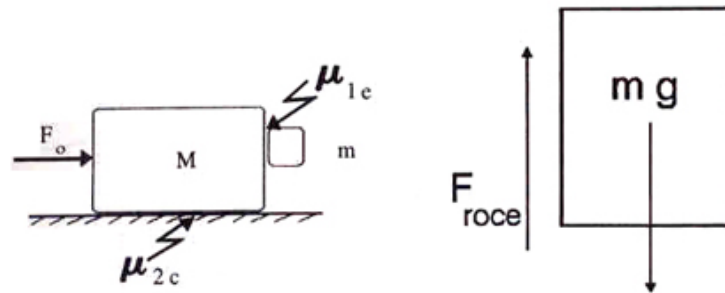


Figura IV.32: Aquí debemos aplicar una fuerza de reacción normal (en este caso una fuerza horizontal) de una magnitud tal que la fuerza de roce estático, no permita caer al bloque m . Se acompaña el diagrama de cuerpo libre de la masa m .

Comenzamos examinando la componente horizontal de las fuerzas que actúan sobre todo el sistema (las masas M y m) para obtener una ecuación para F_0 . Junto a ella

aparece la aceleración a_0 , que tampoco conocemos. (Dos incógnitas y una ecuación),

$$F_0 - \mu_{2c}(M + m)g = (M + m)a_0.$$

Para obtener más ecuaciones debemos analizar el diagrama de cuerpo libre de m . Su componente horizontal da la siguiente ecuación:

$$R = m a_0,$$

donde $\vec{R}$ es la fuerza que ejerce el bloque M sobre m . Incluimos otra ecuación, pero ésta trajo una nueva incógnita: R .

La ecuación de Newton para la componente vertical envuelve al roce estático, sin embargo como nos piden el *valor mínimo* de la fuerza F_0 para que m no caiga, usamos entonces *el valor máximo de la fuerza de roce*. La ecuación es:

$$\mu_{1e} R - m g = 0.$$

Aquí hemos supuesto, al igual que en la ecuación anterior, que la masa m no se desliza, y por esta razón hemos podido usar $(M + m)g$, como la fuerza normal actuando sobre el piso. Si la masa m estuviera cayendo, la fuerza normal sobre el piso sería $Mg + \mu_{1e}R$. En otras palabras, $\mu_{1e}R$ es igual a mg , sólo si la aceleración de la masa m es nula.

Volviendo a nuestro problema: ahora tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: R , a_0 y F_0 . Podemos entonces resolver el problema.

Despejando a_0 de las dos primeras ecuaciones, tenemos:

$$a_0 = \frac{g}{\mu_{1e}},$$

reemplazando este valor en la última ecuación, obtenemos:

$$F_0 = (M + m) \cdot g \cdot \left[\mu_{2c} + \frac{1}{\mu_{1e}} \right].$$

Verifiquemos si esta ecuación reproduce los resultados esperados en los casos límites. Si μ_{1e} es muy pequeña, la fuerza para mantener m en su lugar, debe ser apreciable, tal como se desprende de las ecuaciones.

También se puede observar que si no existe roce entre el piso y el bloque: $\mu_{2c} = 0$, entonces necesitamos una fuerza F_0 menor para mantener el bloque de masa m en reposo.

Ejemplo

Un bloque se desliza con una *velocidad constante* V_1 sobre un plano horizontal bajo la acción de una fuerza F_1 , también constante. El coeficiente de roce cinético entre ambas superficies es μ_c .

En un cierto instante le damos un golpecito lateral y posteriormente le aplicamos una fuerza constante F_2 –sin dejar de aplicar la fuerza F_1 –, de forma que adquiera una componente *adicional* de velocidad V_2 , *constante* y perpendicular a V_1 .

Calcule el valor de la fuerza F_2 necesaria para comunicar al bloque esta velocidad adicional V_2 . Suponga V_1 y V_2 conocidos.

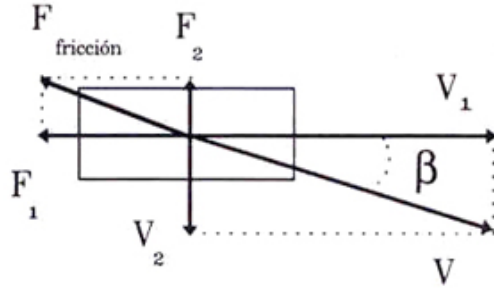


Figura IV.33:

Como el bloque se mueve con velocidad constante, la fuerza que debemos ejercer: $F_1 + F_2$, para mantener el movimiento debe ser constante, y su dirección y sentido, coincidir con el vector suma de velocidades $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

En cuanto a su magnitud, ésta debe ser la misma que la fuerza de roce cinético $\vec{f}$ pero, obviamente, en sentido opuesto.

Para mantener la velocidad constante las fuerzas F_1 y F_2 deben tomar los siguientes valores:

$$F_1 = f_{\text{cinética}} \cos \beta, \quad \text{y} \quad F_2 = f_{\text{cinética}} \sin \beta.$$

De la figura sabemos que $\tan \beta = \frac{V_2}{V_1}$ y de la trigonometría usamos la siguiente igualdad:

$$\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}, \quad \text{de aquí tenemos:}$$

$$F_2 = f_{\text{cinética}} \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

Si la velocidad V_2 es muy pequeña, entonces $\sin \beta \approx \tan \beta$, y reemplazando el valor de la fuerza de fricción, obtenemos:

$$F_2 = \mu_c M g \frac{V_2}{V_1}.$$

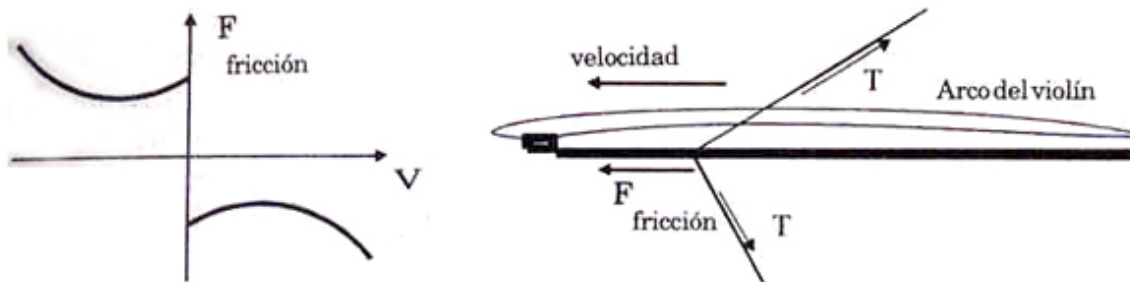


Figura IV.34:

M es la masa del bloque, la que suponemos conocida. $\square$

Es interesante analizar este resultado. Si la velocidad V_2 es muy pequeña comparada con V_1 , entonces F_2 , la fuerza necesaria para desviar a un objeto que resbala en la dirección de la velocidad V_1 es también pequeña.

Una aplicación de este resultado ocurre cuando intentamos sacar un clavo sin usar una herramienta. En ese caso se dobla el clavo y se tira haciéndolo girar permanentemente de lado a lado. Esta acción se realiza entonces exclusivamente para disminuir la fuerza necesaria para extraer el clavo de acuerdo al resultado obtenido en el último ejemplo.

Conviene analizar con espíritu crítico esta afirmación. Obviamente el hecho de girarlo genera un aumento de la temperatura entre el clavo y la madera y también un cierto desgaste que facilita la extracción. Con estos comentarios, es evidente que el resultado obtenido depende de otros parámetros que no se consideraron en el último ejemplo. Sin embargo, es interesante plantear y analizar esta situación, dado que es un truco al que se recurre en muchas ocasiones, por ejemplo, al instalar una conexión en una manguera de regadío.

Dependencia de la fuerza de fricción en la velocidad.

Esta dependencia es de gran importancia práctica. Es de interés conocerla en los casos de corte de metales, velocidad de los proyectiles, en la industria automotriz...etc.

La investigación en esta área encuentra muchas dificultades técnicas. Un ejemplo es el caso de una bala viajando por el cañón. Los experimentos han demostrado que la fuerza de fricción disminuye a medida que aumenta la velocidad, en forma rápida al comienzo y más lentamente después. A velocidades de alrededor de 100 m/s la fuerza de fricción comienza a aumentar con la velocidad. Esta dependencia se incluye en la Figura. La fricción resulta ser proporcional al cuadrado de la velocidad.

Esta misma dependencia de la fuerza de fricción en la velocidad ocurre entre una cuerda de violín y su arco y es la razón que sea posible escuchar sus acordes.

Una explicación cualitativa de este fenómeno y de otros más, aparece en la revista *Quantum*, en el número 6 de 1992. Una explicación más detallada del movimiento entre el arco y la cuerda del violín se puede encontrar en el libro: *Instrumentos Musicales: Artesanía y Ciencia*, H. Massmann y R. Ferrer, Dolmen, 1993, pags.158–162.

IV.6. EJERCICIOS

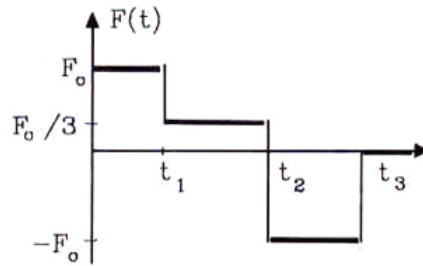
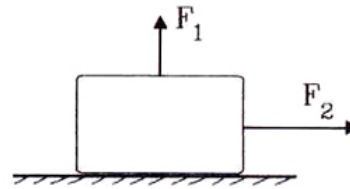


Figura IV.35: Problema # 1



Problema # 2

- 1.– Un objeto se encuentra sobre un plano liso, sin roce y es sometido a una fuerza $\vec{F}$ que varía en función del tiempo de acuerdo al gráfico que se acompaña. Si la masa del objeto es m , obtenga:
 - i) Aceleración del objeto en función del tiempo. (Graficar).
 - ii) Velocidad de esta masa, si parte inicialmente del reposo (Graficar).
 - iii) Posición del objeto en función del tiempo, si parte del origen.
- 2.– Sobre un plano sin roce se encuentra un objeto de masa $m = 2 \text{ kg}$. Sobre él actúan dos fuerzas $F_1 = 3 \text{ N}$ y $F_2 = 6 \text{ N}$ como muestra la Figura. Encuentre:
 - a) El vector aceleración del objeto.
 - b) Dirección, sentido y magnitud de su velocidad en función del tiempo, si parte del origen.
- 3.– Un bloque de masa m se suelta desde el reposo en un plano inclinado sin roce.
 - a) Encuentre la aceleración del objeto.
 - b) Analice todas las fuerzas que actúan sobre él, indicando su valor.

- 4.- Sobre una superficie lisa se pretende tirar el carrito de masa m que se muestra en la Figura, de modo que no se despegue del suelo.

Para las dos situaciones señaladas en la Figura, obtenga el valor de las fuerzas que actúan sobre el carro y compare el resultado.

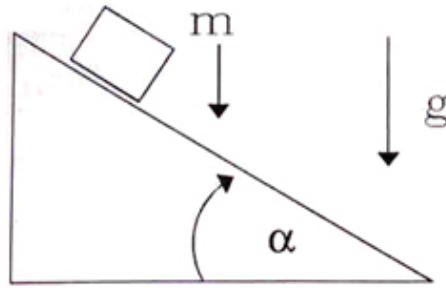
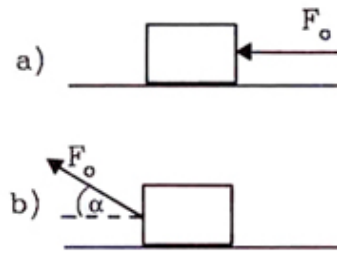


Figura IV.36: Problema # 3



Problema # 4

- 5.- Una locomotora tiene motores que la impulsan con una fuerza F_o y posee masa M . A ella se une un vagón de masa m . Si el conjunto se mueve por un riel de roce despreciable, determine:
- Aceleración del sistema.
 - Fuerzas que actúan sobre la locomotora y el vagón.
 - Tensión de la barra que une ambos objetos.

- 6.- Una locomotora de masa M , que arrastra un carro de masa m y se autopropulsa con una fuerza F_o , avanza por un plano inclinado con pendiente α .

Calcule:

- La aceleración del sistema.
- Las fuerzas que actúan sobre la locomotora y el vagón.
- La tensión de la barra que une ambos objetos.

- 7.- Un pintor que pesa 900 Newton trabaja en una silla colgante en un edificio de altura. Al terminar su turno debe volver al último piso para bajar a la calle. Para subir con la silla tira de la cuerda de tal forma que la fuerza que él ejerce sobre el asiento de la silla es de 500 Newton. La silla misma pesa 300 Newton.

- ¿Cuál es la aceleración del pintor y la silla?
- ¿Cuál es la fuerza total sobre el soporte de la polea?

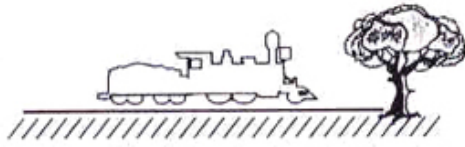
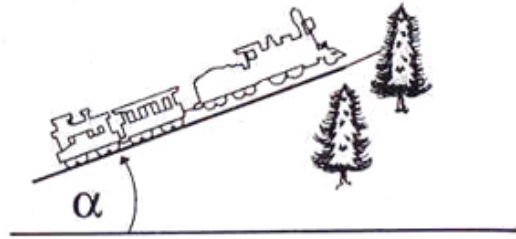


Figura IV.37: Problema # 5



Problema # 6

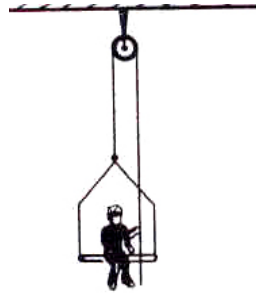
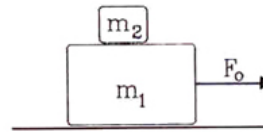


Figura IV.38: Problema # 7



Problema # 8

- 8.- Un cuerpo de masa $m_1 = 100 \text{ kg}$ es arrastrado a lo largo de una superficie sin roce con una fuerza F_0 , de modo que su aceleración es de 6 m/s^2 respecto al suelo.
- El cuerpo $m_2 = 20 \text{ kg}$ se desliza por sobre el cuerpo de 100 kg , con una aceleración de 4 m/s^2 , referida al piso.
- ¿Cuál es la fuerza de roce ejercida por la masa m_1 sobre m_2 ?
 - ¿Cuál es la fuerza neta sobre el cuerpo de masa 100 kg ?
 - ¿Cuál es el valor de $\vec{F}_0$?
 - Después que el cuerpo de 20 kg se desliga del cuerpo de 100 kg . ¿Cuál es la aceleración del cuerpo de 100 kg ?
 - ¿Cuál es el coeficiente de roce cinético entre los bloques?
- 9.- Un auto se aproxima a una pendiente con una velocidad V_0 . Justo al comenzar la pendiente, el auto prosigue sólo con el impulso inicial. Suponiendo que el roce con el camino y el viento es despreciable, encuentre la altura máxima h que logrará alcanzar con esta velocidad.

- 10.– Suponga que N masas iguales de m (kg) cada una, cuelgan unidas mediante una cuerda. Determine la tensión de la cuerda ideal (sin masa) que une el cuerpo k -ésimo con el $(k - 1)$ -ésimo. Verifique su resultado para $N = 2$.
- 11.– Una pelota de 2 kg cae libremente y en un cierto instante tiene una rapidez de 6 [m/s]
- ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[m]?
 - ¿Qué fuerza vertical constante se debe aplicar para detenerla en los próximos 5[s]?

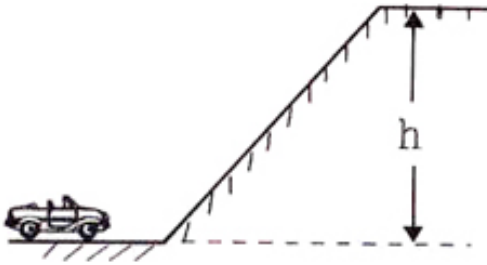
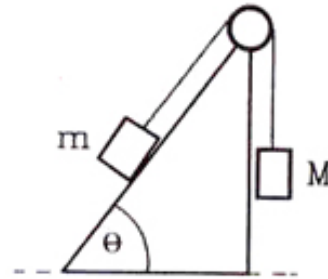


Figura IV.39: Problema # 9



Problema # 12

- 12.– Dos bloques de masa m y M están unidos por una cuerda y una polea ideales. Cuando se colocan en la posición indicada en la Figura (m sobre el plano inclinado, liso y M colgando verticalmente), el cuerpo de masa m , sube con una aceleración cuya magnitud es $29/5$ [m/s²].
- Si a continuación se invierten las posiciones (M se coloca sobre el plano y m cuelga verticalmente) el cuerpo de masa M también sube pero con aceleración de magnitud $9/10$ [m/s²]. Determine:
- El valor de θ .
 - La razón entre las masas: m/M .
 - ¿Qué ocurriría si no despreciáramos el roce?

- 13.– Se desea tirar un carrito de masa m sobre una superficie rugosa (de coeficiente de roce cinético μ), como muestra la Figura.
- Calcule el valor de la fuerza con que se tira el carro en función del ángulo θ de la figura, si se quiere que el carro se mueva con rapidez constante.

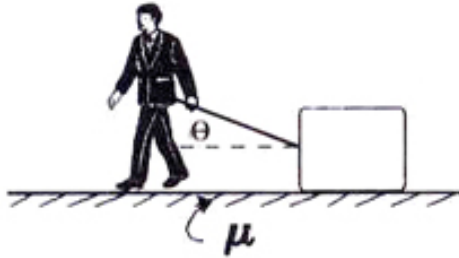
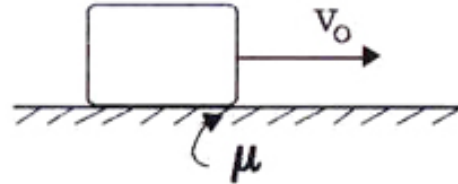


Figura IV.40: Problema # 13



Problema # 14

- 14.- Un objeto de masa m se mueve con velocidad V_0 sobre una superficie rugosa que posee coeficiente de roce cinético μ .
- Obtenga la aceleración del objeto.
 - ¿Cuánto tarda en detenerse?
- 15.- El bloque B de masa m parte del reposo desde el extremo superior del plano inclinado, que permanece fijo a la Tierra. Después de bajar una distancia D , el cuerpo lleva una velocidad igual al 50 % de la velocidad que hubiera adquirido si el roce con el plano fuera nulo.
- Encuentre una expresión para el coeficiente de roce μ entre el plano y la masa B, en función de θ .
- 16.- Un objeto de masa m se encuentra en reposo sobre un plano rugoso (de coeficiente de roce estático μ_e y cinético μ_k). Se intenta moverlo aplicando una fuerza que forma un ángulo θ con la horizontal.
- Encuentre el tamaño de la fuerza mínima (F_{min}) que es necesario realizar para mover el objeto.
- 17.- La cuña lisa de masa M , se desliza bajo la acción de una fuerza horizontal F . Sobre ella se coloca un bloque de masa m .
- Dibuje todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas.
 - Determine el valor que debe tomar la fuerza aplicada F , para que el bloque más pequeño no resbale sobre la cuña. Suponga que no existe roce entre los bloques.
 - Ahora considere la existencia de roce sólo entre ambos bloques. (No existe roce entre la cuña y el piso). Calcule el valor máximo y el mínimo que debe tomar F , para el bloque no resbale sobre la cuña. Suponga los coeficientes de roce estático y cinético conocidos.

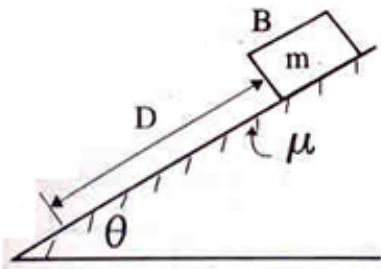
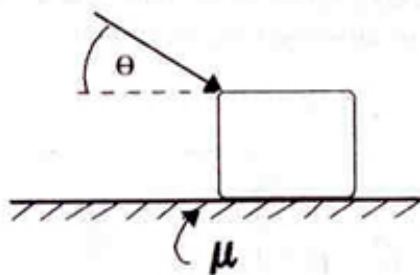


Figura IV.41: Problema # 15



Problema # 16

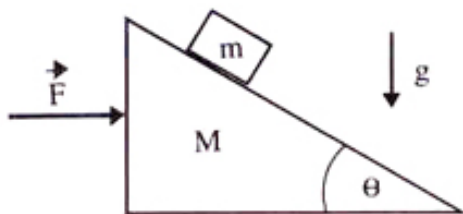
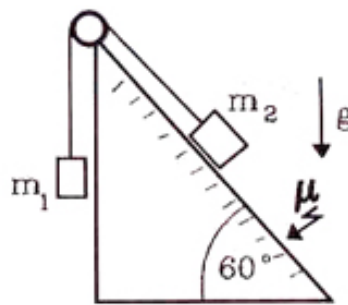


Figura IV.42: Problema # 17



Problema # 18

- 18.- El plano inclinado de la Figura forma un ángulo de 60° con la horizontal y es rugoso.
El bloque m_1 y el bloque m_2 se encuentran detenidos, obtenga el valor de la tensión de la cuerda y la fuerza de roce.
- 19.- Las fuerzas $\vec{F}$ aplicadas a cada bloque impiden que baje la cuña de masa m . Calcule el valor de la fuerza F , suponiendo que el roce entre las superficies es despreciable.
- 20.- Se tiene una tabla de masa M y sobre ella un paquete de masa m . Sobre dicho paquete se aplica una fuerza F . Entre la tabla y el suelo existe un coeficiente de roce μ_1 y entre el paquete y la tabla el coeficiente es μ_2 .
¿Qué inclinación debemos darle a la fuerza F de modo que la tabla esté a punto de moverse cuando el paquete sobre la tabla comience a moverse?
- 21.- El plano inclinado forma un ángulo de 60° con la horizontal. Está fijo a la Tierra y posee un coeficiente de roce cinético μ . El bloque m_1 desciende con una *aceleración*

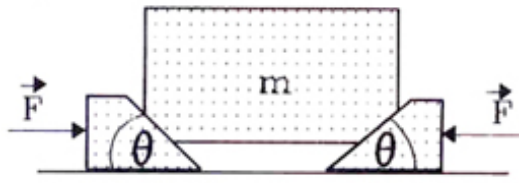
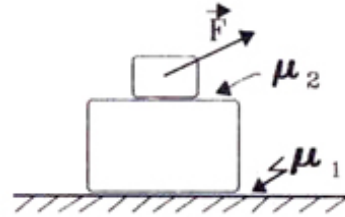


Figura IV.43: Problema # 19



Problema # 20

cuyo valor es la mitad del valor que tendría en el caso que no consideráramos el roce entre las superficies. Calcule el coeficiente de roce cinético si $m_1 = 2m_2$ y confeccione un diagrama de cuerpo libre para ambas masas.

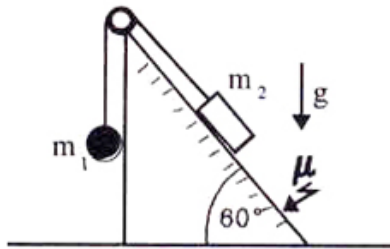


Figura IV.44:

Problema # 21

- 22.– Un paquete de masa m , se mueve con rapidez V_0 sobre una superficie sin roce y al final de su camino logra entrar en el tablero horizontal de un trineo de masa M , que se puede mover sin roce sobre el hielo. El coeficiente de roce entre el paquete y el trineo es μ . El paquete se desliza sobre el trineo hasta que finalmente queda en reposo, *con respecto a éste*.
- ¿Cuál es la velocidad del conjunto, una vez que el paquete queda en reposo con respecto al trineo?
 - ¿Cuánto tiempo demora el paquete, en quedar en reposo con respecto al trineo?
 - ¿Qué distancia recorre la masa m sobre M antes de detenerse sobre ella?

Indicación: Cuando el paquete desliza sobre el trineo su aceleración es distinta a la del trineo.

- 23.– Dos masas m y M se encuentran unidas por una barra de masa despreciable y largo ℓ . En estas condiciones ambas realizan un movimiento circular uniforme en torno al centro de masa del sistema, con frecuencia f .



Figura IV.45: Problema # 22

Calcule la tensión en la barra que une ambas masas.

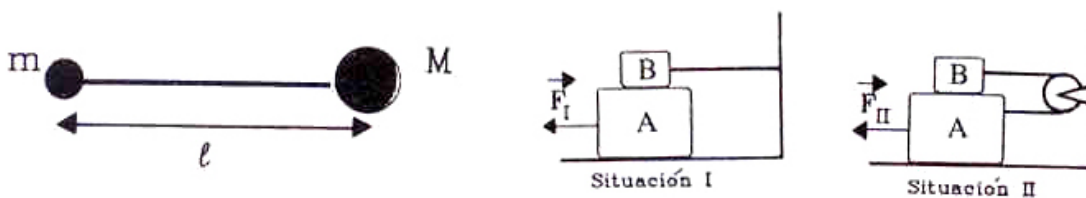


Figura IV.46: Problema # 23

Problema # 24

- 24.- Con dos bloques A y B, se arman las configuraciones I y II que se indican en la Figura. Las cuerdas y poleas que se usan tienen masas despreciables y las masas m_A y m_B cumplen la siguiente relación: $m_A = 2m_B$.

La magnitud de las fuerzas aplicadas F_I y F_{II} es tal que el bloque A se mueve con velocidad constante en ambas situaciones. Calcule el cociente entre el módulo de F_I y F_{II} .

El coeficiente de roce es constante, vale μ y es el mismo entre todas las superficies en contacto.

- 25.- Un pequeño cubo de masa m se ubica sobre un plano inclinado con un ángulo α . El coeficiente de fricción cinética entre el cubo y la superficie es $\mu_c = 2 \tan \alpha$. Encuentre el mínimo valor de la fuerza *horizontal* que es necesario aplicar para comenzar a mover el cubo.
- 26.- Una masa m se desliza sobre una mesa sin roce, conectada a una masa M que cae por un borde de la mesa. Ambas están conectadas a través de las poleas, de masa

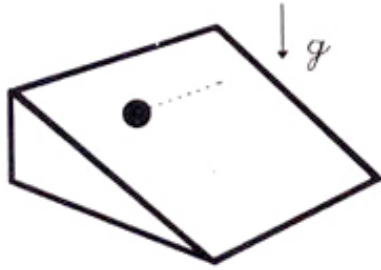
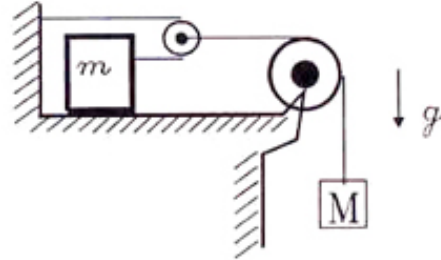


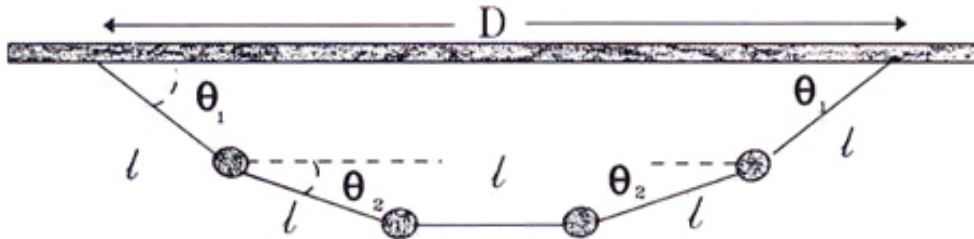
Figura IV.47: Problema # 25



Problema # 26

despreciable, que se muestran en la Figura.

- a) Encuentre la aceleración de cada una de las masas.
 - b) Encuentre la tensión en las cuerdas.
- 27.- Una cuerda sin masa cuelga sostenida desde sus extremos separados por una distancia D . A esta cuerda se le añaden cuatro masas iguales m , a una distancia ℓ entre ellas. La cuerda forma un ángulo θ_1 en los extremos y, entre las dos masas centrales, permanece horizontal, formando un ángulo θ_2 con sus vecinos. Calcule la tensión en cada tramo de la cuerda, en función de θ_1 , m y g . Encuentre el valor del ángulo θ_2 .



Oscilador armónico, energía y choques

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

V

Índice general

V. OSCILADOR ARMONICO, ENERGIA Y CHOQUES	197
V.1. FUERZA DE RESTITUCION DE UN RESORTE	198
V.1.1. Experimento	198
V.2. MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE	201
V.2.1. Condiciones iniciales	204
V.2.2. Oscilaciones pequeñas. Péndulo simple	208
V.3. TRABAJO	212
V.3.1. Cálculo del trabajo realizado por un resorte	215
V.4. ENERGIA	218
V.4.1. Gráfico de la energía de un oscilador armónico	224
V.5. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ROCE	226
V.6. OSCILADOR EN UN CAMPO GRAVITACIONAL	229
V.7. PENDULO EN UN CAMPO GRAVITACIONAL	234
V.8. MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO	235
V.9. MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO	237
V.10. CHOQUES	238
V.10.1. Choques elásticos	238
V.10.2. Choque inelástico	241
V.10.3. Choques en dos dimensiones	244
V.10.4. Fuerzas impulsivas	246
V.11. EJERCICIOS	247

Capítulo V

OSCILADOR ARMONICO, ENERGIA Y CHOQUES

En esta sección estudiaremos el movimiento generado al elongar (o comprimir) un resorte con una masa en su extremo. La solución obtenida aquí está íntimamente ligada al movimiento circunferencial uniforme. Genera, además, el mismo tipo de ecuaciones que rige el movimiento de un péndulo, caso que también examinaremos en detalle en este capítulo.

Otro aspecto que abordaremos es lo que se denomina trabajo. Esencialmente consiste en integrar las ecuaciones de movimiento de Newton y obtener una expresión algebraica más sencilla que, en general, involucra sólo la velocidad y la posición del cuerpo. Para algunos tipos de fuerza, incluida la fuerza de restitución de un resorte, este procedimiento genera una cantidad que se conserva a lo largo de la trayectoria del punto. A esta expresión se le denomina *energía*.

Usando estos métodos es posible obtener información acerca de problemas más complicados, como por ejemplo las oscilaciones (no necesariamente pequeñas) de un péndulo.

Finalmente, se incluye el caso de choques entre partículas, como una aplicación directa de las leyes de Newton.

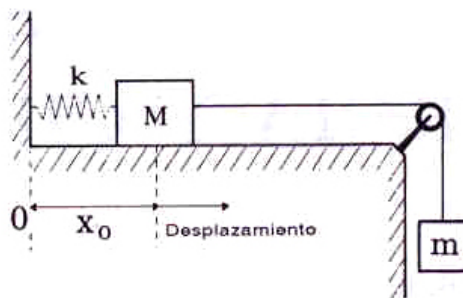
Al final del capítulo se propone una serie de ejercicios cuya solución requiere, en muchos casos, de la aplicación simultánea de los conceptos mencionados en esta introducción.

V.1. FUERZA DE RESTITUCION DE UN RESORTE

V.1.1. Experimento

Para encontrar el comportamiento de un resorte sometido a una fuerza, realizamos el siguiente experimento: *lentamente* colgamos de un extremo masas de 1 kg, en la forma que se indica en la Figura. Simultáneamente procedemos a tabular el alargamiento que experimenta el resorte y la fuerza que lo provoca. Al graficar los resultados se obtiene la ley de fuerza que gobierna el comportamiento de un resorte.

$F = T$	Desplazamiento
1 N.	. 31 mm.
2 N.	. 64 mm.
3 N.	. 89 mm.
.	.
.	.



Después de realizar numerosos experimentos se llega a la siguiente conclusión:
El desplazamiento del extremo de un resorte, medido a partir de su largo natural x_0 , es proporcional a la fuerza aplicada.

El largo natural del resorte, denominado x_0 , es la longitud que adquiere cuando no existe ninguna fuerza externa aplicada sobre él.

Esta es una *ley empírica*: proviene de la experimentación y no representa un conocimiento más profundo de los mecanismos que utiliza el resorte para reaccionar de esta forma a la acción de una fuerza.

En la Figura se grafica la fuerza aplicada *versus* el desplazamiento. El resorte se opone con una fuerza de igual magnitud y dirección pero en **sentido opuesto**. La ley de fuerzas para el resorte es:

$$F = -k(x - x_0). \quad (V.1)$$

Esta es la *ley de Hooke*.

Robert Hooke (1635–1703) fue contemporáneo de Newton y un hombre que destacó en diferentes áreas: construyó una bomba de vacío que permitió a Boyle encontrar la ley de los gases ideales que lleva su nombre, construyó un microscopio con el cual observó el corcho y otros tejidos de plantas y notó que estaban constituidos por pequeñas cavidades separadas por paredes que denominó *celdas*. Esta es una de las primeras menciones de lo

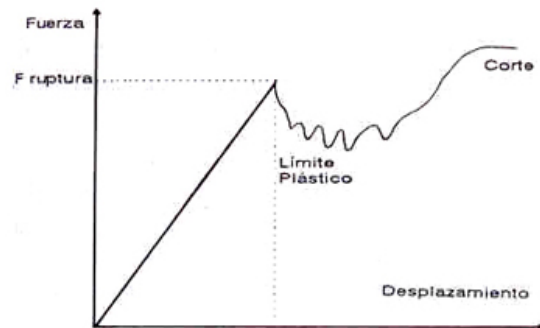


Figura V.1: En la abcisa del sistema de coordenadas se anota el desplazamiento del extremo del resorte y en la ordenada la fuerza aplicada. Después de experimentar con distintas magnitudes de fuerza, se observa que existe una zona donde una línea recta representa la tendencia de los puntos tabulados.

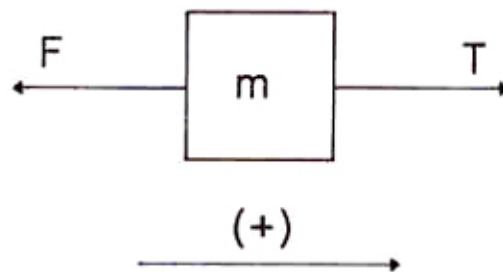
que posteriormente se conoce como *célula*. Fue uno de los críticos de la teoría corpuscular de la luz, elaborada por Newton y publicada en su libro de óptica.

El punto de quiebre de la línea se denomina el *límite elástico* y marca el inicio del comportamiento plástico del resorte: aquella región donde la deformación experimentada por el resorte se transforma en deformación permanente. El resorte no recupera su largo inicial.

La fuerza se debe aplicar lentamente de forma que la masa m no adquiera velocidad. Si la velocidad no es despreciable, el análisis del problema debe incluirla. Esta última situación será estudiada posteriormente.

Escribimos las ecuaciones de Newton asociadas a la masa m , tomando el extremo del resorte como origen del sistema de coordenadas.

Hemos supuesto que la masa del resorte es despreciable comparada con la masa que colgamos de su extremo. El diagrama de cuerpo libre para la masa en el extremo del resorte se indica en la Figura. En la dirección horizontal tenemos:



$$-F + T = m a,$$

donde T representa la fuerza que opone el resorte al intentar ser elongado y F es la fuerza externa, proveniente —en este caso—, de las masas que se han colgado desde el

extremo.

Si las masas se cuelgan cuidadosamente, la aceleración es nula, $a = 0$, entonces $T = F$ en cada instante. Al estudiar la tabla de valores obtenida experimentalmente, podemos relacionar la fuerza aplicada con la deformación del resorte. El resultado es una relación lineal entre la fuerza y la deformación, válida dentro de un cierto rango de valores para la fuerza, denominado el rango de linealidad del resorte:

$$F = -k x. \quad (V.2)$$

La constante k , mide la rigidez del resorte. Un resorte muy rígido tiene asociado un valor de k alto; en este caso debemos aplicar una fuerza de magnitud apreciable para poder estirar el resorte una distancia pequeña. El caso opuesto, un valor de k muy pequeño representa un resorte muy débil sobre el cual una fuerza pequeña producirá una deformación apreciable.

Las dimensiones de k son:

$$[k] = \frac{[newton]}{[m]}.$$

Ejemplo

Dados dos resortes idénticos, de rigidez k , calcular la deformación que experimentan al colgar una masa m , en los dos casos siguientes: cuando los resortes se conectan en serie, y en paralelo.

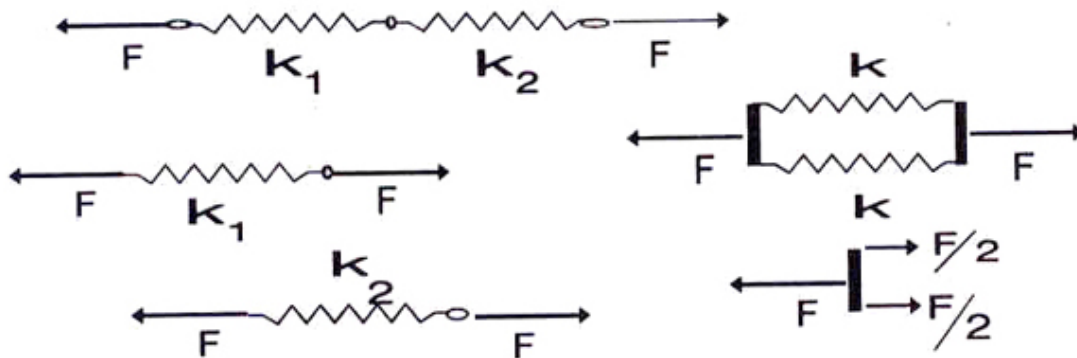


Figura V.2: A la derecha se representa a los dos resortes conectados en paralelo y a la izquierda aparecen conectados en serie. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de las configuraciones.

a) Resortes en serie.

Para obtener un resultado más interesante supongamos que la constante de rigidez de

cada resorte es diferente. Al conectar los dos resortes en serie obtenemos otro resorte, cuya rigidez la definimos como K y cuya expresión debemos encontrar a continuación.

Al aplicar una fuerza F (con $F = mg$) en los extremos del sistema de dos resortes, en la unión de cada resorte actúa la misma fuerza F en la dirección y sentido que se indica en la Figura. Debido al efecto de esta fuerza cada uno de los resortes se elonga una distancia F/k_1 y F/k_2 . Como la elongación de cada uno de los resortes se debe sumar debido a la forma en que están conectados, el resorte compuesto se estira:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] \equiv \frac{F}{K} \Rightarrow \frac{1}{K} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right].$$

Conociendo el valor de la constante K para esta configuración, podemos estudiar el caso particular en que ambos resortes tienen la misma rigidez:

$$\frac{1}{K} = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right], \text{ si ambos resortes son iguales } \frac{1}{K} = \frac{2}{k} \Rightarrow K = \frac{k}{2}. \quad (\text{V.3})$$

b) Resortes en paralelo.

En este caso suponemos de un comienzo que ambos resortes son idénticos. Como están en paralelo, cada uno soporta la mitad del peso de la masa m , es decir, una fuerza $F/2$. Cada uno de los resortes se elonga $F/(2k)$ y, de acuerdo a la forma como están conectados los resortes, el sistema se elonga $F/(2k)$, de modo que el resorte equivalente tiene una constante de rigidez:

$$K = 2k, \quad \text{para resortes en paralelo.} \quad (\text{V.4})$$

En resumen, si tenemos dos resortes y queremos armar un resorte más duro, debemos conectarlo en paralelo. Ahora, si lo deseamos más blando, debemos conectarlo en serie. $\square$

Ejercicio

Encuentre el valor de la rigidez equivalente K_n que tienen n resortes idénticos al ser conectados: a) todos en paralelo y b) todos en serie. $\square$

V.2. MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

En la sección anterior estudiamos el caso estático. Analicemos ahora la situación dinámica, supongamos que repentinamente cortamos la cuerda que une la masa con el platillo en la Figura [V.1], entonces la fuerza externa desaparece instantáneamente, $F = 0$. En este caso, la segunda ley de Newton afirma que:

$$m a = -k x, \quad (\text{V.5})$$

donde $a \equiv$ aceleración de la masa m a lo largo del eje x .

Aquí hemos supuesto que la ley de fuerzas encontrada para el caso estático se aplica –sin cambios–, al movimiento acelerado. La validez de esta suposición debe ser ratificada por los experimentos: dentro de cierto rango de valores, el comportamiento de los resortes debe ajustarse a esta ley.

De esta forma estamos en condiciones de poner a prueba las ecuaciones de Newton y el resultado empírico acerca de la ley de fuerzas del resorte. Solamente debemos ser capaces de resolver la ecuación de movimiento planteada [V.5]. Esta ecuación nos permite conocer la posición del resorte, $x(t)$, en cada instante. Al comparar el valor de $x(t)$ obtenido a través de las ecuaciones [V.5], con la trayectoria que describe una masa m oscilando del extremo de un resorte en el laboratorio, podemos concluir que las ecuaciones planteadas [V.5], constituyen un modelo razonablemente cercano a lo que es un oscilador en la realidad.

Hay un factor que no se considera en esta sección y que efectivamente se observa en el laboratorio: el amortiguamiento de la oscilación. Este aspecto se tratará posteriormente, por ser más complejo.

Volviendo a la ecuación [V.5], vemos que es una ecuación diferencial y que no estamos capacitados (a menos que conozcamos el cálculo diferencial) para resolverla. Afortunadamente, ya hemos visto este tipo de ecuaciones al estudiar el movimiento circular uniforme, y podemos encontrar su solución haciendo una analogía con este movimiento.

A continuación mostraremos que basta entender la cinemática del movimiento circular uniforme para resolver la ecuación [V.5].

Empecemos recordando la expresión para la aceleración de una partícula que describe una circunferencia con una rapidez uniforme (Capítulo III):

$$\vec{a} = -\omega^2 r [\cos \omega t, \sin \omega t] = -\omega^2 \vec{x}. \quad (\text{V.6})$$

Al tomar la componente x de este vector, obtenemos:

$$a_x = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad (\text{V.7})$$

se puede apreciar que es el mismo tipo de ecuación que aparece en el caso del resorte, si identificamos ω^2 con k/m .

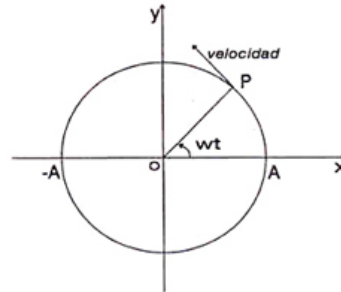
En palabras, esta ecuación nos dice que en cada instante el valor de la aceleración debe ser proporcional a la posición de la partícula. El factor de proporcionalidad es $-\omega^2$.

Si ambas ecuaciones, la obtenida al estudiar el movimiento armónico simple y aquélla que gobierna el movimiento de una masa unida a un resorte, son iguales, entonces tienen la *misma solución*. Una de las soluciones de la ecuación [V.5], es:

$$x(t) = A \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right], \quad (\text{V.8})$$

con $A = \text{Constante}$.

Como estamos resolviendo un problema físico, cada una de las cantidades que aparecen en la ecuación debe tener un significado concreto. En el caso de la constante A , representa la amplitud de la oscilación.



Por ejemplo, analizando en detalle la solución [V.8] concluimos que corresponde a un resorte cuya elongación en $t = 0$ es $x(t = 0) = A$. La velocidad en ese mismo instante es nula, como se puede verificar al derivar una vez esta solución. También se puede llegar a esta conclusión al inspeccionar la última Figura, donde se representa un movimiento circular uniforme. Allí se advierte que la velocidad es tangente a la circunferencia y en ese punto –donde $t = 0$ – no tiene componente en el eje x . De hecho es perpendicular a él.

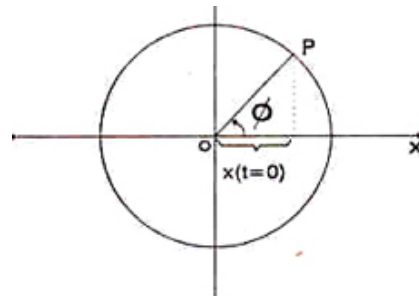
Si estiramos un resorte de forma que $x = A$ y en un instante arbitrario, que designamos como $t = 0$, se deja ir, el resorte oscila en torno al punto de equilibrio con una frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$. Gráficamente se puede ver en la Figura, como la proyección del punto P sobre el eje x , oscila entre $-A$ y $+A$, a medida que el punto P da vueltas a la circunferencia. (El ángulo que describe el vector que apunta hacia P es lo que se denomina la *fase* de dicho movimiento).

Sin embargo, ésta no es la situación más general. Puede ocurrir que al momento de empezar el movimiento, el punto P que representa a la posición inicial de la partícula en la Figura, no se ubique en el eje x sino que forme un ángulo ϕ con la horizontal, tal como se aprecia en la Figura.

En este caso debemos sumar el ángulo ϕ a (ωt) y la solución es:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (\text{V.9})$$

$$\text{con } \omega^2 \equiv \frac{k}{m}.$$



Esta última ecuación es la solución más general de la ecuación

[V.5]. Todos los posibles casos que pueden ocurrir con un oscilador armónico se acomodan a esta expresión.

V.2.1. Condiciones iniciales

El problema del movimiento de una masa m atada a un resorte de constante k , masa nula y sin fricción, ya está resuelto. Su solución es la ecuación [V.9]. Para usar esta expresión en cada uno de los casos particulares planteados en un ejercicio, debemos determinar los valores de las constantes A y ϕ , que aparecen en la ecuación [V.9]. Estas dos constantes contienen la información acerca de la velocidad y la deformación del oscilador en el instante inicial.

La constante ω distingue un oscilador armónico de otro.

Para determinar A y ϕ debemos conocer las condiciones bajo las cuales se originó la oscilación, éstas se denominan las *condiciones iniciales* del problema.

Un problema está bien planteado si a partir de los datos que nos entregan se puede determinar, sin ambigüedades, A y ϕ .

Ejemplo

En el instante inicial, $t = 0$, el extremo de un resorte se encuentra en su punto de equilibrio ($x = 0$), con una velocidad ($-V_0$). Encontrar el valor de A y ϕ en este caso.

Estos son los datos típicos que se proporcionan para resolver un problema de oscilaciones.

En la solución general [V.9], se debe ajustar los valores de A y ϕ para satisfacer estas condiciones iniciales:

$$x(t = 0) = 0 = A \cos \phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2},$$

($A \neq 0$, puesto que si $A = 0$, no existe oscilación). Reemplazando en la ecuación general [V.9], tenemos:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \pi/2) = -A \sin(\omega t).$$

La velocidad se encuentra sumándole ($\pi/2$) al ángulo correspondiente al vector posición y multiplicando la amplitud por ω . (Recordemos que, en todo instante, $\vec{V}$ es perpendicular al vector posición).

$$V(t) = -A \omega \sin[\omega t + \pi/2] = -A \omega \cos[\omega t].$$

Hemos usado las propiedades del seno y del coseno. (Ver Apéndice Matemático para mayores detalles).

Aplicamos ahora la condición inicial a la expresión de la velocidad. Se obtiene:

$$t = 0, \quad V(t = 0) = -V_0 = -A \omega \Rightarrow A = \frac{V_0}{\omega}.$$

Así, en este caso, la ecuación de movimiento toma la siguiente forma:

$$x(t) = \left(\frac{V_0}{\omega} \right) \cos(\omega t + \pi/2). \quad (\text{V.10})$$

Las dimensiones de V_0/ω son,

$$\left[\frac{V_0}{\omega} \right] = \frac{\left[\frac{L}{T} \right]}{\left[\frac{1}{T} \right]} = L. \quad (\text{V.11})$$

Nota

Conviene destacar que el *movimiento armónico simple*, este es el nombre que recibe el movimiento que hemos estudiado, es fundamental en el funcionamiento de los relojes mecánicos porque ω , la velocidad angular, está determinada por la constante k del resorte y la masa m . Conocidos estos valores, la frecuencia queda *fija*, sin depender de la forma cómo se inicia esta oscilación.

Ya sabemos resolver el problema de la oscilación de un sistema masa resorte en ausencia de fricción. El procedimiento consiste en determinar las constantes A y ϕ , a partir de las *condiciones iniciales* del problema. Como es una operación que se repite una y otra vez, conviene ilustrarla con distintos casos.

Ejemplo

Aplicamos una fuerza sobre un resorte de modo que se alargue X_0 metros, medidos a partir de su largo natural. Repentinamente lo soltamos. ¿Qué valor toman las constantes A y ϕ en este caso?

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} \text{En } t = 0 : \quad x = X_0 &= A \cos \phi, \\ v = 0 &= -A \omega \sin \phi. \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones A y ϕ quedan determinadas y podemos conocer la posición y la velocidad en cualquier instante posterior.

Si le hubiésemos dado un impulso (un golpe corto) justo cuando estaba en reposo, entonces las condiciones iniciales serían:

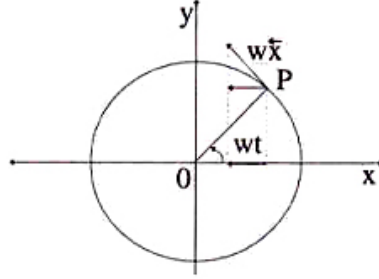


Figura V.3: La velocidad se puede obtener geoméricamente de la Figura. Es tangente a la circunferencia y su magnitud está dada por el producto del radio por la velocidad angular. La velocidad de la masa unida al extremo del resorte se obtiene proyectando $w r$ sobre el eje x.

$$\begin{aligned} \text{En } t = 0 : \quad x(t = 0) = 0 &= A \cos \phi \Rightarrow \phi = \pi/2, \\ v(t = 0) = v_0 &= -A \omega \sin \phi \Rightarrow A = -v_0/\omega. \end{aligned}$$

Un impulso corresponde físicamente a un cambio repentino en el valor de la velocidad, sin afectar –en ese instante– a la posición, la cual permanece inalterada.

Sabemos que $v(t)$ es la derivada de $x(t)$ con respecto al tiempo. Pero también se puede pensar (de acuerdo a la Figura [V.3]), en una rotación en $\pi/2$ radianes con respecto al vector $\vec{x}(t)$ y además multiplicar el largo (módulo) del vector $\vec{x}(t)$ por ω .

Esta operación nos permite obtener gráficamente la velocidad en cualquier instante.

Ejercicio

Se tiene una masa unida a un resorte de constante k , que oscila sobre una mesa sin roce. Demuestre que si la posición en el instante $t = 0$ es x_0 , y su velocidad es v_o en el mismo instante, entonces las constantes A y ϕ , toman los siguientes valores:

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}, \quad \tan \phi = -\frac{v_o}{\omega x_o}. \quad \square \quad (\text{V.12})$$

Ejemplo.

Una partícula que realiza un movimiento oscilatorio armónico pasa consecutivamente a través de dos puntos separados por una distancia a , con la *misma velocidad* (en magnitud, dirección y sentido). El tiempo que tarda en recorrer el trayecto entre estos dos puntos es τ segundos.

Sabemos, además, que la partícula demora 2τ segundos en pasar por el segundo punto, ahora con la misma velocidad (en dirección y magnitud), pero en *sentido opuesto*.

A partir de estos datos encuentre el período T y la amplitud A de este movimiento.

En este ejemplo, las condiciones iniciales para determinar las constantes A y ϕ no están dadas en forma simple y directa, como es lo usual en otros problemas. En otras palabras, conociendo a y τ , debemos determinar las constantes de movimiento A , ϕ , y la razón k/m del oscilador.

Notemos que la magnitud de la velocidad del oscilador en los puntos citados en el enunciado, *no* es conocida, sólo a y τ son datos. Otro punto, es la presentación de los datos iniciales: la distancia a y los tiempos aparecen en forma relativa. Esto nos permite definir la posición inicial del oscilador, el instante en que el tiempo comienza a contar, $t = 0$, como nos convenga más.

La posición y la velocidad están determinadas por:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{y} \quad v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi).$$

Usando la identidad trigonométrica: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, podemos obtener una relación entre $x(t)$ y $v(t)$, válida para todo t :

$$x^2(t) + \frac{v^2(t)}{\omega^2} = A^2 \quad \implies \quad x(t) = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2(t)}{\omega^2}}.$$

De esta última relación se deduce que si *la velocidad es la misma en los puntos P y Q* (Figura [V.4]) entonces $x(t)$ —la proyección sobre el eje horizontal de estos dos puntos—, debe ser simétrica con respecto al origen.

De este resultado se desprende que debemos elegir ϕ de manera que el tiempo empiece a contar cuando el oscilador pasa por el origen: de esta forma las ecuaciones se simplifican. Tomando $\phi = \pi/2$ las expresiones para $x(t)$ y $v(t)$ se transforman en:

$$x(t) = A \sin \omega t \quad \text{y} \quad v(t) = A\omega \cos \omega t.$$

Podemos comprobar directamente que para $t = 0$, $x(0) = 0$ y la velocidad es positiva $v(0) = A\omega$.

Según el enunciado, la distancia entre el punto P y Q es:

$$x(\tau/2) - x(-\tau/2) \equiv a = 2A \sin \omega \tau/2.$$

Donde hemos utilizado la igualdad $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Tenemos una ecuación y dos incógnitas: A y ω .

La siguiente ecuación proviene del dato acerca de la velocidad de retorno por Q. De la Figura [V.4] se deduce que:

$$\omega \tau/2 + \omega \tau/2 + \omega 2\tau = \omega 3\tau = \pi.$$

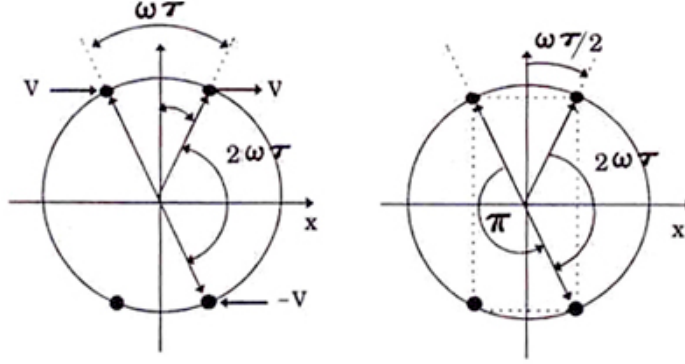


Figura V.4: El gráfico del movimiento circunferencial uniforme señala las condiciones que se han impuesto en la cinemática del problema (izquierda). La simetría del movimiento permite determinar que el ángulo descrito entre los puntos con velocidad v y $-v$, es $\omega 3\tau = \pi$.

Con esta ecuación tenemos el problema resuelto: $\omega = \pi/[3\tau]$ y $A = a/[2\sin(\pi/6)] = a$. La constante ϕ la fijamos al comienzo de la resolución.

$$x(t) = a \sin\left(\frac{\pi}{3\tau} t\right). \quad \square$$

Ejercicio

En el ejemplo anterior y usando sólo igualdades trigonométricas, demuestre que a partir de la condición:

$$v(\tau/2) = -v(\tau/2 + 2\tau) \implies A \cos \omega\tau/2 = -A \cos[\omega(\tau/2 + 2\tau)],$$

se obtiene: $\omega\tau = \pi/3$, sin hacer uso de las propiedades geométricas exhibidas en la Figura [V.4]. $\square$

V.2.2. Oscilaciones pequeñas. Péndulo simple

El caso más representativo de las oscilaciones pequeñas es el de un péndulo simple. Este consiste de una masa m colgando de un hilo o de una barra de masa despreciable y que realiza pequeñas oscilaciones en un campo gravitatorio.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen en este caso (oscilaciones pequeñas), son similares a las de una masa atada a un resorte.

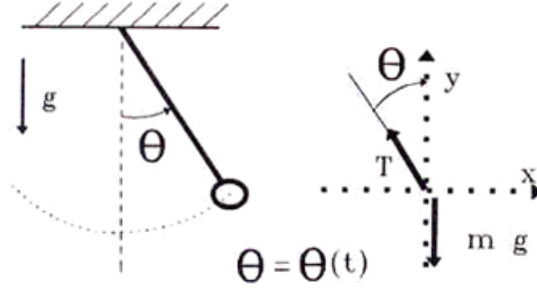


Figura V.5: Una masa m suspendida de una cuerda de largo ℓ , oscila en un campo gravitatorio. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la masa m . El ángulo θ debe ser del orden de 5° para usar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$.

La masa m está restringida a viajar a lo largo de la circunferencia, de manera que su desplazamiento sigue la tangente a la circunferencia en todo instante. Por lo tanto, el elemento de arco recorrido en un intervalo de tiempo por la partícula es:

$$\begin{aligned} \Delta s &\equiv \ell \Delta \theta : \text{ elemento de arco recorrido} \\ &\quad \text{en el intervalo } \Delta t, \\ \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \ell \frac{\Delta \theta}{\Delta t} : \text{ velocidad tangencial de la partícula,} \\ \frac{\Delta \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right]}{\Delta t} &= \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} : \text{ aceleración tangencial de la masa } m. \end{aligned}$$

Donde ℓ es el radio de la circunferencia.

Del diagrama de cuerpo libre (ver Figura [V.5]) se desprende que:

$$T \cos \theta - m g = m a_y, \quad \text{y} \quad -T \sin \theta = m a_x.$$

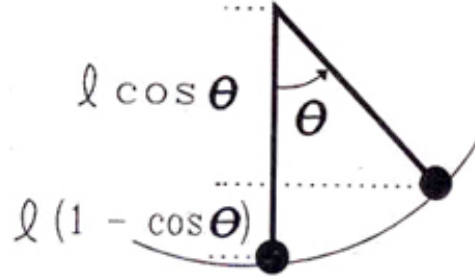
La ecuación de la izquierda es la segunda ecuación de Newton proyectada en la dirección vertical. T proviene de la tensión que ejerce la cuerda sobre la masa m .

La ecuación de la derecha es la proyección sobre el eje horizontal.

El siguiente paso consiste en simplificar las ecuaciones anteriores introduciendo la *aproximación* $\theta \ll 1$, con θ medido en radianes.

De acuerdo al desarrollo en serie de $\cos \theta$ y $\sin \theta$ tenemos: $\cos \theta \approx (1 - \theta^2/2, \dots)$ y $\sin \theta \approx \theta$.

Si despreciamos los términos que contienen θ^2 , esta aproximación es equivalente a que el péndulo se mueva horizontalmente y despreciamos totalmente el movimiento vertical. De hecho, el cambio de altura de la masa m , desde la posición de equilibrio hasta el punto de máxima elongación es $\ell(1 - \cos \theta)$, lo cual dentro del orden de aproximación adoptado aquí es: $\approx \ell \theta^2$, y por lo tanto podemos suponer que el péndulo *no se levanta*.



De aquí se desprende que no hay desplazamiento y, en consecuencia, no hay aceleración en dicha dirección: $a_y \approx 0$ y $a_x \approx a_{\text{tangencial}}$.

Con estas aproximaciones, la segunda ecuación de Newton queda:

$$T - mg = 0, \quad \text{y} \quad T \sin \theta \approx T \theta = m a_{\text{tangencial}},$$

reemplazando la tensión en la ecuación de la derecha y la expresión encontrada anteriormente para la aceleración tangencial en a_x , se tiene:

$$m \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \approx -mg \theta, \quad \text{para valores pequeños del ángulo } \theta. \quad (\text{V.13})$$

Esta última ecuación es del mismo tipo que la ecuación de una masa que oscila unida a un resorte [V.9]. En aquel caso la segunda derivada de la posición, la aceleración, era proporcional a la posición, aquí la segunda derivada del ángulo θ es proporcional al ángulo θ . Matemáticamente son idénticas, sólo necesitamos identificar ω como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

En esta ecuación, T es el período del péndulo. No es la tensión de la cuerda.

La ecuación de movimiento queda descrita por la siguiente fórmula:

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t + \phi). \quad (\text{V.14})$$

donde θ_o es el máximo valor que puede tomar el ángulo θ en su oscilación y ϕ , al igual que en el caso anterior, está relacionado con las condiciones iniciales del péndulo. Esta ecuación es general, abarca todos los casos posibles de un péndulo con oscilaciones pequeñas.

Ejemplo.

A continuación mencionamos tres ejemplos en cuya resolución podemos usar como *modelo aproximado*, un sistema masa–resorte.

- El cable de acero que sostiene un peso en una grúa. Este cable se **estira** debido al peso y podemos modelarlo como un resorte ideal. Igual cosa sucede con el cable de acero que sostiene un ascensor que aparece en la otra Figura. Al comenzar a elevarse recibe un tirón desde el extremo opuesto al ascensor y el cable comienza a oscilar. Es claro que las oscilaciones son pequeñas y se amortiguan debido al roce que existe en todas sus componentes.

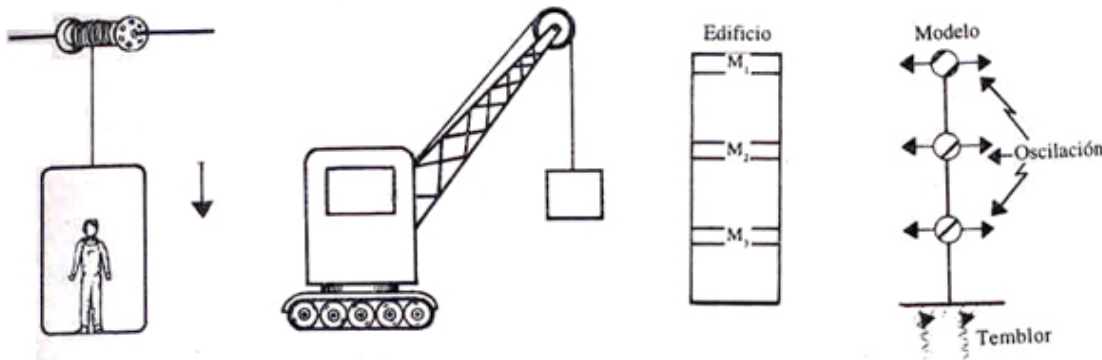


Figura V.6: Algunas estructuras que, al ser modeladas a través de un oscilador armónico, proporcionan información relevante acerca del sistema.

- De la misma forma que un resorte oscila con una frecuencia bien determinada, el sistema de tres partículas de la Figura tiene tres formas naturales de oscilación, cada una asociada con una frecuencia ω diferente.

Un edificio puede ser modelado por este conjunto de masas unidas a una barra común. Las masas, que representan la loza del edificio, experimentan una oscilación transversal como se indica en la Figura.

Existen modelos mucho más sofisticados para representar un edificio, pero éste permite estimar, en orden de magnitud, sus frecuencias propias de oscilación.

Es importante conocer los valores de estas frecuencias puesto que el edificio debe diseñarse de modo que los valores de su frecuencia de oscilación (las frecuencias naturales mencionadas anteriormente), sean diferentes de las frecuencias características observadas en los terremotos ocurridos en la región, con el fin de evitar que comience a oscilar en simpatía con las oscilaciones de la Tierra, aumentando de esta forma su amplitud y terminando por destruirlo.

- Si debemos remolcar un auto averiado, al comienzo se debe actuar lentamente, en caso contrario, si hay movimientos bruscos se corre el peligro de alcanzar la tensión límite de la cuerda que los une.

Esto se debe a que al aplicar una determinada fuerza en forma repentina, la cuerda se estira dos veces más que al realizar la misma operación *en forma lenta*. De esta última forma se evita sobrepasar el límite elástico de la cuerda.

Este resultado lo usan quienes, después de amarrar un paquete, cortan la cuerda dándole un tirón violento. Desde nuestro punto de vista, lo que hacen es aplicar toda su fuerza repentinamente y, además suman toda la energía cinética acumulada con la velocidad de la mano, para gastarla en trabajo y estirar suficientemente el hilo hasta cortarlo.

En el último párrafo usamos los términos: Energía Cinética y Trabajo. En la siguiente sección explicamos el significado físico de estos dos conceptos.

V.3. TRABAJO

Comencemos definiendo en forma matemática el concepto de *trabajo*.

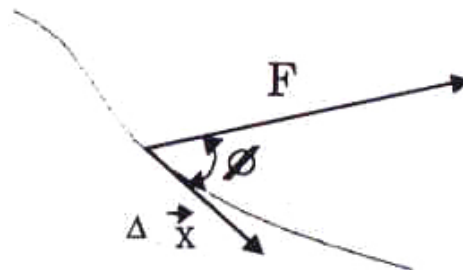
Definición:

El trabajo realizado por una fuerza es el **producto escalar** entre el vector desplazamiento de un punto y la fuerza que actúa sobre dicho punto.

$$W \Big|_x^{x+\Delta x} \equiv \Delta W = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trabajo}}}{\Delta W} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fuerza}}}{\vec{F}(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Desplazamiento}}}{\Delta \vec{x}}$$

Unidad: $[W] = \text{newton} \times m \equiv \text{Joule}$.

El esfuerzo que se debe realizar para arrastrar un objeto sobre una superficie rugosa nos da una idea intuitiva de lo que es el trabajo W .



Veremos en este capítulo, que el trabajo se transforma en energía y viceversa. La simetría entre trabajo y energía se rompe cuando cuando existe *roce*. En este último caso, parte del trabajo realizado sobre el cuerpo se transforma en calor, que también es una forma de energía, pero que no se puede recuperar directamente en forma de trabajo.

Ejemplo

Encontrar el trabajo realizado para trasladar un bloque desde A hasta B , aplicando una fuerza constante F_0 , en la forma como se indica en la Figura.

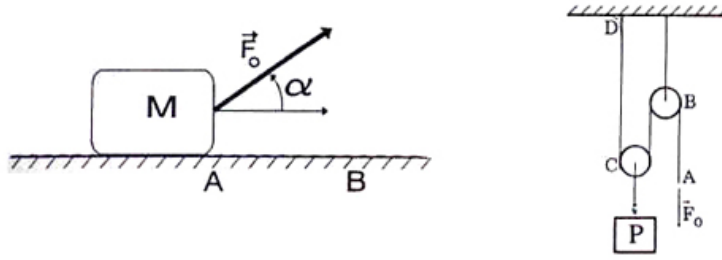


Figura V.7: El trabajo realizado en dos situaciones distintas: un bloque que está siendo desplazado por una fuerza y un objeto que es levantado lentamente mediante un sistema de poleas.

El trabajo realizado para trasladar el objeto hasta B es por definición:

$$W|_A^B = \vec{F}_0 \cdot \Delta \vec{x} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A).$$

$W|_A^B$ es el trabajo realizado por el agente que aplica la fuerza $\vec{F}_0$ sobre el objeto. Recordemos que $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$:

$$W|_A^B = |\vec{F}_0| \cdot |(\vec{x}_B - \vec{x}_A)| \cdot \cos \alpha.$$

Trabajo es lo mismo que energía. Ambos se confunden. Por ejemplo si la masa M estaba inicialmente en reposo, se acelera debido a la fuerza F_0 y adquiere otra forma de energía: la energía cinética.

Otra forma de energía es el calor que se manifiesta en el aumento de temperatura entre las superficies en contacto de dos cuerpos que se deslizan uno sobre otro. No es posible recuperar esta forma de energía. Este hecho establece una diferencia importante con la energía cinética, puesto que esta última es posible recuperarla realizando trabajo sobre otro objeto, por ejemplo empujando a otro bloque o, como se señaló al final de la sección anterior utilizándola para cortar un hilo en el empaque de una tienda. En este

último caso, el empleado le comunica velocidad a su mano y se la aplica repentinamente al hilo, éste se estira, sobrepasa su límite elástico (si el impulso inicial es suficiente) y el hilo se corta.

Ejemplo

En el sistema de poleas de la Figura, calcule el trabajo realizado al desplazar el extremo A una distancia ℓ . El peso de la polea C es P , y no existe roce entre ninguno de los elementos del sistema.

Esta configuración ilustra el principio de funcionamiento de las grúas.

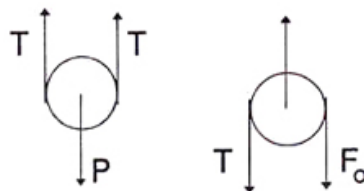
En este mecanismo existe una *conservación del trabajo* que nos conducirá al descubrimiento de la conservación de la energía más adelante. La energía tiene las mismas dimensiones que el trabajo y puede adquirir distintas formas, como energía cinética (asociada al movimiento), energía potencial (asociada a la posición), calor y otras.

Estudiemos la estática del sistema de poleas más simple: incluye sólo dos de ellas.

En esta configuración no existe roce en las poleas. La polea B está fija al techo, mientras que C puede subir o bajar.

Analicemos el equilibrio de este sistema haciendo los diagramas de cuerpo libre relevantes:

$$\begin{aligned} 2T &= P, & T &= \frac{1}{2}P \\ F_0 &= T = \frac{1}{2}P \\ F_0 &= \frac{1}{2}P \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$



En resumen, para soportar el peso P sólo se necesita aplicar una fuerza $F_0 = P/2$. Para disminuir aún más la fuerza, basta multiplicar el número de vueltas de la cuerda sobre las poleas. La regla para encontrar el valor de la fuerza requerida en este caso es:

$$F_0 = \frac{P}{n},$$

donde n es el número de cuerdas que resisten el peso, sin contar la cuerda donde F_0 actúa directamente. El caso estudiado corresponde a $n=2$. En resumen, un niño puede levantar un peso tan grande como quiera, usando el número adecuado de poleas, o el número correcto de vueltas de la cuerda sobre un par de poleas.

Estudiemos este mismo problema desde el punto de vista del trabajo. Volvamos al sistema más simple de poleas. Si están en equilibrio, un pequeño empujón desplazará el punto A hacia abajo (por elegir una dirección).

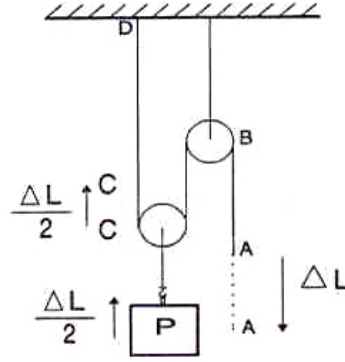
$$W_A = F_0 \cdot \Delta x_A = \frac{1}{2} \omega_0 \Delta x_A \quad (\text{Trabajo efectuado en } A)$$

$$W_C = P \cdot \Delta x_C = ? \quad (\text{Trabajo efectuado en } C)$$

¿Cómo se relaciona Δx_C con Δx_A ?

Se puede ver que si A baja una distancia $\Delta \ell$, C sube $(\Delta \ell/2)$, puesto que C se ubica justo en el punto medio de cada una de sus ramas $\overline{CD}$ y $\overline{CB}$ y el largo de la cuerda $B\overline{CD}$ se ha acortado en $\Delta \ell$.

$$W_C = P \frac{1}{2} \Delta x_A = W_A \Rightarrow W_C = W_A \quad (\text{V.16})$$



El trabajo efectuado sobre el punto A y aquél sobre el punto C , es el *mismo*. Como el desplazamiento en A es el doble, la fuerza necesaria es la mitad del peso P .

Este es un fenómeno similar a la multiplicación de fuerzas que se verifica con las *palancas*. Estudiaremos este caso al introducir el torque, más adelante.

V.3.1. Cálculo del trabajo realizado por un resorte

Esta conservación del trabajo que encontramos en el ejemplo anterior no es un resultado casual, es una ley de conservación que se cumple cuando no existe roce.

El caso de un resorte es más complejo porque la fuerza depende de su alargamiento. Sin embargo, veremos a continuación que es posible resolver este problema con herramientas matemáticas ya conocidas.

Ejemplo

¿Cuál es el trabajo necesario para alargar *lentamente* un resorte? Suponga que el resorte descansa sobre una mesa sin roce, de manera que sólo actúa su fuerza de restitución.

La ley de fuerza es $F(x) = -kx$, donde x indica la variación de la longitud del resorte medida a partir de su largo natural.

Suponemos que al alargar el resorte lo hacemos en la misma dirección de su longitud y por lo tanto el problema es unidimensional y no necesitamos usar explícitamente vectores.

Lo novedoso en este problema radica en la dependencia de la fuerza en la posición y, por lo tanto, para calcular el trabajo es necesario sumar pequeños desplazamientos y en cada uno de ellos usar un valor *constante* de la fuerza, que represente su valor promedio en dicho intervalo.

De esta forma, el trabajo necesario para dar un pequeño desplazamiento al resorte es:

$$\begin{aligned} \Delta W &= F(x) \Delta x, \\ &\quad \uparrow \\ &F(x) = +kx. \end{aligned}$$

El signo (+) de la segunda línea de la última ecuación, se debe a que estamos calculando el trabajo que realiza el *agente externo*, que estira el resorte y que a cada instante debe aplicar una fuerza *contraria* a la fuerza con que el resorte se resiste a ser alargado.

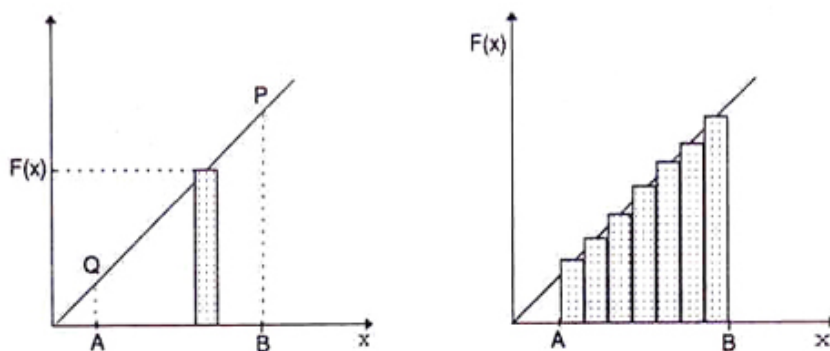


Figura V.8: El trabajo realizado es igual al área encerrada bajo la curva de $F(x)$ por Δx alrededor del punto x . El valor medio de $F(x)$ asociado a cada uno de los intervalos Δx lo representamos, en este caso, por el valor de $F(x)$ evaluado en el punto medio del intervalo.

Si estiramos (*lentamente*) el resorte desde A hasta B el trabajo total será:

$$\begin{aligned}
\Delta W|_A^B &= \sum_{x_A}^{x_B} \Delta x_i F(x_i) = \text{Area bajo el trapecio ABPQ}, \\
&= (AB) \cdot \left\{ k x_A + \frac{1}{2} k(x_B - x_A) \right\}, \\
&\quad \downarrow \quad \downarrow \\
\Delta W|_A^B &= (x_B - x_A) \cdot \frac{k}{2} (x_A + x_B) = \frac{1}{2} k x_B^2 - \frac{1}{2} k x_A^2. \\
\Delta W|_A^B &= \frac{1}{2} k (x_B^2 - x_A^2). \tag{V.17}
\end{aligned}$$

Este resultado se puede obtener sumando cada uno de los trapecios desde A hasta B. Es un proceso más largo, sin embargo es de utilidad porque es una forma de enfrentar los casos donde la función $f(x)$ no es una línea recta.

Sumemos cada uno de estos términos:

$$W|_A^B = \sum_A^B (k x_i) \cdot \Delta x_i = k \sum_{n=1}^N \left[x_A + \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta \right] \Delta,$$

donde el significado de cada uno de los signos se detalla a continuación:

$$\begin{aligned}
\Delta x_n &\equiv x_{n+1} - x_n = \Delta, & \text{constante,} \\
x_n &= x_A + \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta, \\
x_{n+1} &= x_A + \left(n + 1 - \frac{1}{2} \right) \Delta.
\end{aligned}$$

en el gráfico, $k x_i$ representa la altura del rectángulo cuya base es Δ . De paso mencionamos que conviene usar el valor $x_n = x_A + \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta$ para la altura, puesto que de esta forma el resultado obtenido para el área será el valor exacto, sin aproximaciones.

$$\begin{aligned}
W|_A^B &= k \left[\sum_{n=1}^N x_A \right] \Delta + \Delta^2 \left[\sum_{n=1}^N n \right] - \Delta^2 \left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} \right) \right], \\
&= k \left\{ N \Delta x_A + \Delta^2 (N+1) \frac{N}{2} - \Delta^2 \frac{N}{2} \right\},
\end{aligned}$$

pero $\Delta \cdot N \equiv [x_B - x_A]$, y tomando el límite $\Delta \rightarrow 0$ simultáneamente con $N \rightarrow \infty$, de forma que el producto de ambas cantidades permanezca constante e igual al valor ya indicado, se tiene:

$$W|_A^B \equiv W_A^B = k \left\{ x_A (x_B - x_A) + \frac{1}{2} (x_B - x_A)^2 + 0 - 0 \right\}.$$

$$W|_A^B = k x_A (x_B - x_A) + \frac{k}{2} (x_B^2 - 2 x_B x_A + x_A^2),$$

y finalmente reobtenemos el mismo valor de la ecuación [V.17],

$$W_A^B = \frac{1}{2} k (x_B^2 - x_A^2). \quad (\text{V.18})$$

Esta expresión representa el trabajo realizado para estirar lentamente un resorte desde x_A hasta x_B . El trabajo puede ser positivo (el agente externo debe realizar el trabajo) o negativo (si el resorte arrastra lentamente al agente externo). El signo depende del valor relativo de x_A y x_B .

V.4. ENERGIA

Estirar un resorte lentamente *no* es, sin duda, un proceso natural. Es sólo un truco que nos ha servido para tratar un problema por partes, comenzando por la más simple. Veamos ahora que sucede si estiramos un resorte y luego lo soltamos, de modo que el sistema oscile libremente. En este caso, la segunda ley de Newton $F = m a$ debe cumplirse en cada instante y, *suponemos*, que la expresión $F = -k x$, sigue siendo válida aun cuando fue descubierta al estirar el resorte *lentamente*. Si los resultados teóricos obtenidos con esta suposición coinciden con lo que se observa al realizar el experimento bajo estas otras condiciones, ésta aproximación es considerada aceptable. Dentro del error experimental, las observaciones *coinciden* con los resultados teóricos obtenidos a partir de esta suposición.

De esta forma, la segunda ley de Newton se escribe:

$$\begin{aligned} m a &= -k x \\ m \frac{\Delta v}{\Delta t} &= -k x. \end{aligned}$$

Esta ecuación nos dice que la aceleración de la masa en cada punto de la trayectoria depende de la coordenada x de dicho punto, $a = a(x)$.

Para resolver este problema, continuamos con el mismo procedimiento empleado al calcular el trabajo necesario para estirar un resorte *lentamente*. Multiplicamos ambos lados de la última ecuación por el desplazamiento Δx que ocurre en el punto x y sumamos esta expresión a lo largo de la trayectoria. Escribimos la aceleración como $a \equiv \Delta v / \Delta t$.

La suma se lleva a cabo entre dos puntos arbitrarios de la trayectoria: x_B y x_A :

$$m \sum_{x_B}^{x_A} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta x = (-1) k \left(\sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta x \right), \quad (\text{V.19})$$

como todo estos intervalos $\Delta t, \Delta x$, son muy pequeños pero finitos, podemos intercambiar el orden,

$$m \cdot \left[\sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = -k \sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta x,$$

usando $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, y asociándolo con la velocidad en el punto medio del intervalo v_n y v_{n-1} ,

$$m \cdot \left[\sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot v \right] = -k \sum_{x_B}^{x_A} x \cdot \Delta x.$$

Los resultados de esta sumatoria no pueden depender del nombre asignado a las variables. Por lo tanto, la sumatoria de los términos $v \cdot \Delta v$, debe dar el mismo resultado que el obtenido en la sumatoria [V.17], donde aparece $x \cdot \Delta x$. En ambos casos se calcula el área bajo una línea recta (ver Figura).

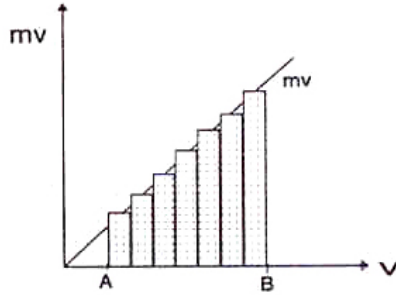


Figura V.9: En este caso, $m \cdot v$, corresponde al eje vertical (ordenada) y la velocidad v , cuyos valores se marcan en el eje horizontal (abcisa). El área bajo la recta es claramente el área del trapecio sombreado de la Figura.

La operación donde se reemplazó la aceleración por $\Delta v / \Delta t$, tenía precisamente este objetivo: transformar una sumatoria cuyo valor no conocíamos, en otra que nos era familiar. El resultado es:

$$\sum_{x_B}^{x_A} \Delta v \cdot v = \frac{1}{2} (v_A^2 - v_B^2). \quad (\text{V.20})$$

Reemplazando a la izquierda de la igualdad esta última expresión y a la derecha de la igualdad el resultado de la ecuación [V.17], tenemos:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -\frac{1}{2} k x_A^2 + \frac{1}{2} k x_B^2.$$

Agrupando los términos con el mismo subíndice a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k x_B^2 \quad (\text{V.21})$$

A la izquierda de la ecuación tenemos una cantidad evaluada en el punto x_A , y a la derecha, tenemos *la misma expresión* pero ahora evaluada en el punto B. El signo igual nos señala que la suma de los dos términos ubicados a la izquierda de la igualdad tienen el mismo valor, donde quiera que esta suma se evalúe, puesto que el punto A y el punto B son arbitrarios.

La expresión que se repite en ambos lados de la igualdad se denomina ENERGIA. Al evaluar esta expresión en cualquier punto de la trayectoria se obtiene el mismo número: es una cantidad conservada, no cambia su valor:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2, \quad (\text{V.22})$$

El primer término se denomina energía cinética y el segundo, energía potencial del resorte. La suma de ambos permanece constante durante el movimiento.

Existe entonces una componente de la energía proveniente del movimiento, la energía cinética y una energía debida al estiramiento del resorte, la energía potencial.

Ambas pueden ser transformadas en trabajo. Por ejemplo, al martillar un clavo estamos transformando la energía cinética del martillo en el trabajo que se requiere para hundir el clavo en la madera. De igual forma, se puede comprimir un resorte para que al liberarlo imprima una cierta velocidad a una masa. Eventualmente esta energía puede transformarse en trabajo en la forma indicada.

Si son equivalentes entonces la *Energía* debe tener las dimensiones de *Trabajo*, es decir:

$$[\text{Energía}] \quad \equiv \quad [fuerza] \times [distancia] \quad \equiv \quad [\text{newton} - m].$$

Con la letra $\mathbf{T} \equiv m v^2/2$ designamos a la energía cinética y la letra $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} k x^2$ señala la energía potencial. La conservación de la energía se escribe como:

$$E = T + V.$$

Ejemplo

Dos masas M y m descansan sobre un piso sin roce y están *apoyadas* (no unidas) al resorte de constante k y largo natural L_0 .

Inicialmente el resorte se comprime un largo x_0 manteniendo las masas pegadas a su extremo. Repentinamente se libera el sistema y las masas M y m salen disparadas en direcciones opuestas.

Calcular la velocidad final de cada una de las masas.

Como no existe roce en el piso y se trata de un resorte ideal, se conserva la energía.

Nota: El peso *no* realiza trabajo, porque:

$$\Delta W|_A^B = M \vec{g} \cdot \Delta \vec{x} = 0, \quad \text{puesto que,}$$

$$\Delta \vec{x} \cdot \vec{g} = |\Delta \vec{x}| \cdot |\vec{g}| \cos 90^\circ = 0.$$

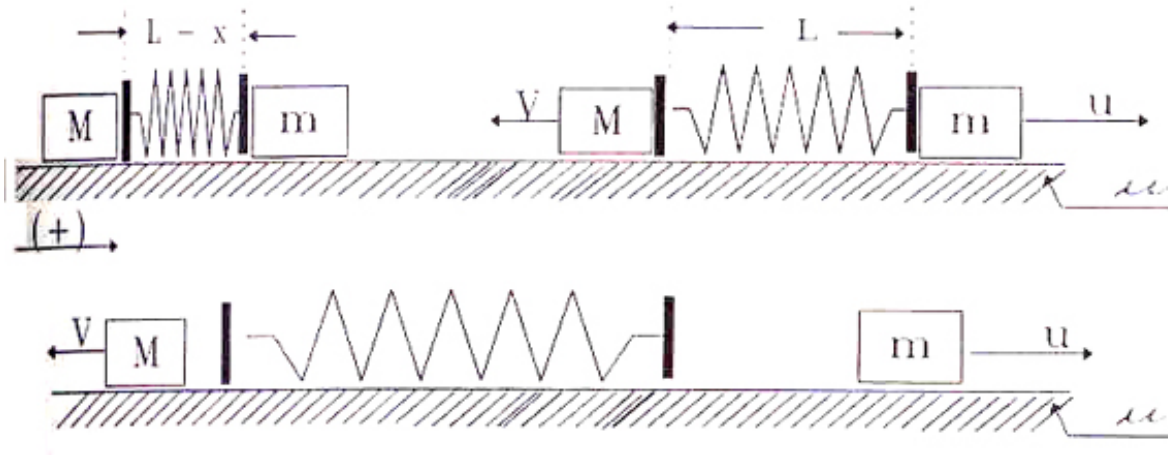


Figura V.10: El resorte está inicialmente comprimido, al soltarlo empuja ambas masas con la misma fuerza, por lo tanto aquella con menor masa adquiere más velocidad. El resorte y las placas que empujan a la masa tienen una masa despreciable comparada con m y M .

De esta forma, aquí co-existen sólo dos tipos de energía, la energía cinética de cada una de las masas M y m y la energía potencial del resorte.

Si la energía del sistema se conserva, debemos calcularla en algún instante en que sea particularmente fácil.

En este caso conviene evaluar la constante E_0 , justo en el momento en que se liberan las masas. Su valor es:

$$E_i = \frac{1}{2}k \cdot x_0^2 = E_0,$$

ya que en ese instante ambas están en reposo. Como E_0 se conserva a lo largo de la trayectoria, es válido considerar el otro punto de referencia donde más nos convenga. Este punto resulta ser el instante cuando el resorte adquiere por primera vez su largo natural L_0 . En ese punto los extremos del resorte tienen su máxima velocidad, puesto que en el instante siguiente el largo será mayor que el natural y aparece instantáneamente una fuerza $(-kx)$ que comienza a frenar el extremo del resorte. Por otra parte las masas M y m *no están atadas* al resorte y por lo tanto una vez que adquieren la velocidad máxima del resorte, *continúan* con la misma velocidad, porque no hay roce con el piso.

En el instante en el cual el resorte alcanzó su largo natural L_0 la energía E_f es [V.17]

$$E_f = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m u^2 + 0, \text{ pero como:}$$

$$E_i = \frac{1}{2} k x_0^2,$$

$$\text{y la energía se conserva} \Rightarrow E_i = E_f,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m u^2.$$

Tenemos dos incógnitas V y u , y una sola ecuación. La otra ecuación que necesitamos proviene de la segunda y tercera ley de Newton. En la dirección horizontal se cumple:

$$M \frac{\Delta V}{\Delta t} = F_1, \quad \text{segunda ley de Newton para la partícula M,}$$

$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = F_2, \quad \text{segunda ley de Newton para la partícula m,}$$

$$m_{\text{resorte}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_1 - F_2, \quad \text{segunda ley de Newton para el resorte.}$$

En la última ecuación, pusimos $-F_1$, y $-F_2$, como las fuerzas actuando sobre el resorte, utilizando el principio de acción y reacción en cada uno de los puntos de contacto con las masas m y M .

Como la masa del resorte es despreciable comparada con las masas m y M , esta última ecuación se transforma en:

$$0 \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \equiv 0 = F_1 + F_2.$$

Sumando las dos ecuaciones de movimiento de m y M y reemplazando este último resultado, obtenemos:

$$M \frac{\Delta V}{\Delta t} + m \frac{\Delta u}{\Delta t} = 0.$$

Como esta ecuación es válida en todo instante, designemos A y B como dos instantes de tiempo arbitrarios, con $\Delta t = t_B - t_A$, entonces:

$$M \frac{[V_B - V_A]}{\Delta t} + m \frac{[u_B - u_A]}{\Delta t} = 0,$$

$$M [V_B - V_A] + m [u_B - u_A] = 0, \quad \text{ordenando,}$$

$$M V_B + m u_B = M V_A + m u_A, \quad \text{para cualquier punto A y B,}$$

de este modo se tiene que:

$$M V + m u = \text{constante.}$$

Como en nuestro caso, ninguna de las masas tenía velocidad en el instante inicial, entonces la constante es igual a cero:

$$M V + m u = 0.$$

Esta es la segunda ecuación que necesitábamos para resolver el problema.

Nota:

Este es un resultado general y como tal tiene un nombre: se denomina *conservación del momentum*. Cada vez que no existan fuerzas externas actuando sobre el sistema, la siguiente expresión permanece constante:

$$\sum_{i=1}^N M_i V_i = \text{constante}, \quad (\text{V.23})$$

M_i identifica a cada una de las masas del sistema y V_i su velocidad respectiva. $\square$

Volviendo a nuestro problema inicial, los datos eran: M , m , x_0 y k , las incógnitas V

y v . Disponemos de dos ecuaciones:

$$M V^2 + m u^2 = k x_0^2, \quad (1)$$

$$M V + m u = 0. \quad (2)$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones se obtiene:

$$u = \pm \sqrt{\frac{M}{m(M+m)}} k x_0^2, \quad (V.24)$$

$$V = \mp \sqrt{\frac{m}{M(M+m)}} k x_0^2. \quad (V.25)$$

Si u se desplaza en el sentido positivo del eje horizontal, entonces V se mueve en el sentido negativo. De esta forma elegimos los signos correspondientes a cada uno de los movimientos de M y m .

Podemos verificar estos resultados comparando con una situación real de la vida diaria: supongamos que la masa M es muy grande, por ejemplo, que este ejercicio representa en realidad un resorte apoyado en una pared de masa M , en cuyo extremo opuesto hemos comprimido una masa m . Por experiencia sabemos que al soltar el resorte la masa m sale disparada y M se queda en su mismo lugar. En las ecuaciones, este caso se representa como $M \rightarrow \infty$. Reemplazando este valor en las expresiones de la velocidad tenemos:

$$u^2 \approx \frac{1}{m} k x_0^2, \quad V^2 \approx \frac{m}{M^2} k x_0^2 \approx 0.$$

V.4.1. Gráfico de la energía de un oscilador armónico

En muchos modelos físicos se supone que el potencial depende exclusivamente de las coordenadas espaciales. Si este es el caso, entonces podemos graficar el potencial en función de estas coordenadas y de esta forma, obtener directamente algunas propiedades del movimiento sin necesidad de resolver las ecuaciones.

Para un oscilador armónico, la ecuación de la energía es:

$$E_0 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

$$E_0 = V(x) + T, \quad \text{donde:}$$

$V \equiv$ Energía Potencial,

$T \equiv$ Energía Cinética.

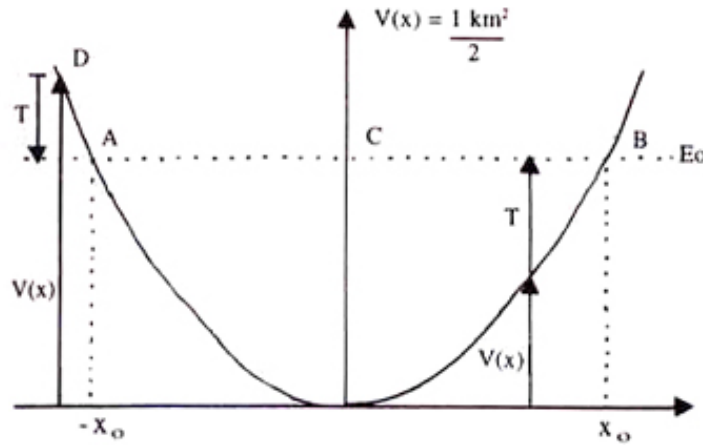


Figura V.11: Por convención la flecha de la energía cinética *siempre* debe apuntar en el sentido positivo de la ordenada $V(x)$. La energía potencial puede ser positiva o negativa.

Como la energía E_0 es constante, la diferencia $[E_0 - V(x)]$ nos da el valor de T , la energía cinética del sistema. En los puntos donde T se hace cero, sabemos que el cuerpo está momentáneamente en reposo. En el caso del oscilador armónico, este punto marca el cambio de sentido en la dirección de su movimiento.

Donde $V(x)$ es un mínimo, T es un máximo y allí el cuerpo adquiere su máxima velocidad.

En los puntos A y B del gráfico $V(+x_0) = V(-x_0) = E_0$, la energía cinética se anula y el cuerpo permanece momentáneamente en reposo. En este caso A y B corresponden a los puntos de máxima elongación y compresión del resorte.

$$V(x_0) = V(-x_0) = E_0 \Rightarrow T = 0 \begin{cases} v_A = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$$

En el punto C , $V(0) = 0 \Rightarrow E_0 = T \Rightarrow v_C = v_{\max}$.

La partícula *no* puede alcanzar el punto D porque allí la energía cinética es negativa. Al dibujar las flechas correspondientes en ese punto, vemos que la única posibilidad de cumplir la ecuación de la energía $E = T + V$ es que T sea negativo, lo que está prohibido en este contexto, puesto que implicaría una velocidad imaginaria.

$$T < 0, \quad T = \frac{1}{2} m v_D^2 < 0,$$

como $m > 0 \Rightarrow v_D^2 < 0$, lo que constituye una contradicción puesto que la velocidad en cada punto debe ser un número real.

V.5. TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE ROCE

Estudiaremos el efecto de las fuerzas de roce sobre el movimiento de la partícula. Incluyendo la fuerza de roce en la ecuación [V.19], se tiene:

$$m \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta x = (-1)k \left(\sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} x \cdot \Delta x \right) - \sum_{x_{\text{inicial}}}^{x_{\text{final}}} f_{\text{roce}} \cdot \Delta x, \quad (\text{V.26})$$

realizando la suma de la misma forma que se hizo anteriormente y definiendo:

$$W_i^f \equiv \sum_{x_i}^{x_f} f_{\text{roce}} \cdot \Delta x, \quad \text{se tiene:}$$

$$T_f - T_i = -[V_f - V_i] - W_i^f, \quad \text{y ordenando los términos:}$$

$$W_i^f = E_i - E_f. \quad (\text{V.27})$$

La energía *no* es una constante de movimiento bajo estas circunstancias. La diferencia en el valor de la energía inicial y final es igual al trabajo realizado por la fuerza de roce. Este trabajo se transforma en calor y no es posible reincorporarlo a los cuerpos en la forma de energía cinética o potencial.

En estos casos, el roce permanentemente degrada la energía mecánica, transformándola en calor. Este es un proceso irreversible, el calor no se puede transformar directamente en energía mecánica. En consecuencia, la energía final –la suma de la energía cinética y potencial–, será menor que la energía total inicial.

Ejemplo

Una masa m se encuentra a una distancia D del extremo de un resorte de constante k que, por simplicidad, suponemos que tiene masa nula. La masa m se desliza por un piso horizontal cuyo coeficiente de roce cinético es μ_c y el de roce estático es μ_e .

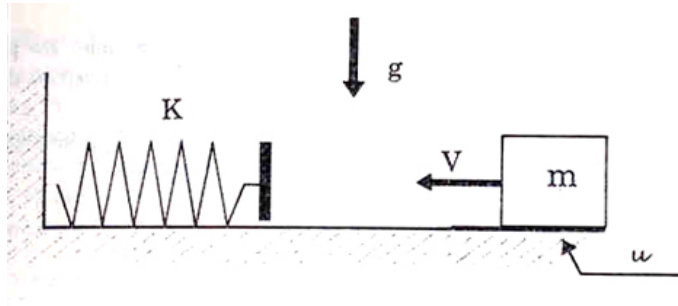


Figura V.12: El resorte está inicialmente con su largo natural y la masa m se acerca con velocidad V . La energía no se conserva debido a la existencia de roce entre el piso y la masa. La energía disipada es igual al trabajo que realiza la fuerza de roce.

a) Suponga que la masa m tiene una velocidad V cuando se encuentra a la distancia D del extremo del resorte. Calcule el acortamiento del resorte, suponiendo que la velocidad V es suficiente para alcanzar a comprimirlo.

b) ¿Qué valor debe tener la velocidad V para que debido a la fuerza de roce, m se detenga justo al tocar el resorte?

c) Calcule el valor de V para que la masa m se detenga justo en el momento que el resorte alcanza su máxima compresión.

a) La energía del resorte en el momento de su máxima compresión es:

$$E_{\text{compresión}} = \frac{1}{2} k x^2,$$

y la energía inicial de la partícula m : $E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} m V^2.$

La diferencia entre estas energías corresponde al trabajo realizado por la fuerza de roce que transforma la energía mecánica en energía calórica. Este trabajo es el siguiente:

$$\sum_A^B (-f_{\text{roce}} \cdot \Delta x) = E_f - E_i,$$

ordenando los términos y definiendo:

$$W_{\text{fricción}} \equiv \sum_A^B (f_{\text{roce}} \cdot \Delta x), \quad \text{llegamos a:}$$

$$W_{\text{fricción}} = [\mu_c m g][x + D] = E_{\text{inicial de } m} - E_{\text{compresión}}.$$

Si reemplazamos las expresiones correspondientes a cada una de las energías se llega a una ecuación de segundo grado para la incógnita x :

$$x^2 + \frac{2\mu_c m g}{k} x - \frac{2}{k} \left[\frac{1}{2} m V^2 - \mu_c m g D \right] = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{\mu_c m g}{k} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{k}{(\mu_c)^2 m g^2} (V^2 - 2\mu_c g D)} \right].$$

De acuerdo a la convención de signos usada (ver Figura), x debe ser positivo para representar al resorte comprimiéndose, por lo tanto sólo el signo positivo del paréntesis cuadrado tiene sentido físico y es la respuesta buscada.

b) Si queremos usar el resultado anterior entonces debemos imponer que una de las raíces de la ecuación cuadrática en x sea nula. Esto se logra si:

$$(V^2 - 2\mu_c g D) = 0.$$

La explicación física de este resultado es la siguiente: toda la energía cinética de la masa m se disipó al recorrer la distancia D que la separa del extremo del resorte. Esto se puede verificar directamente escribiendo la ecuación correspondiente y comprobando que se obtiene el mismo resultado:

$$W_{\text{fricción}} \equiv [\mu_c m g] \cdot [x + D] = E_{\text{inicial de m}} \equiv \frac{1}{2} m V^2.$$

Si ponemos $x=0$, obtenemos V .

c) En este caso, el resorte comenzó a comprimirse desacelerando la masa m . Logró detenerla comprimiéndose una distancia tal, que la fuerza de restitución del resorte en esa posición, es menor que la fuerza de roce estático necesaria para poner en movimiento, nuevamente, a la masa m . En el caso crítico, se comprime lo suficiente como para igualar el máximo valor de la fuerza de roce estático.

La ecuación extra que debemos imponer es, entonces, la correspondiente al equilibrio estático:

$$k x_{\text{crítico}} = \mu_e m g,$$

reemplazando este valor en la expresión de x , obtenemos la velocidad V :

$$V^2 = \mu_c g D \left[2 + \frac{m g \mu_e}{k D} \left(2 + \frac{\mu_e}{\mu_c} \right) \right]. \square$$

Este valor de la velocidad corresponde al que produce un máximo de compresión del resorte. Es claro que el resorte pudo haberse detenido antes con el mismo resultado:

quedarse estático en dicha posición debido a que la fuerza de restitución del resorte es menor que el máximo de la fuerza de fricción del piso.

Este resultado se puede leer en la última ecuación: allí el término $2\mu_c g D$ corresponde al valor de la velocidad para la cual el resorte no alcanza a comprimirse. El término extra representa el máximo valor *adicional* que puede tener V^2 antes de comprimir el resorte más allá de lo que puede resistir el roce estático.

Cualquier valor de V^2 entre ambos límites produce el mismo efecto: el resorte se detiene después de comprimirse,

$$2\mu_c g D < V^2 < 2\mu_c g D + \frac{m g^2 \mu_e \mu_c}{k} \left(2 + \frac{\mu_e}{\mu_c} \right). \square$$

En este último ejemplo no hemos analizado lo que sucede al ponerse en contacto la masa m con el extremo del resorte. Como la masa trae una cierta velocidad y el resorte está en reposo, lo que ocurre es un *choque* entre estos dos objetos. Como se estableció que la masa del resorte era despreciable, bajo esas circunstancias no hay nada que analizar. Sin embargo, una masa finita para la placa ubicada al final del resorte, cambia el problema y, en ese esquema, debemos analizar más cuidadosamente el problema. Este tipo de fenómenos, que incluyen choques, lo estudiaremos en una sección posterior.

V.6. OSCILADOR EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Estudiemos ahora el caso de un sistema masa-resorte que oscila verticalmente incorporando además la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa m . La ecuación de movimiento es,

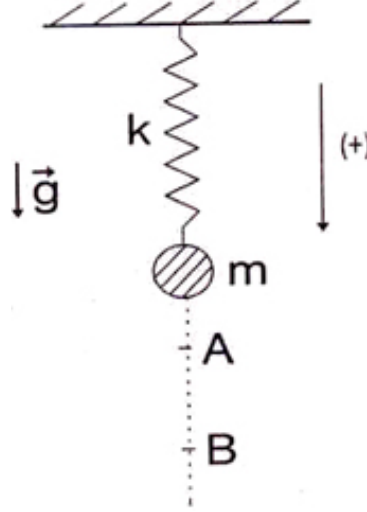
$$\sum F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Tomando como positivo el sentido que apunta hacia el centro de la Tierra, tenemos:

$$+m g - k x = m \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (+) \downarrow \quad (\text{V.28})$$

Repitiendo el mismo proceso usado anteriormente: multiplicar cada uno de los miembros de esta ecuación por Δx_i y posteriormente sumar estas expresiones a lo largo de la trayectoria, (es decir, integrar las ecuaciones de movimiento), obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_A^B (+m g \Delta x_i - k x_i \Delta x_i) &= \\ &= \sum_A^B m \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \Delta x_i \end{aligned}$$



En esta última ecuación, el primer término establece el trabajo que realizan las fuerzas externas sobre la masa. A la derecha de la igualdad aparece la energía cinética de la masa m . Para ponerla en la forma usual, [V.22], necesitamos trabajar un poco.

Reescribiendo la sumatoria y usando los resultados obtenidos en [V.22] tenemos:

$$+m g \sum_A^B \Delta x_i - \frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - m v_A^2, \quad (\text{V.29})$$

La sumatoria del primer término es fácil de evaluar, la suma de los Δx_i es el camino total recorrido: $(x_B - x_A)$. Incorporando este resultado, se tiene:

$$+m g x_B - m g x_A - \frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2.$$

Reordenando en la forma usual, es decir, todos los términos con el mismo índice en el mismo lado de la ecuación, llegamos a:

$$-m g x_A + \frac{1}{2} k x_A^2 + \frac{1}{2} m v_A^2 = -m g x_B + \frac{1}{2} k x_B^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

Energía	Energía	Energía
Potencial	Potencial	Cinética
Gravitacional	Resorte	

Vemos que la suma de la energía potencial del campo gravitacional, la energía potencial del resorte más la energía cinética de la masa m toma el mismo valor en cualquier punto

de la trayectoria. Ya sabemos que esta propiedad es precisamente una ley de conservación. Indica que hay una cantidad E_0 , que no varía a lo largo de la trayectoria:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \text{constante.} \quad (\text{V.30})$$

Hemos derivado la expresión que toma la conservación de la energía para el caso de un resorte oscilando en un campo gravitacional uniforme. Esta fórmula se obtuvo tomando el eje vertical como positivo cuando apunta hacia el centro de la Tierra. Al definir el sentido opuesto como positivo, sólo debe cambiar el signo frente al término mgx .

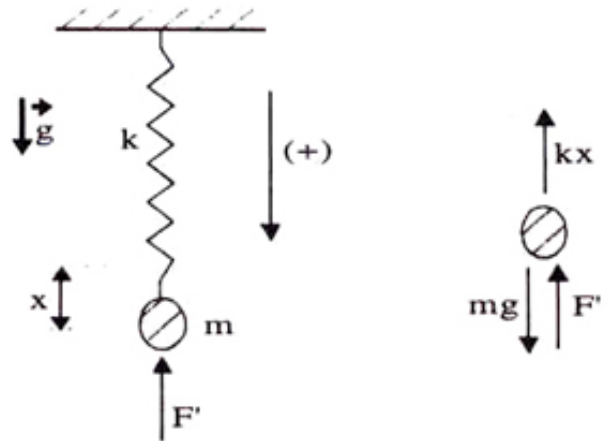
Ejemplo

Mencionamos la diferencia que existe entre soltar súbitamente una masa que cuelga de un resorte y depositarla suavemente de forma que no quede oscilando. En este último caso es fácil encontrar la elongación máxima del resorte, se trata de aplicar una fuerza F' (por parte de la persona que coloca la masa) de forma que mantenga un pequeño desequilibrio del sistema en cada punto.

A continuación calculamos la elongación máxima en las dos situaciones usando el método de la energía.

a) Caso en que la masa se deposita **lentamente** en el resorte.

El resorte tiene inicialmente su largo natural y depositamos la masa m aplicando una fuerza F' que sea un poco menor que el peso de la masa m . Con esto el resorte se estira un poco para aportar la fuerza que falta, enseguida, se disminuye la fuerza F' aplicada, de esta forma el resorte necesita alargarse un poco más para soportar la masa y así el proceso se vuelve a repetir hasta que la fuerza que aporta el resorte cancela exactamente el peso del objeto que se ha colgado.



En ese instante el sistema está en equilibrio, y se cumple:

$$mg - kx_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}. \quad (\text{V.31})$$

Esta es la elongación máxima alcanzada si la masa se deposita suavemente.

b) Veamos cuál es la elongación máxima del resorte si, estando inicialmente en reposo con su largo natural, unimos la masa m a su extremo y la soltamos súbitamente.

Designamos como origen de coordenadas al punto extremo del resorte en el instante que éste adopta su largo natural.

En el instante $t = 0$, justo cuando *soltamos* la masa, su *velocidad es nula* y también su coordenada x , $x(t = 0) = 0$, puesto que el resorte aún no comienza a alargarse. (Si le hubiésemos dado un impulso inicial, su velocidad sería distinta de cero en ese instante). Su aceleración no es nula y por lo tanto en un instante posterior comenzará a moverse.

Al soltar la masa m el sistema comienza a oscilar y no hay disipación de energía por efecto del roce, por lo tanto E_0 se conserva en la forma que aparece en la ecuación [V.30].

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx, \quad (\text{V.32})$$

Al evaluar E_0 en $t = 0$, obtenemos:

$$E_0 = 0 + 0 - 0 = 0,$$

de forma que en cualquier otro instante:

$$E_0 = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx. \quad (\text{V.33})$$

Nos interesa el punto de elongación máxima, porque allí se *detiene* momentáneamente el resorte, y entonces $v(x = x_{\text{máximo}}) = 0$.

$$0 = \frac{1}{2}k\bar{x}_0^2 - mg\bar{x}_0 \quad \bar{x}_0 \equiv \text{elongaciones extremas del resorte,}$$

$$0 = \bar{x}_0(\bar{x}_0 - 2\frac{mg}{k}), \rightarrow \text{Se obtienen dos soluciones.}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_0 = 2\frac{mg}{k} \rightarrow \text{Máxima elongación del resorte al soltar súbitamente la masa } m.$$

$$\Rightarrow \bar{x}_0 = 0 \rightarrow \text{Máxima altura que alcanza la masa } m \text{ en su rebote.}$$

Ambas soluciones tienen una interpretación física: $\bar{x}_0=0$ corresponde a la máxima altura que puede alcanzar esta masa al oscilar alrededor del punto de equilibrio mg/k .

La elongación asociada a la otra solución es el *doble* de la obtenida al depositar lentamente la masa m . Si nuestro objetivo es alcanzar el punto de rotura del resorte

(o la cuerda!), podemos forzar aún más el alargamiento del resorte si inicialmente le imprimimos una cierta velocidad v_0 a la masa m .

Se deja propuesto como ejercicio calcular el valor de la máxima amplitud, $\bar{x}_0$ en este caso. $\square$

Usando la misma ecuación de energía podemos recuperar algunos resultados ya conocidos. Usando esta ley de conservación y eliminando el resorte, es decir haciendo $k = 0$ en las ecuaciones, podemos reobtener una fórmula de cinemática.

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 - m g x, \quad \text{con } k = 0.$$

En su forma original, esta ecuación es:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - m g x_f = \frac{1}{2} m v_i^2 - m g x_i.$$

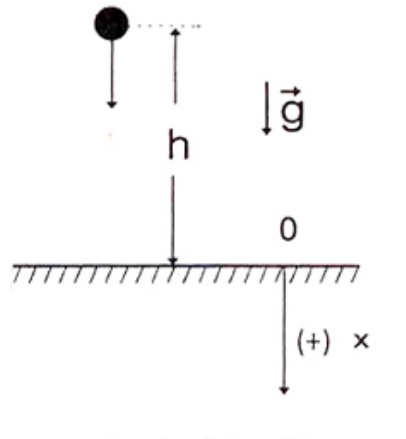
Reescribiéndola, se obtiene:

$$v_f^2 - v_i^2 = +2g(x_f - x_i), \quad (\text{V.34})$$

Esta es la misma expresión encontrada en el Capítulo II.

Veamos un ejemplo de este tipo.

Con las siguientes condiciones iniciales en $t = 0$: $v = 0$ y $x = -h$, la constante E_0 toma el valor $E_0 = m g h$.



Al tocar el suelo, $x = 0$. De aquí tenemos:

$$E = m g h = m g 0 + \frac{1}{2} m v^2, \quad \text{entonces,} \quad v^2 = 2 g h.$$

Esta expresión corresponde a la conservación de la energía para el caso de una *fuerza constante* actuando sobre la masa m . (Note la definición del sentido positivo del eje x usada en este ejemplo).

V.7. PENDULO EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Anteriormente demostramos que para oscilaciones pequeñas la ecuación de movimiento de un péndulo en un campo gravitacional podía ser resuelta y su solución correspondía a la de un oscilador armónico.

Resolver las ecuaciones de movimiento significa encontrar $\theta = \theta(t)$.

Haciendo uso de la definición de trabajo podemos encontrar una relación entre la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la posición θ del péndulo para una oscilación de amplitud arbitraria, no sólo de oscilaciones pequeñas como se hizo anteriormente.

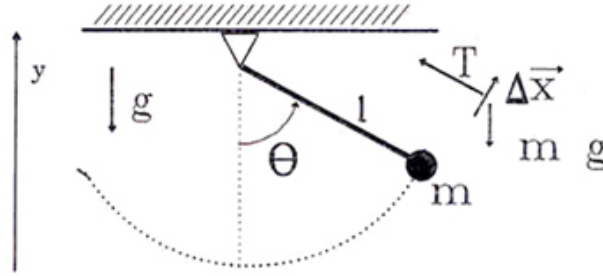


Figura V.13: En el movimiento del péndulo la tensión no realiza trabajo. Sólo la componente vertical del desplazamiento lo hace debido a la fuerza gravitacional.

Calculemos el trabajo necesario para desplazar el péndulo entre los puntos A y B , arbitrarios. Definimos Δx como un pequeño desplazamiento que experimenta la masa que cuelga en el extremo de la cuerda:

$$W_A^B = \sum_A^B [-m \vec{g} \cdot \Delta \vec{x}] + \sum_A^B \vec{T} \cdot \Delta \vec{x} = \sum_A^B m \vec{v} \cdot \Delta \vec{v},$$

como la tensión es perpendicular al desplazamiento $\Delta \vec{x}$ de la masa m del péndulo en cualquier punto de la trayectoria, entonces:

$$\vec{T} \cdot \Delta x = 0, \quad \text{en todo instante,}$$

de esta forma, sólo permanece un término en la expresión del trabajo y, a mano derecha aparece la energía cinética, como es habitual en todos estos casos:

$$W|_A^B = \sum_A^B m \vec{g} \cdot \Delta \vec{x} = \frac{1}{2} (m \vec{v}_B^2 - m \vec{v}_A^2).$$

Como se puede apreciar de la Figura [V.13], $\vec{g} \cdot \Delta \vec{x} = -g \Delta y$, el trabajo realizado para llevar el péndulo de A a B es proporcional a la diferencia de altura $y_B - y_A$, entre las

dos posiciones. De esta forma, el valor de la energía entre ambos puntos es:

$$-m g y_B + m g y_A = \frac{1}{2} (m \vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2).$$

Ordenando en la forma usual, obtenemos la conservación de la energía para el caso de un péndulo moviéndose en un campo gravitacional constante:

$$E_o = m g y + \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2, \quad (\text{V.35})$$

donde hemos definido la velocidad tangencial como $\ell \dot{\theta}$.

V.8. MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO

Muchos fenómenos naturales presentan aproximadamente las características de un movimiento armónico simple. La diferencia entre las oscilaciones armónicas que ocurren en la naturaleza y aquéllas que se observan en un oscilador ideal radican en la conservación de la energía. La energía de un oscilador real disminuye en forma perceptible al cabo de algunas oscilaciones. Este efecto tiene su origen en el trabajo que realizan las fuerzas disipativas presentes en el sistema. La disminución de energía, en estos casos, se materializa en el decrecimiento gradual que experimenta la amplitud de la oscilación. Esto es lo que se denomina *Amortiguamiento* de la oscilación.

Un modelo matemático simple, que sin embargo introduce los ingredientes esenciales del proceso de amortiguamiento, incluye la disipación de energía a través de una fuerza proporcional a la velocidad instantánea del sistema pero que se opone al movimiento.

Para ilustrar este modelo, consideremos el movimiento de una masa unida a un resorte de constante de rigidez k sometida a una fuerza de roce del tipo $f = -b v(t)$. En esta expresión b es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad instantánea de la partícula. De acuerdo a la segunda ley de Newton, podemos escribir:

$$F = m \ddot{x} = -b \dot{x} - k x$$

donde,

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \quad ; \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$$

El problema ahora consiste en encontrar la función $x(t)$ que satisface la ecuación de movimiento:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = 0 \quad (\text{V.36})$$

En este libro nos limitaremos a presentar la solución y a discutir brevemente las tres familias de soluciones que caracterizan a este modelo.

Al cambiar la dependencia de las fuerzas disipativas en la velocidad, por ejemplo, hacerla proporcional al *cuadrado de la velocidad*, se obtienen otras soluciones, más complejas que las tratadas aquí.

La solución de la ecuación [V.36] es:

$$x(t) = A \exp(-bt/2m) \cos(\omega_f t + \phi) \quad (V.37)$$

donde ω_f es igual a:
$$\omega_f = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}.$$

Dependiendo del valor de ω_f^2 se pueden distinguir tres familias de soluciones, cuya representación gráfica se incluye en la Figura [V.14]. Estas son:

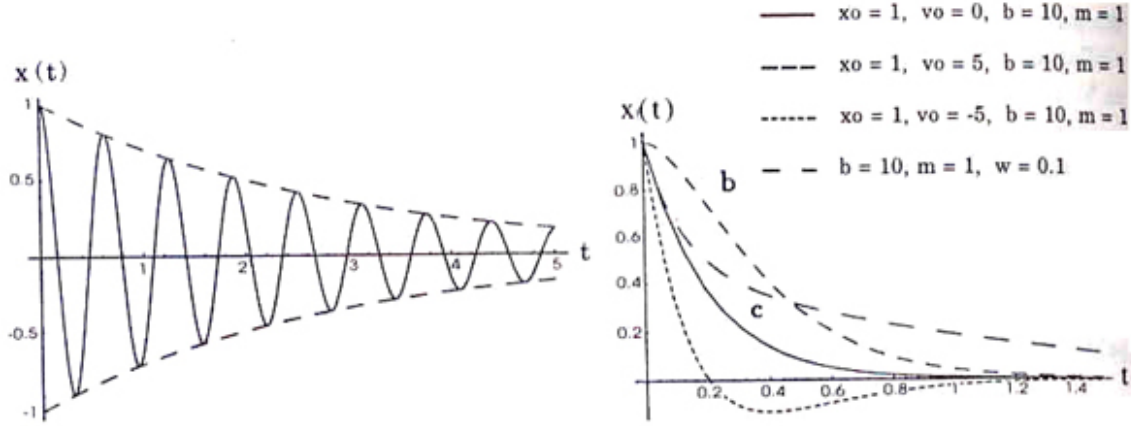


Figura V.14: Se incluye una clasificación de los movimientos amortiguados en tres tipos: (a) Amortiguamiento normal, (b) Caso crítico y (c) Sobreamortiguamiento

a) Movimiento Amortiguado: $\omega_f^2 > 0$

Gráfico (a) de la Figura [V.14 a)].

b) Movimiento Sobreamortiguado: $\omega_f^2 < 0$

La función $\cos(\omega_f t + \phi)$ se transforma en una función hiperbólica, $\cosh(\omega_f t + \phi)$. Este caso representa un movimiento *sobreamortiguado* Figura [V.14 b)]. El sistema no oscila y la amplitud decrece monotónicamente en el tiempo.

c) Caso Crítico: $\omega_f = 0$

En el caso (c) la solución de la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = C_1 (1 + C_2 t) \exp(-bt/2m)$$

El gráfico de esta función se muestra en la Figura [V.14 c)]. El sistema *no oscila* y disipa su energía más rápidamente que en los casos anteriores.

V.9. MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO

Existen muchas situaciones donde un oscilador armónico oscila con una frecuencia impuesta por un mecanismo externo, por ejemplo: la membrana de un micrófono es *forzada* a oscilar con la frecuencia de la onda de sonido que incide sobre ella. Esta frecuencia externa, en general, no coincide con la frecuencia de oscilación propia.

Las características del movimiento armónico forzado las podemos estudiar en el sistema más simple: un resorte unido a una masa sobre la cual se aplica una fuerza externa que varía periódicamente con frecuencia angular ω ($f = f_0 \cos \omega t$). Simultáneamente supondremos que actúa una fuerza de roce de magnitud proporcional a la velocidad instantánea de la masa y que apunta en dirección contraria a ésta.

La ecuación de movimiento es similar a la ecuación del movimiento armónico simple, excepto por la aparición de un término adicional debido a la fuerza armónica externa:

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = f_0 \cos(\omega t) \quad (\text{V.38})$$

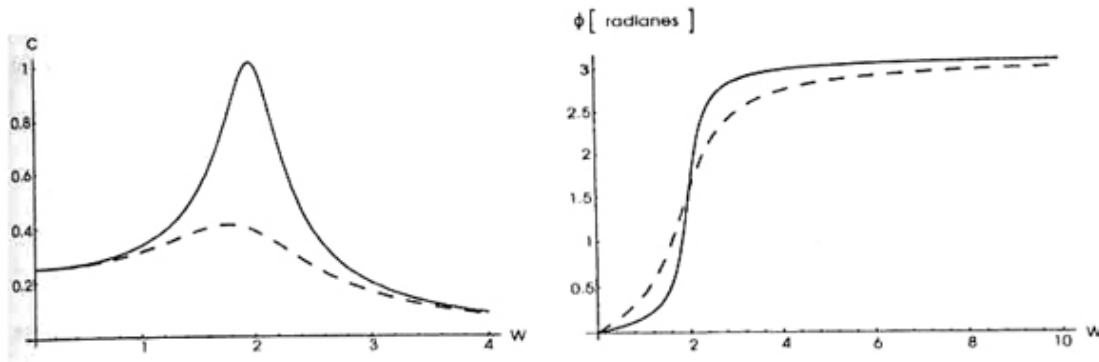


Figura V.15: Amplitud y fase de la oscilación forzada en función de la frecuencia de la fuerza aplicada. La línea punteada muestra el efecto de aumentar el valor de la constante de amortiguamiento b , manteniendo fijos el resto de los parámetros.

La evolución de este sistema, desde el instante en que se conecta la fuerza externa se compone de una superposición de dos movimientos armónicos de distinta frecuencia. Supongamos que inicialmente el sistema estaba en reposo y que en $t = 0$ comienza a actuar la fuerza armónica. El sistema tarda un cierto tiempo en adecuarse a esta situación —denominada etapa transiente—, cuyo largo depende de los parámetros propios del sistema ($m, k, y b$). Pasado ese tiempo, que en general es muy corto comparado con el período de oscilación de la fuerza externa (siempre que el término de fricción sea pequeño), el sistema evoluciona de acuerdo a la expresión:

$$x(t) = C \cos(\omega t - \phi), \quad \text{donde:}$$

$$C = \frac{f_0}{\left[m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2 \right]^{1/2}},$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad y, \quad \tan \phi = \frac{b \omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La Figura [V.15] muestra como cambia la amplitud de la oscilación forzada, C , en función de la frecuencia de la fuerza armónica aplicada: $\nu (\omega \equiv 2\pi\nu)$. Allí se aprecia que la amplitud crece rápidamente en la vecindad de $\omega = \omega_0$, alcanza el valor máximo para esa frecuencia, y luego decrece rápidamente para valores mayores que ω_0 . Cuando $\omega = \omega_0$ decimos que el sistema está en *resonancia*. Note que, de no existir el término disipativo (i.e., si b fuera cero), la amplitud de la oscilación forzada tendería a infinito en la condición de resonancia.

La Figura [V.15] muestra, además, cómo varía la constante de fase ϕ en función de la frecuencia angular ω .

V.10. CHOQUES

V.10.1. Choques elásticos

Al desarrollar el ejemplo de dos masas que se encuentran inicialmente comprimiendo un resorte (sección [V.4]), demostramos que el *momentum total* de las dos masas, se mantenía constante. Destacamos que éste era un resultado general, que no estaba limitado a dicho problema.

Existe otra situación donde ocurre algo similar: en los choques entre dos o más partículas. Por choque entendemos que dos partículas están en contacto por un tiempo muy corto. Durante ese intervalo, el movimiento relativo de las partículas es despreciable y, aun cuando existan fuerzas externas, como gravitación, fricción,...etc., ellas no afectarán lo que suceda durante el choque. De esta forma en el intervalo en que transcurre el choque, *el momentum del sistema de partículas se conserva*.

Pensemos concretamente en la colisión de dos esferas de acero: durante el choque estas esferas se deforman y posteriormente recuperan su forma original, después de un tiempo muy corto, en el cual la energía de las vibraciones que sufren las esferas, son disipadas totalmente.

De la tercera ley de Newton se desprende que durante la deformación, la fuerza ejercida por una de las esferas sobre la otra, es la misma –salvo el sentido–, que la fuerza que ejerce la otra esfera sobre la primera. De este modo, durante dicho intervalo la suma de las fuerzas externas es nula en la dirección del choque, y por lo tanto se conserva el momentum, como explicamos en la sección [V.4].

Pero además existe otra consecuencia, tan importante como la anterior: al chocar las esferas quedan vibrando (por esta razón es posible escuchar el instante en que se produce el choque). Si suponemos que estas vibraciones *no consumen una parte importante de la energía inicial de los objetos* y aún más, que cada una de ellas recupera finalmente su forma original, afirmamos que la energía también se conserva y a este tipo de choques se le denomina *choque elástico*.

Esta última propiedad se basa en la suposición, gratuita de nuestra parte, que la energía disipada durante el choque es despreciable. Es claro, entonces, que se nos debe advertir de un comienzo que el *choque es elástico* y que por lo tanto, la energía se conserva durante su transcurso, puesto que ésta, más que una consecuencia que se desprende de primeros principios, es una aproximación, válida sólo en ciertos casos.

No sucede lo mismo con la conservación del momentum: proviene directamente del principio de acción y reacción establecido en la tercera ley de Newton y *necesariamente se conserva*.

El momentum siempre se conserva durante los choques.

$$\text{CHOQUE ELASTICO} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ CONSERVACION DE LA ENERGIA} \\ \bullet \text{ CONSERVACION DEL MOMENTUM} \end{array} \right.$$

En la resolución de un problema, la existencia de un choque elástico se traduce en las siguientes condiciones:

- a) La posición de los objetos no cambia durante el choque.
- b) La conservación de la energía se reduce a la conservación de la energía cinética solamente, puesto que la posición de los objetos no cambia durante el choque.

c) La velocidad de los objetos puede variar abruptamente como consecuencia del choque.

d) La palabra *abruptamente* indica que todo sucede en un intervalo muy pequeño comparado con cualquier otra escala de tiempo que caracterice naturalmente al sistema estudiado.

Ejemplo

Suponga un choque *perfectamente elástico* entre la masa m que se acerca por la izquierda con velocidad V_0 y la esfera, idéntica en tamaño, pero de masa M que se encuentra detenida antes del choque.

Calcule la velocidad de ambas después del choque.

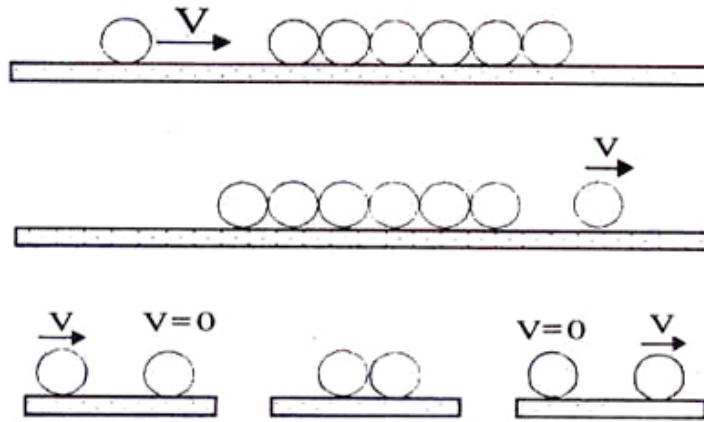


Figura V.16: Todas las masas son iguales y perfectamente elásticas. Al chocar, la bola que avanza por la izquierda queda en reposo y la última recupera la velocidad incidente. En el texto se analiza el caso más simple del choque de dos bolas en una dimensión.

El afirmar que el choque es perfectamente elástico es otra forma de decir que la energía se conserva en este proceso.

Como se conserva la energía y el momentum, tenemos dos ecuaciones. A la izquierda de estas ecuaciones escribimos el momentum (y la energía) justo antes del choque y a la derecha justo después del choque:

$$m V_0 = m u_0 + M v \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 + \frac{1}{2} M v^2. \quad (2)$$

Elevando al cuadrado la primera ecuación y reemplazándola en la segunda, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(u_0 + \frac{M}{m} v\right)^2 &= u_0^2 + \frac{M}{m} v^2, \\ u_0^2 + 2\frac{M}{m} v u_0 + \left(\frac{M}{m}\right)^2 v^2 &= u_0^2 + \frac{M}{m} v^2, \\ 2 u_0 + \left(\frac{M}{m}\right) v &= v, \\ u_0 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{m}\right) v. \end{aligned}$$

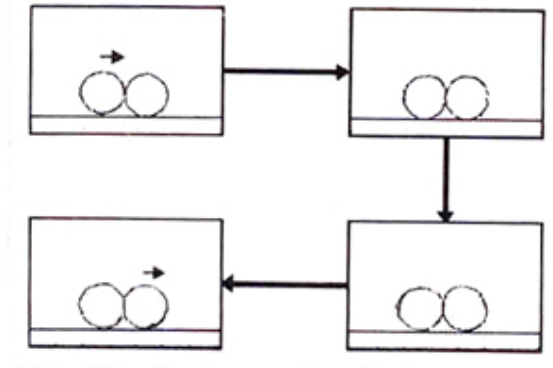


Figura V.17: El diagrama indica cualitativamente cómo se transmite el momentum. La fuerza de acción empuja a su vecina y la de reacción frena a la incidente. Como la energía se conserva las esferas no vibran, no aumentan su temperatura ni quedan deformadas.

Finalmente notamos que si $m = M$, entonces $u_0 = 0$: es decir, la masa que venía con velocidad V_0 se detiene y la masa M , que se encontraba inicialmente en reposo, adquiere toda la velocidad V_0 .

V.10.2. Choque inelástico

Ocurre cuando la energía no se conserva durante el choque.

En este caso es posible calcular, mediante un experimento, la cantidad de energía disipada y así conocer la energía final mediante un factor numérico que denominamos e , tal que $e < 1$ siempre. Con este dato empírico, la ecuación de la energía se expresa como:

$$E_{\text{inmediatamente después del choque}} = e E_{\text{... antes del choque}}, \quad \text{con } e < 1. \quad (\text{V.39})$$

De este modo, al conocer e tenemos una ecuación adicional a la conservación del momentum para resolver el problema de los choques entre partículas.

Existe un tipo de choque que se aparta del caso anterior, se caracteriza porque ambas partículas permanecen unidas después de colisionar. Cuando esto ocurre, existe sólo una velocidad por determinar en el problema y ésta se puede calcular a partir de la conservación de momentum que, como hemos enfatizado, siempre se conserva.

Este último tipo de choque se denomina *totalmente inelástico*. Queda caracterizado por provocar una *deformación permanente* de uno (o ambos) de los objetos participantes. Para ilustrar esta idea analizaremos el caso del choque totalmente inelástico de dos bloques, infinitamente rígidos, separados por un trozo de plastilina. El comportamiento final es que ambos cuerpos continúan viajando unidos. La plastilina se encarga de absorber la deformación mencionada y también de evitar la separación de las dos masas después del choque.

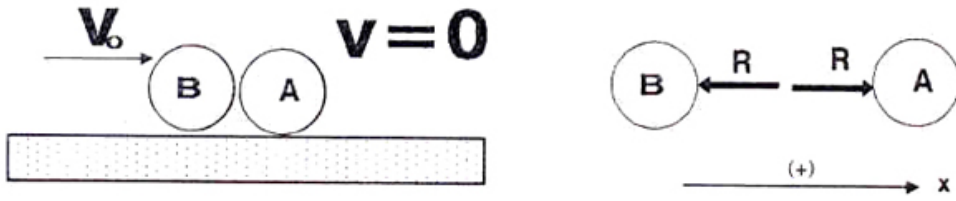


Figura V.18: Durante el choque sólo actúan fuerzas internas, de acción y reacción entre las dos masas que se anulan mutuamente. A partir de este resultado se demuestra que la suma del momentum de cada una de las partículas permanece constante durante la colisión.

En la Figura [V.18], la fuerza $-R$ indica la reacción de la masa M_A sobre M_B y R la acción de M_B sobre M_A . El sentido que se les dió a los vectores, obedece la tercera ley de Newton. Aplicando, la segunda ley de Newton y considerando sólo el eje x , tenemos:

$$M_A \cdot a_A = +R,$$

$$M_B \cdot a_B = -R,$$

sumando ambas ecuaciones:

$$M_A \cdot a_A + M_B \cdot a_B = 0. \quad (\text{V.40})$$

Suponiendo ambas masas iguales ($M_A = M_B$), con el único objeto de simplificar el algebra, tenemos que $a_A + a_B = 0$.

La aceleración de uno de los cuerpos es exactamente igual a la desaceleración del otro durante el choque. Como uno de ellos tiene velocidad inicial distinta de cero (v_0), el cuerpo B avanza más rápidamente que A. Esto es posible sólo si la plasticina comienza a deformarse, como se aprecia en el gráfico de velocidad *versus* tiempo de cada una de las partículas.

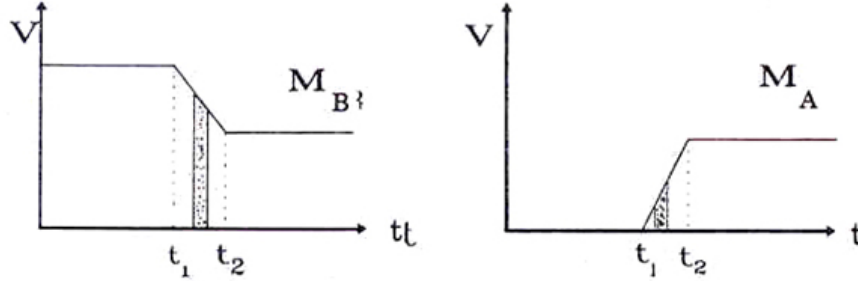


Figura V.19: El área achurada corresponde al camino recorrido, en el mismo intervalo de tiempo, por ambos objetos durante el choque. La diferencia en el valor del área corresponde a la deformación que sufren los cuerpos.

Hemos achurado el área velocidad vs. tiempo en el primer intervalo Δt . Como sabemos, esta área representa el espacio recorrido por cada uno de los objetos.

Se ve de inmediato que M_B recorre una distancia mayor que M_A y por lo tanto la plasticina se deforma. Esta se debe deformar hasta el instante t_2 , a partir del cual las distancias recorridas por ambos cuerpos son las mismas y por lo tanto viajan a la misma velocidad.

Calculemos el valor de la velocidad $\bar{v}$ del sistema M_A y M_B . La masa M_B avanza con velocidad v_0 sobre M_A . El piso **no** tiene roce y por lo tanto no existe ninguna fuerza horizontal (dirección x).

Reformulamos la ecuación [V.40] de forma que aparezca el momentum de ambas partículas explícitamente:

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta t} \equiv \frac{P_f|_x - P_i|_x}{\Delta t} = 0,$$

donde $P_x \equiv (P_A + P_B)$. El momentum total del sistema es la suma del momentum de cada una de las partículas. Esta es una suposición que no parece contradecir los resultados experimentales.

$P_f|_x$ representa el valor del momentum de ambas partículas después del choque: $P_f|_x = P_{A+B}$, puesto que viajan juntas.

De esta última ecuación obtenemos:

$$\Delta P_x \equiv [P_f|_x - P_i|_x] = 0. \quad (\text{V.41})$$

Antes del choque, la cantidad de movimiento era:

$$(P_i)_x = M_B \cdot v_0 + M_A \cdot 0.$$

Después del choque,

$$(P_f)_x = [M_B + M_A] \bar{v}.$$

Usamos la definición de un choque *totalmente inelástico*: *las dos partículas quedan unidas en el choque y posteriormente se mueven con la misma velocidad*. Esta situación es un caso especial. Lo usual es que las partículas después del choque se separen y viajen a velocidades diferentes.

Por la conservación del momentum,

$$M_B \bar{v} + M_A \bar{v} = M_B v_0$$

$$\bar{v} = \frac{M_B}{M_A + M_B} \cdot v_0.$$

Si $M_B \rightarrow \infty$, entonces $\bar{v} = v_0$, como era de esperar de acuerdo a lo que se observa en la vida diaria. Si un camión muy pesado colisiona con un auto pequeño, el primero casi no se afecta por el choque.

Otro caso límite ocurre cuando $M_B \rightarrow 0$, la velocidad $\bar{v} \rightarrow 0$, que es lo que sucede al tirar un pedazo de plasticina contra un objeto mucho más pesado. En realidad, cuando indicamos que M_B tiende a cero, físicamente estamos indicando que M_A es mucho mayor que M_B . El concepto de grande o pequeño en física es relativo.

Analicemos lo que sucede paso a paso durante el choque totalmente inelástico.

Choques de Masas Idénticas

Absolutamente Inelástico



Elástico

Las dos masas viajan
unidas despues del choque.



Una masa se detiene y
la otra obtiene la
velocidad de la primera.

V.10.3. Choques en dos dimensiones

Analicemos brevemente qué sucede con un choque de dos partículas puntuales en un plano. El desarrollo en este caso es idéntico al realizado anteriormente salvo una diferencia: las ecuaciones son vectoriales.

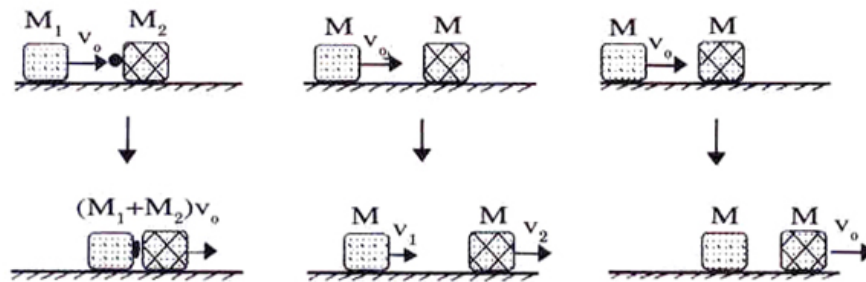


Figura V.20: Se ilustra la diferencia entre un choque elástico y uno inelástico entre dos masas iguales. La línea superior indica la situación antes del choque y la inferior el movimiento después del choque. El momentum se conserva siempre, en todos los choques.

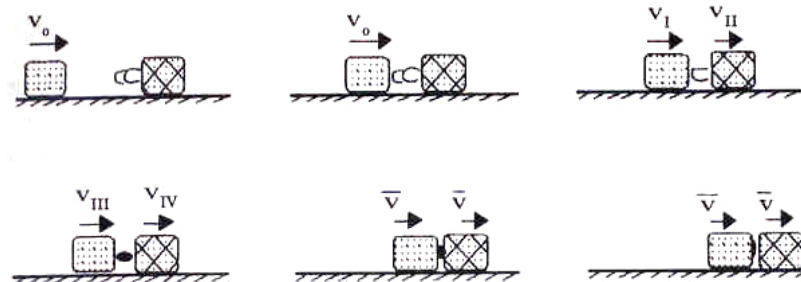


Figura V.21: Aquí se intenta explicar, en cámara lenta, lo que sucede durante un choque inelástico. En este choque hay un material que se deforma permanentemente absorbiendo parte de la energía del sistema. En consecuencia no hay conservación de la energía en este tipo de choques.

La conservación del momentum genera dos ecuaciones. La conservación de la energía, una ecuación adicional. En total, para el *choque elástico* tenemos tres ecuaciones, de esta forma podemos calcular una velocidad con sus dos componentes y una componente de la otra velocidad, o sólo su dirección, por ejemplo, pero no su magnitud.

Supongamos ahora un *choque inelástico*. Del párrafo anterior, sabemos que hay dos ecuaciones a nuestra disposición. Para poder resolver un problema de este tipo (choque entre dos partículas) debemos conocer, además de los vectores velocidad de las dos partículas con su dirección y magnitud, el vector velocidad de una de las partículas *después del choque*.

A continuación, procedemos a calcular el valor de la velocidad de la partícula restante, con estos datos.

El momentum se conserva en cada una de las dimensiones en forma independiente.

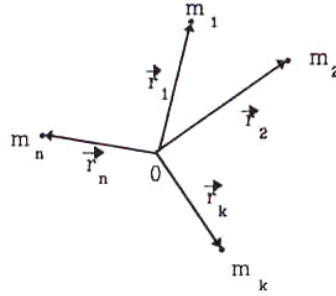


Figura V.22:

Esto es:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_3 + m_2 \cdot \vec{v}_4,$$

la cantidad a la izquierda del signo igual, representa $\vec{P}_i$, el momentum inicial. $\vec{P}_f$ representa el momentum final, después del choque. De aquí tenemos:

$$\vec{v}_4 = \frac{1}{m_2} [m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_3) + m_2 \cdot \vec{v}_2]$$

V.10.4. Fuerzas impulsivas

A veces es conveniente referirse a la fuerza promedio que actúa durante un choque. En realidad la variación de la magnitud de las fuerzas durante el choque es muy difícil de analizar. Por esta razón, es más práctico *suponer* que durante el choque existe una *fuerza promedio*, supuestamente constante que aparece y desaparece abruptamente.

Si analizamos lo que sucede con la segunda ley de Newton en este caso, tenemos:

$$\vec{F}_{\text{impulsiva}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}. \quad (\text{V.42})$$

Es conveniente referirse al cambio de momentum generado por la fuerza impulsiva porque esta estrategia se utiliza para resolver problemas de masa variable y en esos casos conviene utilizar al momentum en lugar de la velocidad.

Otra forma que puede tomar la ecuación anterior es la siguiente:

$$\text{Impulso} \equiv \vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p} \equiv \vec{p}_{\text{después del choque}} - \vec{p}_{\text{antes del choque}}. \quad (\text{V.43})$$

Ejemplo

En una correa transportadora se están depositando Q kg/s. ¿Cuál es el valor de la fuerza que debemos aplicar en los extremos para mantener constante la velocidad V de esta correa?

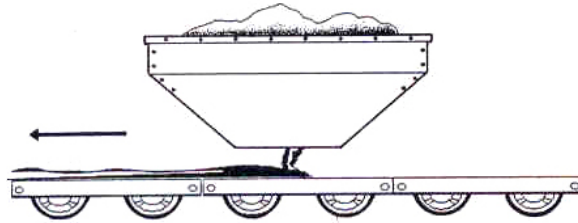


Figura V.23: Suponemos que la correa es plana y que constantemente está aumentando el material depositado sobre ella. La correa se desplaza hacia la izquierda.

Usamos la expresión para la fuerza impulsiva [V.43]:

$$F = \frac{p_{\text{después del choque}} - p_{\text{antes del choque}}}{\Delta t},$$

como la velocidad V de la correa, permanece constante, la variación del momentum proviene del aumento de masa en la correa. La diferencia entre el momentum final e inicial es:

$$\{m + \Delta m\} V - m V = \Delta m V = Q \Delta t V,$$

reemplazando en la primera ecuación y simplificando por Δt , tenemos:

$$F = Q V. \square$$

V.11. EJERCICIOS

- 1.– Un cuerpo de masa m se lanza desde la base de un plano inclinado con velocidad V_0 . Si el coeficiente de roce entre el cuerpo y el plano es μ . Calcular:
 - a) La distancia recorrida hasta que m alcanza su altura máxima.
 - b) La velocidad con que vuelve al punto de partida.
- 2.– Una partícula de masa m parte del reposo y se desliza sobre la superficie de una esfera sólida de radio R . Midiendo el ángulo φ desde la vertical, y suponiendo que no existe fricción:
 - a) Determine la energía cinética de la partícula en función de φ .
 - b) Las aceleraciones radial y tangencial de la partícula en función de φ .

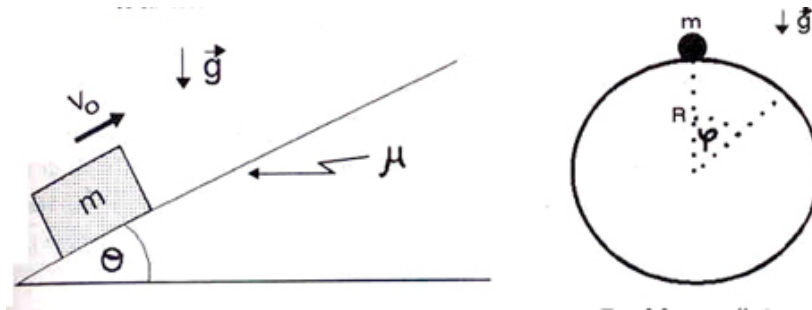


Figura V.24:

Problema # 1**Problema # 2**

- c) Determine el valor del ángulo φ , para el cual la partícula pierde contacto con la superficie de la esfera.
- 3.- Una partícula de masa m está unida al extremo de una cuerda ideal de largo L , cuyo otro extremo está fijo en C. La partícula parte del reposo, desde la posición $\phi = 0$. Si la máxima tensión que puede soportar la cuerda sin cortarse es $(3mg)/2$, determine el valor de ϕ para el cual se corta la cuerda.
- 4.- Un bloque de masa M descansa sobre una superficie horizontal, con coeficiente de roce estático μ_e . Otro bloque de masa m se encuentra atado a él, mediante una cuerda ideal de largo L . Inicialmente este bloque se instala a la misma altura que M y a una distancia d del anillo A, indicado en la Figura. En esta posición la cuerda se encuentra extendida pero sin tensión. En un cierto instante se libera la masa m , la cual cae por gravedad, permaneciendo atada a la cuerda. Si $M=2m$ y $\mu_e=1$, calcule el valor del ángulo ϕ para el cual el bloque sobre la superficie horizontal comienza a deslizar.

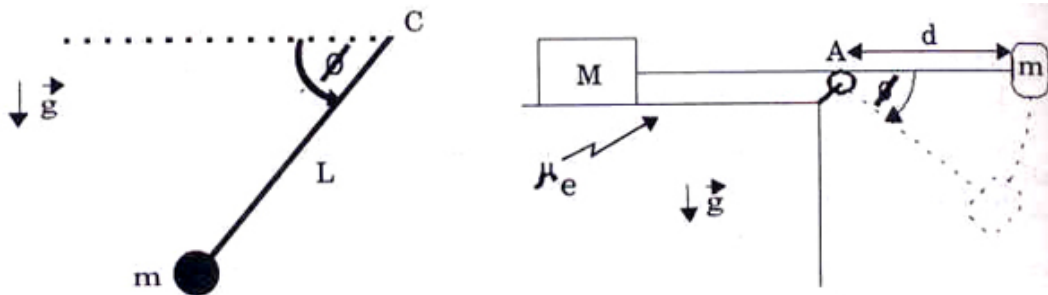


Figura V.25:

Problema # 3**Problema # 4**

- 5.- En el sistema de la Figura, la masa m_1 está unida a un resorte de constante elástica

k y largo natural L_o y una cuerda ideal, que desliza sin roce por una polea. Entre el suelo y el bloque de masa m_1 existe un coeficiente de roce dinámico μ .

Si en $t=0$ el resorte tiene su largo natural y la masa m_2 tiene una velocidad V_o , determine la velocidad de la masa m_2 en el instante en que ha descendido una altura h con respecto a su posición inicial.

- 6.- Considere un bloque de masa M colocado sobre un resorte vertical (fijo a él) de constante k y largo natural L_o . Sobre el bloque se coloca una partícula de masa m . Suponga que inicialmente se comprime el resorte en una distancia d con respecto a la posición de equilibrio del sistema. Calcule la altura máxima (sobre el suelo) que alcanza la masa m una vez que se libera el resorte.

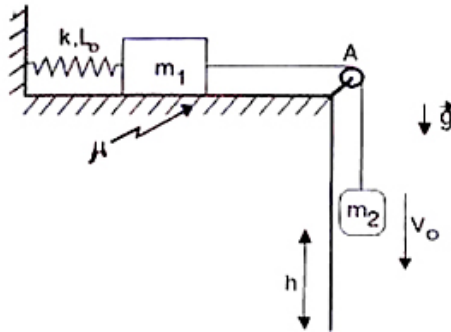
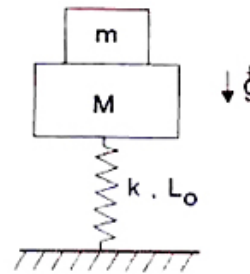


Figura V.26:

Problema # 5



Problema # 6

- 7.- Un resorte, de constante k , se encuentra inicialmente comprimido una distancia x_o , por medio de un hilo. En los extremos del resorte se han apoyado dos masas M y m , que se mantienen inmóviles por estar unidas por el hilo.

En cierto instante se corta el hilo y el resorte se expande. La partícula m sale disparada hacia la derecha y se desliza sin roce sobre una pista, que más adelante forma un círculo vertical de radio R . Conocidos M , k , x_o y R encuentre el máximo valor que puede tener m para que esta partícula no deje la pista. Analice el límite $M \rightarrow \infty$.

- 8.- En la Figura se muestra un riel fijo, vertical, pulido y que termina en un arco de circunferencia BC y de radio R . Una partícula de masa m se abandona en reposo en el punto A , y desliza hasta pasar por el extremo del arco C . Con estos datos, calcule:

a) La altura máxima –medida desde el punto C –, que alcanza la partícula.

- b) Si al caer, la partícula pasa por el punto D , calcule el valor de CD . (El punto C está a la misma altura que el punto D).

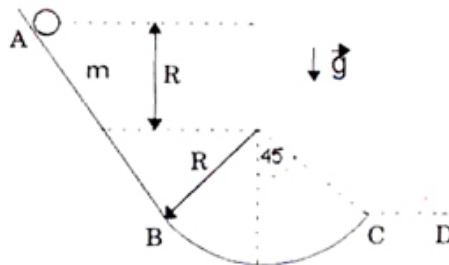
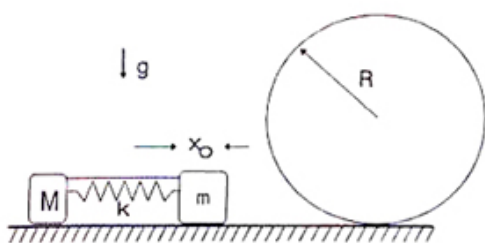


Figura V.27:

Problema # 7

Problema # 8

- 9.− Una partícula de masa m que se desliza sin roce sobre un anillo de radio R , se libera en el punto A . El anillo está unido a un resorte de constante k , cuyo otro extremo está fijo al punto P , a una distancia d del centro del anillo. Para simplificar los cálculos, suponga que el largo natural del resorte es despreciable comparado con los otros largos. Si la partícula parte desde A , con velocidad inicial nula, y al pasar por el punto B no ejerce ninguna fuerza sobre el aro. Calcule el valor de la distancia d . ¿Puede alcanzar d un valor nulo o negativo? Explique.
- 10.− El péndulo ideal está formado por una esfera E de masa m , unida a un extremo de una cuerda ideal cuyo otro extremo O está fijo a la Tierra. La esfera se suelta, a partir del reposo, desde la posición horizontal mostrada en la Figura. Al llegar al punto más bajo de su trayectoria choca con el bloque B , de masa desconocida, que se encuentra en reposo. Suponga que este choque puede ocurrir de sólo dos formas: puede ser perfectamente elástico o perfectamente inelástico.
Determine cuál debe ser el valor de la masa B , para que después del choque el péndulo alcance la misma altura en cualquiera de los dos casos posibles.
Note que en uno de ellos, ambas masas viajan separadas después del choque y en el otro, el choque inelástico, ambas se elevan unidas.
- 11.− Un anillo de masa $2m$ se desliza por un aro circular pulido, de radio R ubicado en un plano vertical fijo. Inicialmente parte del reposo desde el punto más alto A . Al llegar a B , choca elásticamente con una partícula de masa m .
Calcular el ángulo θ que alcanza a subir la masa $2m$, después del choque.
- 12.− Un sujeto de masa M desliza con velocidad V_0 sobre una superficie horizontal lisa ($\mu = 0$), en dirección a una pared contra la que se estrellará. Cuando se encuentra

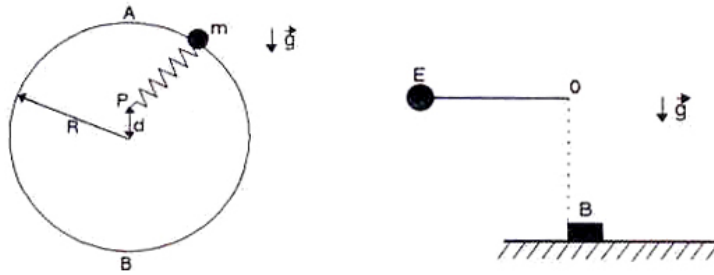


Figura V.28:

Problema # 9

Problema # 10

a una distancia *apropiada*, lanza una pelota de masa m que lleva consigo, en un desesperado intento por aminorar el impacto. Este infortunado logra lanzar la pelota con una velocidad u_o , con respecto a su persona. La pelota rebota elásticamente de modo que el sujeto alcanza a atraparla antes de estrellarse.

- Determinar la velocidad con que se estrella.
- Determinar el valor mínimo que debería tener u_o para evitar el impacto con la pared.

Nota: Suponga que la pelota, al ser lanzada viaja en línea recta en ambos tramos: ida y vuelta. Recuerde que la velocidad u_o está referida al sujeto y no al piso.

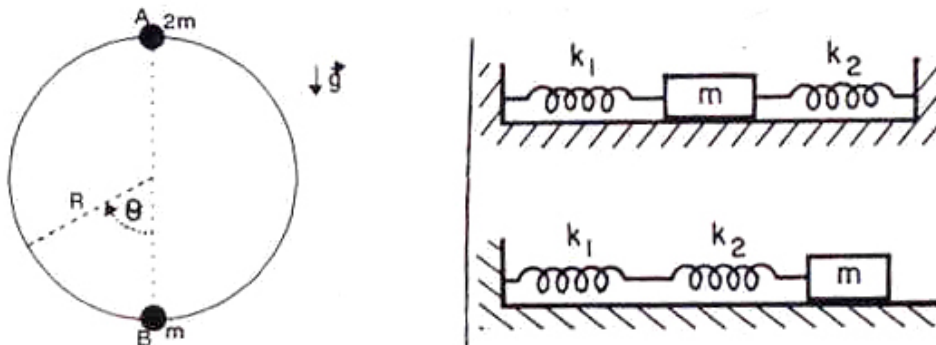


Figura V.29:

Problema # 11

Problema # 13

- Derive las ecuaciones de movimiento y encuentre los períodos de oscilación para los dos sistemas que aparecen en la Figura. m se mueve en la línea recta, en un plano horizontal sin roce y bajo la influencia de los dos resortes de rigidez k_1 y k_2 respectivamente.

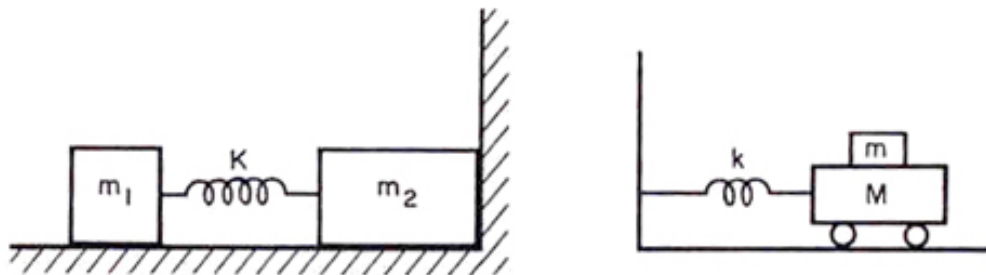
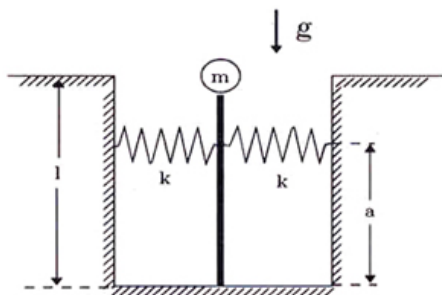


Figura V.30:

Problema # 14

Problema # 15

- 14.– Dos masas distintas $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, descansan sobre una mesa sin roce. Si un resorte de constante k es comprimido una distancia d , con m_2 pegado a la pared y entonces el sistema es abandonado desde el reposo, encontrar qué distancia viaja m_1 antes que m_2 comience a moverse.
- 15.– Dado el oscilador mecánico mostrado en la Figura. Encontrar la amplitud máxima de oscilación para que la masa superior no resbale sobre M . El coeficiente de fricción entre las masas es μ .
- 16.– En el sistema de la Figura, la masa m realiza *pequeñas oscilaciones* alrededor de la posición de equilibrio –la línea vertical–, con una velocidad angular ω .
- a) Encuentre el valor de la frecuencia de oscilación ω , sin considerar la aceleración de gravedad.
- b) Considere ahora el efecto de la aceleración de gravedad g , debido a las pequeñas variaciones que se producen en la altura de la masa m durante la oscilación.



Torque, centro de masa y momento angular

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

VI

Índice general

VI.TORQUE, CENTRO DE MASA Y MOMENTO ANGULAR	253
VI.1. TORQUE	253
VI.1.1. Introducción	253
VI.2. DEFINICION DE TORQUE	254
VI.2.1. Definición de producto vectorial	255
VI.2.2. Algebra del producto vectorial (o producto cruz).	258
VI.3. ESTATICA	259
VI.3.1. Ecuaciones de la estática	262
VI.4. VIGAS Y ESTRUCTURAS	268
VI.5. CENTRO DE MASA	276
VI.5.1. Introducción	276
VI.5.2. Localización del centro de masa	278
VI.5.3. Movimiento del centro de masa	285
VI.6. MOMENTO ANGULAR	295
VI.6.1. Definición	295
VI.6.2. Momento de inercia de una barra	299
VI.6.3. Torque y aceleración angular. Rotación con respecto a un eje fijo .	303
VI.7. TEOREMA DE STEINER	316
VI.7.1. Momento de inercia	316
VI.7.2. Momento angular	317
VI.8. ENERGIA CINETICA DE ROTACION	322
VI.9. ROTACION EN TORNO A UN PUNTO	329
VI.10.EJERCICIOS	330

Capítulo VI

TORQUE, CENTRO DE MASA Y MOMENTO ANGULAR

VI.1. TORQUE

VI.1.1. Introducción

Al resolver un problema comenzamos por hacer un diagrama de cuerpo libre de las partes del sistema y a continuación aplicamos la segunda ley de Newton a cada una de ellas. En esta operación, tácitamente estamos considerando cada una de esas partes como una *partícula puntual*: todas las fuerzas se dibujan alrededor de un punto, al sumarlas se obtiene la fuerza resultante y luego, usando la segunda ley de Newton podemos predecir el movimiento resultante.

La geometría de cada una de las partes del cuerpo, ya sea un bloque, una cuña o una polea, interviene sólo para especificar la dirección de la fuerza de acción y reacción entre las distintas partes.

De acuerdo a la receta anterior, si la suma de las fuerzas es nula, no hay aceleración y los cuerpos (puntos) permanecen con velocidad constante o en reposo.

Obviamente las partículas puntuales constituyen una primera aproximación a problemas más reales: los cuerpos no son puntos y pueden, por ejemplo, rotar en torno a sí mismos.

Para estudiar el origen de la rotación de un cuerpo rígido, debemos considerar las fuerzas que intervienen y los puntos donde cada una de ellas actúa. Este par: la fuerza y el vector posición del punto donde se aplica la fuerza, da origen a otro vector que se denomina *torque*.

Para evaluar la rotación de un cuerpo se define el vector *momento angular*. Para una partícula este vector está asociado a su posición $\vec{r}$, y a su momentum $\vec{p}$. Para un cuerpo

sólido, se obtiene como la suma del momento angular de cada una de sus partículas que lo componen.

Los valores asociados con el torque y el momento angular, dependen –salvo una excepción: el caso estático– del origen de coordenadas elegido. El momento angular es el equivalente del momentum lineal $\vec{p}$.

El movimiento más general de un cuerpo rígido está compuesto de una rotación y una traslación. En los párrafos anteriores, introdujimos la rotación. La traslación reduce el cuerpo a un punto –denominado *centro de masa*– y concentra en él, las fuerzas externas. El centro de masa es un punto matemático que, para el efecto de las leyes de Newton, representa al cuerpo real y es el lugar donde se concentran todas las fuerzas externas. Como se ha trabajado hasta ahora es, precisamente, de esa forma: considerando todos los cuerpos como puntos materiales y aplicando sobre estos puntos las leyes de Newton.

En este capítulo *no se introducen nuevas leyes físicas* con el objeto de dar cuenta de la rotación que experimentan los cuerpos. No es necesario. Basta con definir una nueva operación matemática entre vectores y aplicarla a las mismas leyes físicas ya conocidas.

En el caso de la rotación de un cuerpo en torno a un eje fijo, el torque se relaciona con la aceleración angular a través de una ecuación similar a la segunda ley de Newton.

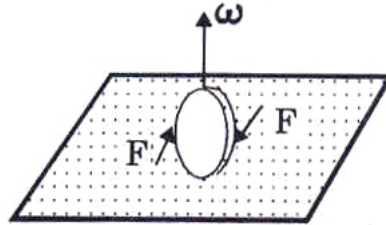
Aquí nos referiremos exclusivamente a las rotaciones en torno a un eje. Sólo dedicaremos un párrafo a la rotación de un cuerpo rígido en torno a un punto. Esta es una materia que requiere más herramientas matemáticas y por lo tanto no se incluyó en este curso.

Para introducir el torque, necesitamos definir una operación entre dos vectores llamada *producto vectorial*. Este es el tema de la siguiente sección.

VI.2. DEFINICION DE TORQUE

Las manillas de una puerta están siempre alejadas de los goznes. Por ejemplo, al cerrar una puerta –por liviana que ésta sea–, si la empujamos de un punto demasiado cercano al eje de giro, el esfuerzo que es necesario desarrollar es notorio.

Otra situación similar es la de una moneda que hacemos girar rápidamente cuando le aplicamos en forma simétrica un par de fuerzas en los bordes. En este caso, si nos hemos preocupado de aplicar dos fuerzas iguales en magnitud y dirección pero de sentidos opuestos sobre el borde de la moneda, ésta rotará en torno a un eje imaginario que atraviesa el cuerpo.



En estas operaciones intervinieron la fuerza aplicada y su brazo de acción: distancia entre el punto de aplicación y el eje de giro, que son los dos parámetros que contiene el concepto de *torque*.

Cuando existe un par de fuerzas que actúan sobre puntos distintos de un sólido rígido (que no sufre deformación), existe lo que se denomina un *torque* y su efecto genera una aceleración angular sobre el cuerpo.

El torque con respecto a un origen arbitrario O, es el producto *vectorial* entre el vector posición que une el punto de referencia O con el punto P y la fuerza $\vec{F}$:



$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (\text{VI.1})$$

VI.2.1. Definición de producto vectorial

El producto vectorial es una operación matemática que se designa por el símbolo $\wedge$ y que asocia a un par de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, un tercer vector $\vec{c}$,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \equiv \vec{c} \quad \text{para todo vector } \vec{a}, \vec{b}.$$

A continuación definimos la dirección, el módulo y el sentido de este nuevo vector generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

• **Dirección:**

$(\vec{a} \wedge \vec{b})$ es un vector perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

• **Magnitud:**

Es el producto de las magnitudes de ambos vectores, multiplicado a su vez, por el seno del ángulo más pequeño que ellos forman:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta. \quad (\text{VI.2})$$

Donde θ : es el ángulo más pequeño que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



Figura VI.1: Se indica la dirección y sentido del vector que representa el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

• **Sentido** del vector $(\vec{a} \wedge \vec{b})$:

Use la *regla de la mano derecha*, empuñe la mano y estire el dedo pulgar. El ángulo θ es el ángulo más pequeño que va desde $\vec{a}$ hacia $\vec{b}$, y ésta debe ser la dirección en que apuntan los dedos empuñados. En esta posición, el pulgar indica la dirección y sentido del vector $\vec{a} \wedge \vec{b}$.



Figura VI.2: Uso de la regla de la mano derecha. Es una convención usada frecuentemente y por lo tanto conviene no olvidar. Entre sus aplicaciones permite asociar un vector a la velocidad angular ω .

Nota

La dirección del ángulo en $\vec{a} \wedge \vec{b}$ se toma siempre partiendo desde el primer vector ($\vec{a}$) hacia el segundo ($\vec{b}$). El orden es importante en esta definición.

• Definición de $\otimes$ y $\odot$.

Siempre trabajaremos con la situación más simple: rotación de un cuerpo en torno a un eje. En este caso nos basta definir un *vector unitario cuya dirección sea normal al plano del papel y cuyo sentido identifiquemos a continuación*:

$\otimes \equiv$ Entrando en el papel.

$\odot \equiv$ Saliendo del papel.

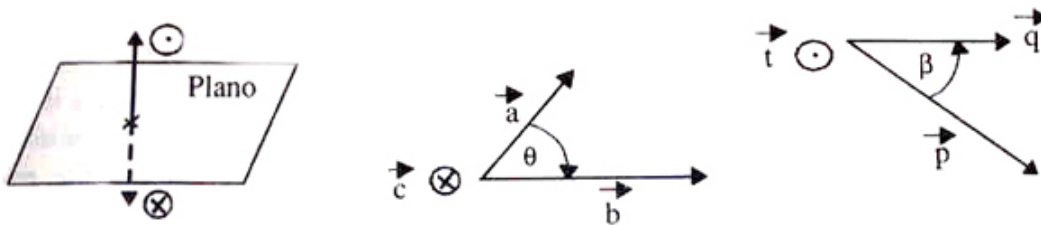


Figura VI.3: Definición de los vectores $\otimes$ y $\odot$.

Ejemplo

Calcular $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se ubican en el plano, entonces:

$$\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \otimes.$$

Si tomamos otro par de vectores, como $\vec{p}$ y $\vec{q}$ de la Figura, entonces:

$$\vec{t} = |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \beta \odot.$$

$\oplus, \odot$ indican los dos sentidos posibles en la dirección perpendicular al plano del papel. Es la única información que necesitaremos en este caso.

La notación anterior representa una flecha que, si apunta hacia el papel toma la forma de la cola de una flecha, $\oplus$. Por otra parte, el vector saliendo del papel hacia nosotros se designa como $\odot$, y representa la punta de la flecha.

Note que:

$$\oplus = -\odot. \quad (\text{VI.3})$$

VI.2.2. Álgebra del producto vectorial (o producto cruz).

Asociatividad.

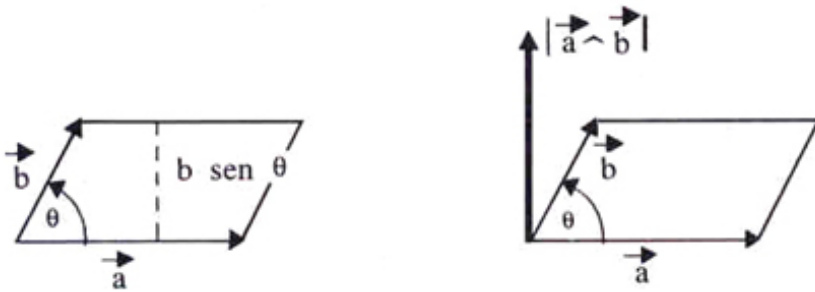
Dados tres vectores, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, entonces se cumple que:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}. \quad (\text{VI.4})$$

El álgebra **anticonmuta**. En otras palabras: el orden de los términos en el producto es importante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}. \quad (\text{VI.5})$$

Una superficie plana se puede asociar con un vector generado precisamente a través del producto vectorial. Imaginemos un romboide pequeño del tamaño de una moneda, esta superficie puede ser representada por un vector perpendicular a ella. Con esta definición ya conocemos la dirección del vector, su sentido es arbitrario y lo definimos al final de esta sección. La magnitud de este vector está determinada por el valor del área de la superficie. Este valor está dado por la magnitud del producto vectorial de los dos vectores que limitan el romboide (como es el caso de la Figura).



Es decir, el área del romboide de la Figura es:

$$\text{Area} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta.$$

El área de un elemento de superficie puede ser representado por un vector, cuya dirección indica la orientación de la superficie en el espacio y su magnitud nos da el valor del área:

$$\vec{\text{Area}} \equiv \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

De la regla de la mano derecha se desprende que, al elegir el orden de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, estamos definiendo automáticamente el sentido del vector que representa la superficie.

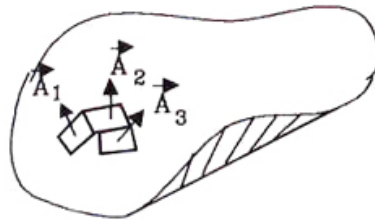


Figura VI.4: En cada una de las superficies se ha dibujado un romboide elemental. El vector que lo identifica lo hace dando solamente el punto P de la superficie y el vector perpendicular que lo representa.

En el caso de una superficie curva como la de una esfera o un elipsoide, siempre se puede descomponer en elementos de área muy pequeños (infinitesimales) de forma que la superficie queda armada mediante un conjunto de escamas (o tejas) y cada una de ellas se puede representar de la forma definida anteriormente.

VI.3. ESTATICA

Esta es la primera aplicación del concepto de torque que estudiaremos. La estática se concentra en el estudio de cuerpos (objetos con dimensiones finitas), que permanecen

en equilibrio bajo la acción de fuerzas externas aplicadas en distintos puntos. Por equilibrio entendemos cuerpos que no rotan ni se trasladan. Estos incluyen principalmente estructuras fijas como puentes, edificios, grúas...etc.

Comenzamos definiendo lo que entendemos por traslación y rotación.

Traslación y Rotación

Traslación: Existe traslación pura si todos y cada uno de los puntos de un cuerpo rígido experimentan el *mismo* desplazamiento.

Si el desplazamiento de cada uno de los puntos del cuerpo –que permanece sin deformarse– es diferente, el movimiento se puede considerar como una superposición de una *Rotación* y una *Traslación*.

Si el *Torque*, $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, ejercido por todas las fuerzas que actúan sobre un objeto con respecto a un punto dado, es nulo, el cuerpo no rota o permanece rotando con velocidad angular constante si lo estaba inicialmente.

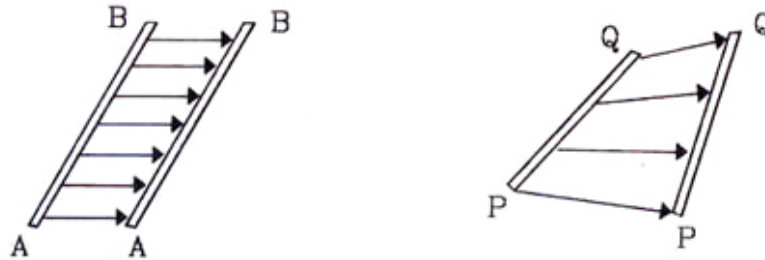


Figura VI.5: La barra AB experimenta sólo una traslación: cada uno de sus puntos se desplaza la misma cantidad. La barra PQ experimenta una traslación y una rotación simultáneamente.

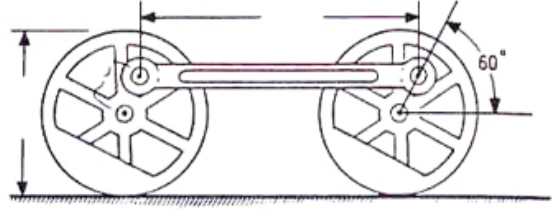
Con esta definición iniciamos el estudio del movimiento de los cuerpos rígidos, teniendo en consideración sus dimensiones espaciales. Si el cuerpo se reduce a un punto, ni el torque ni la rotación están definidos, y por lo tanto no existen.

El Torque está asociado a la aceleración angular de un cuerpo. En un punto material, no tiene sentido hablar de rotación ni torque. Si un cuerpo extendido tiene aplicadas varias fuerzas y no experimenta rotación alguna, entonces el torque neto de estas fuerzas es nulo.

Ejemplo

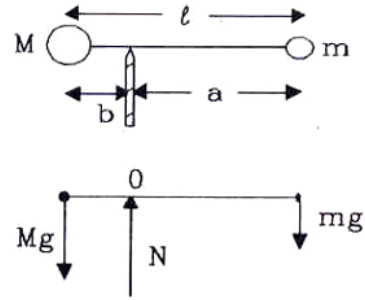
La barra de la Figura está unida rígidamente a las dos ruedas. La distancia entre ejes de estas ruedas permanece constante. Se pregunta si la barra realiza un movimiento de rotación neto o un movimiento de traslación.

La barra que une ambas ruedas, experimenta una traslación pura, de acuerdo a nuestra definición, puesto que cada uno de sus puntos sufre el mismo desplazamiento. $\square$

**Ejemplo**

Estudiemos el *equilibrio* de dos masas M y m unidas por una barra muy liviana (sin masa) de largo ℓ y pivoteada en algún punto entre ellas de forma que el sistema permanezca en equilibrio.

Encontrar el valor de a y b , de forma que las partículas permanezcan en equilibrio. (Suponga que las dos masas M y m , se comportan como masas puntuales concentradas en el centro de la esfera).



Por equilibrio entendemos que no existe movimiento: ni traslación, ni rotación, por lo tanto, en la dirección vertical, se cumple que:

$$\vec{a} = 0 \implies \sum \vec{F} = 0, \quad (\text{VI.6})$$

$$N = (M + m)g. \quad (\text{VI.7})$$

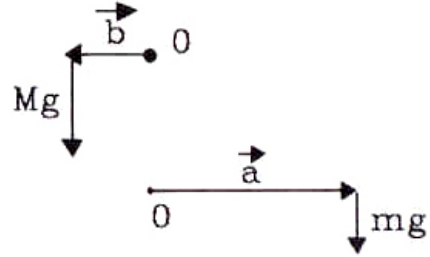
Sabemos que si ubicamos el punto de apoyo en un lugar arbitrario de la barra, volcará hacia uno de los lados. Volcar significa adquirir una velocidad angular. Para que esto no suceda el torque también debe ser cero. Elegimos como origen de coordenadas el punto de apoyo y con respecto a él, calculamos el torque generado por las masas M y m .

$$\vec{\tau}_M = \vec{b} \wedge M\vec{g} = b M g \odot$$

$$\vec{\tau}_m = \vec{a} \wedge m\vec{g} = a m g \otimes$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \implies$$

$$0 = \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_m = [b M g - a m g] \odot$$



Como la suma de los torques debe ser nula, para que no exista rotación, entonces:

$$b M = a m, \quad (1)$$

pero el largo de la barra es:

$$a + b = \ell. \quad (2)$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas y por lo tanto podemos resolver el problema. Su resultado es:

$$b = \frac{m}{M + m} \cdot \ell, \quad (\text{VI.8})$$

$$a = \frac{M}{M + m} \cdot \ell. \quad (\text{VI.9})$$

De esta forma, si ubicamos el pivote a una distancia a de la masa más pequeña, la barra permanecerá en equilibrio.

VI.3.1. Ecuaciones de la estática

Un cuerpo permanece en reposo (sin traslación ni rotación), si la suma del total de las fuerzas y torques que actúan sobre él, se anulan.

En estática, el torque puede ser evaluado con respecto a un origen arbitrario de coordenadas y no cambia su valor.

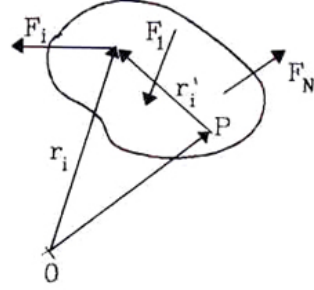
En dos dimensiones, la estática proporciona tres ecuaciones: dos de ellas provienen de las ecuaciones de Newton y la otra de la anulación del torque.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (\text{VI.10})$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad (\text{VI.11})$$

Torque con respecto a un punto arbitrario.

A continuación demostramos que en Estática el valor obtenido para el torque es *independiente* del punto que se tome como origen de coordenadas.



En la Figura aparece un conjunto de fuerzas arbitrarias $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$, que actúan sobre una figura con forma de riñón que representa al cuerpo rígido. Existen dos puntos: O y P , con respecto a los cuales tomaremos torque. Los vectores que unen el punto de referencia con las respectivas fuerzas, se designan con prima si provienen del punto P , por ejemplo, $\vec{r}_i'$. Los vectores sin prima, $\vec{r}_i$, están definidos teniendo al punto O como su origen.

Al calcular el torque total de las fuerzas con respecto al punto O , comprobaremos que toma el mismo valor que al repetir la operación pero ahora con respecto al punto P .

Como ambos puntos: O y P , son arbitrarios, concluiremos que el valor del torque en *estática*, es independiente del punto que se tome como referencia.

A continuación realizamos los cálculos explícitamente.

Como el cuerpo está en equilibrio, el torque total $\sum \vec{\tau}$, evaluado con respecto al punto O es:

$$\sum \vec{\tau} \equiv \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = 0,$$

usando la igualdad $\vec{r}_i = \vec{OP} + \vec{r}_i'$, obtenemos:

$$\sum \vec{\tau} = \sum_{i=1}^N (\vec{OP} + \vec{r}_i') \wedge \vec{F}_i,$$

como el producto vectorial es asociativo, tenemos:

$$= \sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i$$

$$\text{pero: } \sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i = \vec{OP} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OP} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OP} \wedge \vec{F}_n,$$

$$\text{entonces: } \sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{F}_i = \vec{OP} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right),$$

reemplazando este resultado en la ecuación original:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{OP} \wedge \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i,$$

$$\text{como la \textbf{estática} se caracteriza por: } \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0,$$

$$= \vec{OP} \wedge \vec{0} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i$$

$$\sum \vec{\tau}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_P \quad (\text{VI.12})$$

Concluimos que en *estática*, podemos tomar torque con respecto al punto que más nos convenga: aquel que produzca la expresión más simple o que entregue mayor información acerca de la magnitud de la fuerza que buscamos. El valor del torque, como se demostró, no depende del origen escogido.

Ejemplo

¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de roce estático μ para que la escalera de la Figura no resbale sobre el piso?

Conocemos el largo de la escalera L , sabemos que el pintor se ubica a una distancia s del suelo y que tiene una masa M . Despreciamos la masa de la escalera comparada con la masa del pintor. El ángulo que forma la escalera con el piso es 60° .

Consideramos la pared como una superficie sin roce. El roce en el piso es el único relevante para el equilibrio de la escalera.

Recordemos que:

$$\sin 30^\circ = 1/2, \quad \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2,$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2, \quad \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2.$$

Si no hay roce en el piso, se puede demostrar (**Ejercicio**) que no hay posibilidad de alcanzar equilibrio. Nadie, en su sano juicio, pone una escalera en un piso recién encerado.

Con el objeto de simplificar los cálculos, se desestima el roce generado entre la escalera y la muralla.

A partir del diagrama de cuerpo libre que se incluye y usando las ecuaciones [VI.10] y [VI.11], obtenemos:

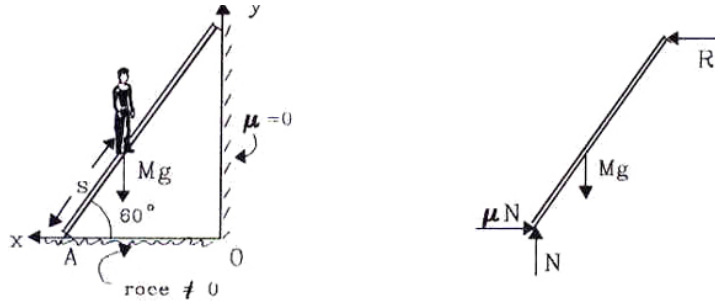


Figura VI.6: Escalera apoyada en una muralla sin roce. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la escalera.

$$\sum F_x = 0 \implies -\mu N + R = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \implies N - F_G = 0 \quad (F_G \equiv Mg) \quad (2)$$

El torque con respecto al punto A es:

$$\vec{r}_G \wedge \vec{F}_G = s M g \sin(90 + 60) \quad \otimes$$

$$\vec{r}_G \wedge \vec{F}_G = s M g \cos 60^\circ \quad \otimes$$

$$\vec{r}_R \wedge \vec{R} = L R \sin 120^\circ \quad \odot = L R \cos 30^\circ \quad \odot$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 = s M g \cos 60^\circ \quad \otimes + L R \cos 30^\circ \quad \odot$$

De esta última ecuación, y recordando que: $\otimes = -\odot$, obtenemos el valor de la reacción R:

$$s M g = L R \sqrt{3} \implies R = \frac{s M g}{L \sqrt{3}}. \quad (3)$$

Introduciendo este valor en la ecuación (1) obtenemos:

$$\mu N = R = \frac{s M g}{L \sqrt{3}},$$

y finalmente usando la ecuación (2): $N = F_G = M g$, encontramos el valor mínimo de μ :

$$\mu = \frac{s}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cualquier valor mayor para μ , es también una solución posible.

Comprobemos que este resultado contiene los casos extremos en los cuales se puede intuir, a través de la experiencia, la respuesta correcta. Por ejemplo, si $s = 0 \implies$ no necesita roce, puesto que el pintor se ubica justo en el piso.

Si $s = L \implies \mu = 1/\sqrt{3}$, el valor del roce debe ser máximo, como es natural si el pintor se ubica en el último peldaño de la escalera.

Es interesante notar que el roce necesario para mantener en equilibrio la escalera *no* depende de la masa del pintor. Si la escalera no resbala con un niño encima, tampoco lo hará con una persona de mayor masa. Lo que cambia son los valores de las reacciones sobre la pared y el piso. ¿Cómo cambian estas últimas afirmaciones si no despreciamos el roce entre la escala y la pared?

Ejercicio

Repita el Ejemplo anterior suponiendo que la escalera forma un ángulo α con el piso. Encuentre el valor de μ en este caso, y examine los límites para diversos valores del ángulo α .

Respuesta: $\mu = [s/L] \tan \alpha$. $\square$

Ejemplo

Un trozo de madera de base cuadrada, lado $2a$ y peso W , descansa sobre un piso cuyo coeficiente de roce estático es μ_e . A una altura h de la base se aplica una fuerza horizontal $\vec{P}$.

Encontrar la condición que debe cumplir el coeficiente de roce estático μ_e , para que el trozo de madera vuelque, sin deslizar, bajo el efecto de la fuerza $\vec{P}$.

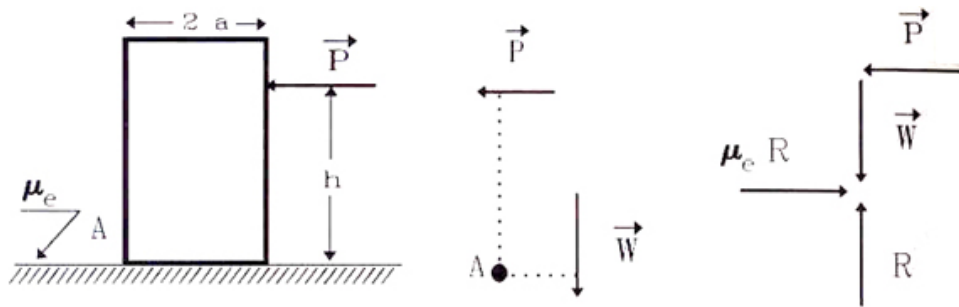


Figura VI.7: Tomando como origen el vértice A del bloque, aparecen dos torques: uno generado por la fuerza P y el otro debido al peso W del cuerpo. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

Tomando torque con respecto al vértice A, y suponiendo (correctamente) que el peso actúa justo en el centro del rectángulo que caracteriza a este objeto, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum (\tau_P + \tau_W) &= P h - W a = 0, \quad \text{para que el bloque esté a punto de volcar,} \\ \sum F_{\text{horizontales}} &= 0 \implies P \leq \mu_e W, \quad \text{cota para el valor máximo de } \vec{P}. \end{aligned}$$

Despejando P de ambas ecuaciones obtenemos: $a/h < \mu_e$. Esta es la condición necesaria para volcar el bloque. Al contrario, si $\mu_e < a/h$, el cuerpo comienza a deslizar sin volcarse, porque el torque es nulo y la fuerza $\vec{P}$ es mayor que la fuerza de roce que se le opone.

Podemos analizar este resultado: supongamos que a es muy pequeño, en este caso es muy difícil impedir que el bloque no vuelque, puesto que deslizará sólo si $\mu_e < a/h \approx 0$.

Supongamos que se desea trasladar un armario –una caja vertical cuyo alto es mayor que su ancho y mucho mayor que su fondo– de un punto a otro dentro de una pieza. Una forma de hacerlo es empujar desde un punto muy bajo del armario para evitar que se tumbe. Esta estrategia corresponde a poner h muy pequeño en nuestra solución. En este caso siempre ocurrirá que $\mu_e < a/h$ y el cuerpo –un armario, en este caso– deslizará sin volcarse.

Para finalizar, destaquemos que al tomar el punto A de la Figura como referencia para calcular el torque simplificamos la solución de este problema. La estrategia seguida fue la siguiente: se pensó primero que el cuerpo estaba a punto de comenzar a levantarse para terminar posteriormente volcando –puesto que ése es el caso crítico que nos interesaba– en ese instante, la fuerza de reacción del piso sobre el bloque se *aplicaba justo sobre el vértice A, el único punto de contacto con el piso*, de modo que esta reacción no generó torque alguno, al igual que la fuerza de fricción y, de esta manera, simplificamos la resolución del ejemplo propuesto. □

VI.4. VIGAS Y ESTRUCTURAS

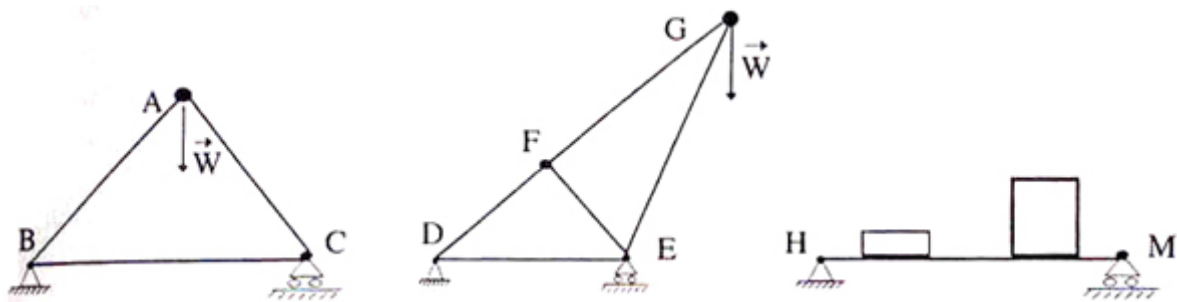


Figura VI.8: Se incluyen varios tipos de estructuras simples, isostáticas, que pueden ser resueltas –bajo las suposiciones que indicamos en el texto–, con las ecuaciones de estática.

Las estructuras de la Figura [VI.8] se denominan *isostáticas*, porque se pueden resolver usando sólo las ecuaciones de la estática. Se caracterizan porque en cada unión (por ejemplo, A, B,...H, en la Figura [VI.8]) *sólo se transmiten fuerzas y no torques*. En estos casos tampoco consideramos las deformaciones de las estructuras.

En el mundo real, las uniones transmiten fuerzas, torques y producen deformaciones; pero la inclusión de todas estas características corresponde más bien a un curso de resistencia de materiales, que a uno de introducción a la física.

Bajo estas consideraciones, el modelo de un puente corresponde a la estructura de la Figura [VI.11]. Los apoyos de un puente son diferentes en cada extremo y ambos se describen a continuación.

Una forma de apoyo (izquierda de la Figura [VI.11]) consiste en fijar una rótula al piso. Este extremo está soldado al piso. En el diagrama de cuerpo libre [VI.10] separamos el piso (o fundación) de la estructura y debemos reemplazarla por dos fuerzas perpendiculares entre sí. Una de las fuerzas impide que la estructura se deslice y la otra impide que se hunda en el piso. Como esta rótula es ideal *no* transmite torque.

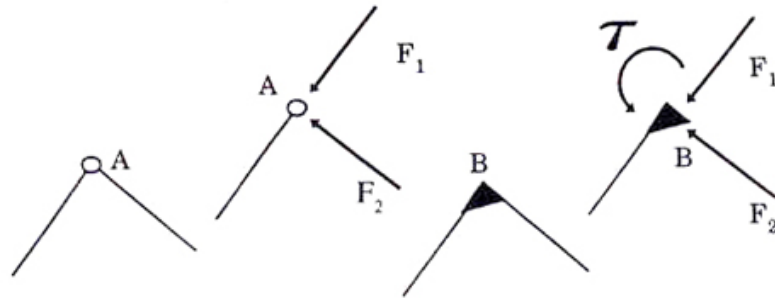


Figura VI.9: Los efectos de una unión ideal (izquierda) y otra más cercana a la realidad (derecha) son comparados en la Figura. En la unión ideal sólo se transmiten fuerzas. En la versión más realista de la derecha se incluye el torque que genera la unión.

Otra posibilidad es permitir la dilatación de la estructura – su cambio de longitud– para ello se reemplaza la rótula por un par de rodillos sobre los cuales se apoya la viga [VI.10]. De esta forma se permite el deslizamiento en dicho extremo.

En este tipo de soporte sólo se ejerce una fuerza perpendicular al piso. Aquí se desestima la fuerza de *roce* que se genera entre las dos superficies al compararla con la fuerza normal.



Figura VI.10: Dos tipos de soporte de estructuras: uno fijo al piso y el otro con rodillos que permiten el deslizamiento. Se incluye el diagrama de cuerpo libre de cada uno de ellos.

Los puentes férreos usualmente tienen este tipo de soporte en un extremo.

Estas dos uniones son las más recurrentes en este tipo de ejemplos. Ambas aparecen siempre de a pares en estructuras de mucha longitud, puesto que al dejar libre un extremo, permite la expansión o contracción de los materiales debido a los cambios de

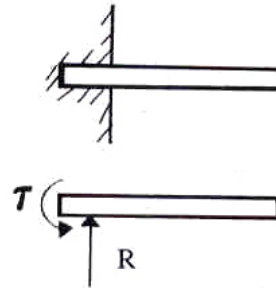


Figura VI.11: Modelo de la viga soportada en sus extremos por una unión fija y otra deslizante. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre de la estructura.

temperatura, evitando las deformaciones en la estructura. Además, como se señaló anteriormente, al incluir dos pivotes fijos en cada extremo, las ecuaciones de la estática [VI.10] y [VI.11], no proporcionan suficientes ecuaciones para resolver todas las incógnitas que aparecen, el problema deja de ser isostático y para resolverlo debemos analizar las deformaciones del cuerpo para obtener de allí las ecuaciones que faltan.

Otra forma de fijar un extremo de una estructura, es mediante un empotramiento. En este caso se fija sólo uno de los extremos de la viga. Esta configuración se denomina viga empotrada.

En el diagrama de cuerpo libre correspondiente a este caso, se debe reemplazar la muralla por un torque y una fuerza vertical que se aplican sobre la viga.



Resolvamos el siguiente ejemplo haciendo uso de las leyes de Newton y de las propiedades de las uniones respectivas en los extremos. Es notable que en esta primera aproximación al estudio de estructuras, no necesitamos mayores herramientas para obtener información relevante acerca de su comportamiento.

Ejemplo

Un modelo más primitivo de la estructura de un puente se reproduce en la Figura que se acompaña. Sobre el punto medio de la viga, cuyo peso es despreciable, actúa una fuerza externa W .

Calcular las reacciones en los extremos de la viga, los esfuerzos de corte y el torque que soporta la viga en cada uno de sus puntos.

Como la estructura es rígida entonces, por simetría $R_1 = R_2 = W/2$. Podemos obtener este resultado si, por ejemplo, calculamos el torque tomando el punto medio de

la barra como origen. Recordemos que –en el caso estático– el resultado es independiente del origen de referencia.

Calculemos ahora el esfuerzo de corte en cada punto de la barra y procedamos a graficarlo.

Para ilustrar qué es el esfuerzo de corte, supongamos que efectivamente cortamos la viga en un punto intermedio manteniendo el valor de las reacciones en los extremos de la viga. Obviamente, si no aplicamos una fuerza y un torque en el extremo en que se hizo el corte, la estructura comienza a rotar y desplazarse. Precisamente, la fuerza que debemos aplicar para mantener estática la estructura al cortarla, es lo que se denomina *esfuerzo de corte* y su cálculo se realiza del modo señalado: cortando un extremo de la viga y reemplazándola por una fuerza y un torque.

Calculemos primero el esfuerzo de corte y designémoslo como $s(x)$.

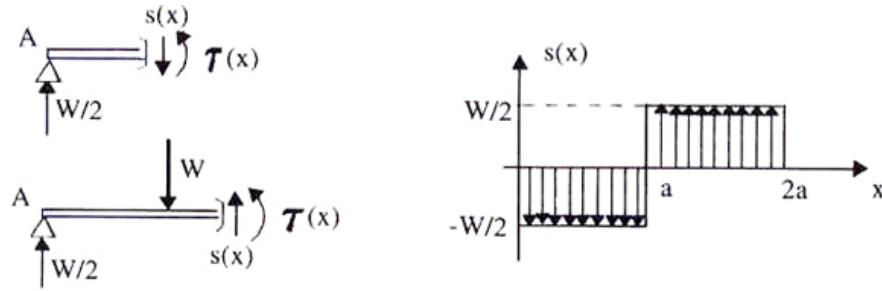


Figura VI.12: Se incluye el diagrama de cuerpo libre al cortar la viga a la izquierda y a la derecha del punto de aplicación de la fuerza W . También aparece un gráfico del esfuerzo de corte a lo largo de la viga.

El diagrama de esfuerzo de corte indica el esfuerzo que soporta la barra en cada uno de sus puntos para resistir el peso W aplicado. Hay una discontinuidad en $x = a$ debido a la existencia de la fuerza externa aplicada W .

Para $x < a$, al hacer la suma de las fuerzas a la izquierda de W , tenemos:

$$s = -\frac{W}{2} \quad \text{independiente de } x.$$

A la derecha de W , el diagrama de cuerpo libre me indica ($x > a$),

$$s = +\frac{W}{2} \quad \text{independiente de } x.$$

Con estos resultados podemos graficar el esfuerzo de corte. Si cortamos la viga en cualquier punto a la izquierda de W , debemos aplicar la fuerza $s = -W/2$ para sostener

el sistema y una fuerza $s = +W/2$ si cortamos la viga a la derecha de W . Estos son los valores que se grafican.

Calculemos el torque que debemos aplicar en cada punto de la viga para evitar que ésta gire. Usemos la notación introducida para designar un vector saliendo ($\odot$), o entrando en el plano del papel ($\otimes$).

Calculamos el torque producido por las fuerzas ubicadas a la izquierda del punto x y este resultado nos indica el valor del torque $\tau = \tau(x)$ que debemos aplicar en ese punto: x para evitar la rotación.

$x < a$	$x > a$
$\frac{W}{2} \cdot x \otimes + \tau(x) \odot = 0$	$\left(\frac{W}{2} \cdot x\right) \otimes + (W \cdot (x - a)) \odot + \tau \odot = 0$
$\left(-\frac{W}{2} \cdot x + \tau(x)\right) \odot = 0$	$[-(W a) + \frac{W}{2} \cdot x + \tau(x)] \odot = 0$
$\tau(x) = \frac{W}{2} \cdot x.$	$\tau(x) = W \left(a - \frac{x}{2}\right).$

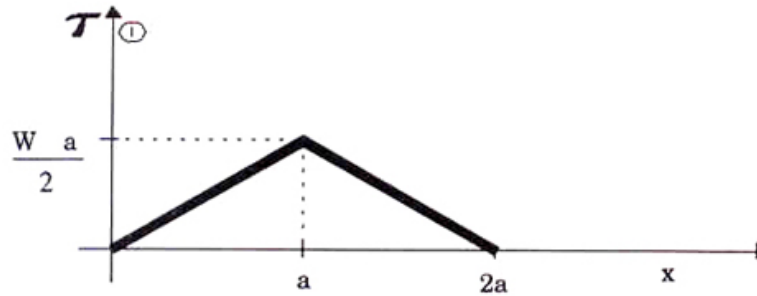


Figura VI.13: Gráfico del torque que actúa en cada punto de la viga. $\tau(x)$ indica el torque que debemos aplicar en el punto x para cancelar el proveniente del resto de las fuerzas. Hemos adoptado $\odot$ como sentido positivo.

¿Con qué objeto calculamos el torque en función de la posición?

Se desea conocer la deformación que sufre la barra debido a las cargas aplicadas.

Es posible demostrar (Ley de Euler-Bernuilli) que el valor del torque en cada punto es inversamente proporcional a ρ , el radio de curvatura de la forma que adopta la viga al deformarse:

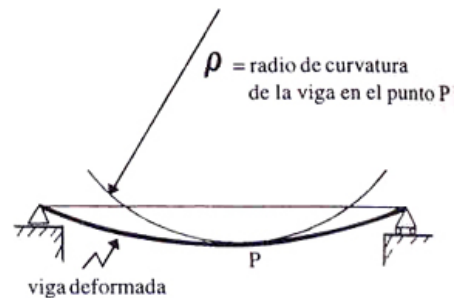
$$\tau(x) = \frac{k}{\rho},$$

La constante k es el producto de dos parámetros: $k = EI$, donde $E \equiv$ Módulo de Young e $I \equiv$ Momento de Inercia. E es un número que caracteriza la rigidez de un material, mientras más rígido, menos se curva bajo la misma carga externa.

El valor de I da una idea de la distribución de la masa de una sección transversal de la viga con respecto a una línea de simetría de la misma viga.

Su definición se incluye más adelante en este capítulo.

Una forma de entender el significado geométrico del radio de curvatura es la siguiente (ver Figura): tomar tres puntos muy cercanos de la viga deformada y trazar una circunferencia que pase a través de ellos. El radio de esta circunferencia, es el radio de curvatura ρ de la viga en dicho punto.



Si queremos el mínimo de deformación para una viga dada, entonces, el radio de curvatura debe ser lo más grande posible: $\rho \rightarrow \infty$, de esta forma la curva se aproxima a una línea recta.

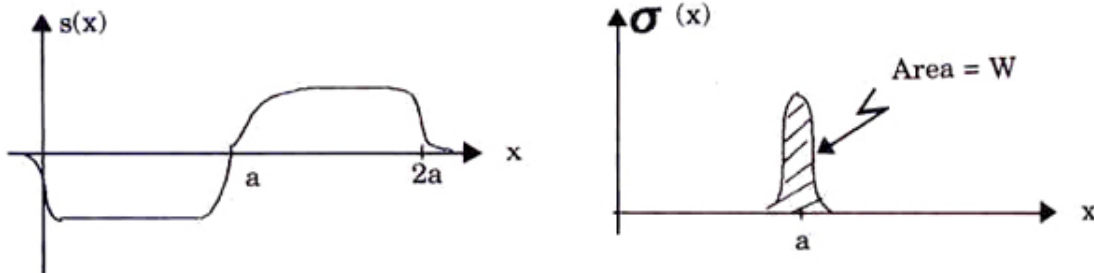


Figura VI.14: Una fuerza actuando en un punto de la viga es fácil de estudiar, pero es más realista suponer que la fuerza se distribuye en un pequeño sector de la viga. Aquí se esboza el diagrama de esfuerzo de corte para este caso.

Nota

Como en este problema nos acercamos un poco a la ingeniería, podemos comentar acerca del significado físico de tener una fuerza actuando sobre un punto de la viga. Esta situación es una aproximación razonable. Más cercano a la realidad –aunque más complicado en su expresión matemática–, es identificar la fuerza W con una distribución de *fuerzas por unidad de superficie*, en una vecindad del punto donde nosotros instalamos la fuerza externa W . Esta fuerza por unidad de superficie se denomina *presión*.

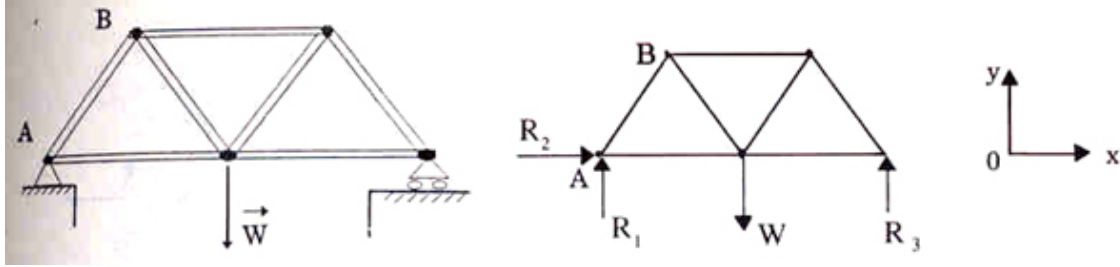


Figura VI.15: A la izquierda aparece un modelo simple de la estructura de un puente soportando una carga estática W . Se incluye el diagrama de cuerpo libre de la estructura.

En el caso de una viga, que la consideramos como un cuerpo sin dimensiones salvo longitud, la fuerza se distribuye por unidad de largo, $\sigma(x)$. Esta fuerza por unidad de largo se conecta a la fuerza W que nosotros usamos, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \sigma(x_i) \Delta x_i = W.$$

En el gráfico F_{total} versus x , se reproduce el esfuerzo de corte en su versión de fuerzas por unidad de largo distribuidas en una vecindad de W . Este resultado se puede comparar con el gráfico obtenido en el primer punto del ejercicio: $s(x)$ versus x .

Ejemplo

En la Figura [VI.15] aparece un modelo simple de un puente. W , representa una carga estática que descansa sobre esta estructura. Todas las barras son de largo a y tienen las mismas propiedades físicas.

a) Calcular las reacciones en cada uno de los soportes de los extremos del puente, generados por la fuerza W .

b) Calcular la tensión en la barra AB de la estructura.

a) Para calcular las reacciones en los apoyos usamos el único método que conocemos: las leyes de Newton y el diagrama de cuerpo libre.

Consideramos el puente como un todo rígido. Las leyes de Newton no tienen cómo distinguir entre el puente con sus barras y un cuerpo rígido, puesto que no se incluyen las deformaciones. Las barras sólo identifican dónde y en qué dirección actúan las fuerzas. Las ecuaciones de la estática permiten obtener los siguientes resultados:

$$1) \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 0,$$

$$2) \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 + R_3 = W.$$

Calculamos el torque tomando como origen el punto A:

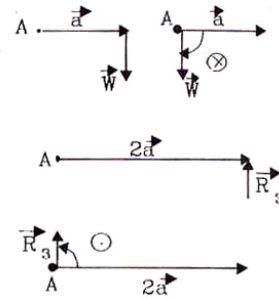
$$\vec{\tau}_W = a W \quad \otimes$$

$$\vec{\tau}_{R_3} = 2 a R_3 \quad \odot$$

$$3) \sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow -a W + 2 a R_3 = 0$$

Haciendo uso de las tres ecuaciones obtenemos los valores de las reacciones:

$$R_3 = \frac{W}{2}, \quad R_1 = \frac{W}{2}$$

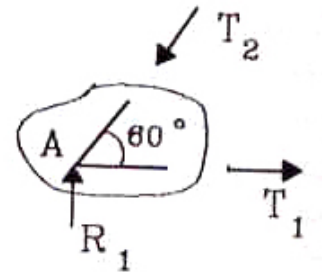


b) A continuación calculamos la tensión sobre la barra AB. El mismo método usado aquí puede aplicarse a cualquiera de las otras barras.

Como cada sección del puente debe estar en equilibrio para que el puente como un todo lo esté, entonces en cualquier sección arbitraria del puente se deben satisfacer las leyes de la estática. En particular en la sección que se indica en la Figura a continuación, debe cumplirse que:

$$\sum F_x = 0, \quad -T_2 \cos 60^\circ + T_1 = 0,$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_1 - T_2 \sin 60^\circ = 0.$$



Estas son todas las ecuaciones, puesto que al tomar torque con respecto al punto A, obtenemos $0 = 0$.

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, T_1 y T_2 , por lo tanto el problema está resuelto.

$$T_1 = \frac{W}{2\sqrt{3}}, \quad T_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}/2} = \frac{W}{\sqrt{3}},$$

donde T_1 y T_2 son las tensiones a las que están sometidas las barras.



Figura VI.16: La forma como cae un automóvil en un abismo depende de la aceleración que le imprima el conductor en los segundos previos a la caída: si no acelera cae rotando (Figura izquierda), si acelera no rota (Figura derecha).

VI.5. CENTRO DE MASA

VI.5.1. Introducción

Como ya hemos destacado, las leyes de Newton tratan todos los cuerpos, independiente de su tamaño y forma, como objetos puntuales. Todas las fuerzas se concentran en un punto y es su movimiento el que estudiamos con dichas ecuaciones.

En esta sección, analizaremos en detalle el movimiento de un cuerpo rígido plano. Podemos adelantar nuestra conclusión: al aplicar las leyes de Newton a un cuerpo rígido extendido, existe un punto que lo representa y en el cual podemos aplicar todas las fuerzas que actúan sobre él. Este punto se denomina *centro de masa* y es puramente un lugar *geométrico*: no necesariamente coincide con un punto material del cuerpo.

En lo que sigue demostraremos que el método empleado hasta ahora para resolver un problema mediante las leyes de Newton, se refiere exclusivamente al estudio del movimiento de un punto particular: el centro de masa. El formalismo anterior es insuficiente para predecir el movimiento de un cuerpo con respecto a su centro de masa.

Para poder estudiar este movimiento debemos recurrir al torque.

Al introducir el torque, automáticamente se incorporan las dimensiones de los cuerpos estudiados. La experiencia indica que al aplicar *un par de fuerzas*, es decir, dos fuerzas de igual magnitud pero actuando en puntos diferentes y con sentidos opuestos, el objeto no se desplaza sino comienza a rotar en torno de sí mismo. El centro de masa de este cuerpo debe permanecer en reposo, de acuerdo a las leyes de Newton definidas en la sección anterior.

El caso de un automóvil que llega al borde de un abismo y posteriormente cae, es un ejemplo de la diferencia entre el movimiento del centro de masa (pura traslación) y el movimiento de un cuerpo rígido (traslación y rotación simultánea). De hecho, la

respuesta del conductor en ese instante hace la diferencia en la forma de caer.

Si el automóvil se representa mediante un punto, éste describirá una parábola en su caída al mar, como las que hemos estudiado con anterioridad. Esta es la trayectoria del centro de masa.

A la izquierda de la Figura [VI.16], ilustramos lo que sucede una vez que el punto donde se supone se aplica el peso del automóvil, se asoma al precipicio, su peso genera un torque que comienza a girar el automóvil a medida que cae. Esta rotación, una vez adquirida, se conserva y el vehículo se precipita girando en torno a sí mismo.

A la derecha de la misma Figura, se proyecta un caso similar al anterior, con sólo una diferencia: el piloto del automóvil al percatarse de su situación, no se deja llevar por el pánico sino que acelera el auto al máximo. (Es probable que hayamos presenciado un auto partiendo con el máximo de aceleración y observado que levanta su parte delantera).

Como resultado de esta aceleración del automóvil, se genera un torque que tiende a levantar el frente del automóvil. Si este torque equilibra aquel generado por su peso al asomarse al abismo, el automóvil permanece horizontal (la suma de torques externos es nula), no adquiere rotación y el automóvil cae sin rotar.

En estos dos casos apreciamos que la incorporación del torque en el análisis de este ejemplo, añade información acerca de las características de la caída de un cuerpo con dimensiones finitas. Estas propiedades permanecen ocultas cuando representamos un automóvil mediante un punto material.

(Note que el comportamiento descrito es válido sólo si el automóvil tiene tracción trasera. Explique porqué.)

Otro ejemplo interesante ocurre en una rama del atletismo: en salto alto, es posible mostrar que la técnica que emplean los profesionales de esta especialidad se orienta a lograr que su *centro de masa pase por debajo* de la vara y, por supuesto, que el resto del cuerpo la sobrepase y no la toque. Este ejemplo ilustra la idea que el centro de masa es un lugar geométrico y no un punto material del objeto analizado.

En la siguiente sección demostraremos que el centro de masa (CM) de un cuerpo homogéneo coincide con el punto de simetría de este objeto.

Por ejemplo, en el caso de una pelota de fútbol, el centro de masa se ubica en el origen de la esfera. Si al golpearla se le aplica una fuerza en una dirección que *no* pasa por el (CM), la pelota se desplaza (porque hay una fuerza neta aplicada durante un cierto intervalo de tiempo) pero también *rota* en torno al CM debido a que la fuerza externa genera un torque con respecto al CM.

Si la pelota sale disparada con mucha rapidez y rotando con respecto a su centro, el *roce* con el aire genera una diferencia de presión en caras opuestas de la pelota. Esta diferencia de presión equivale a una fuerza actuando en la dirección perpendicular al plano de movimiento de la pelota, que la desvía de la parábola plana, que era su trayectoria esperada. Esto es lo que los jugadores llaman *darle con efecto*.

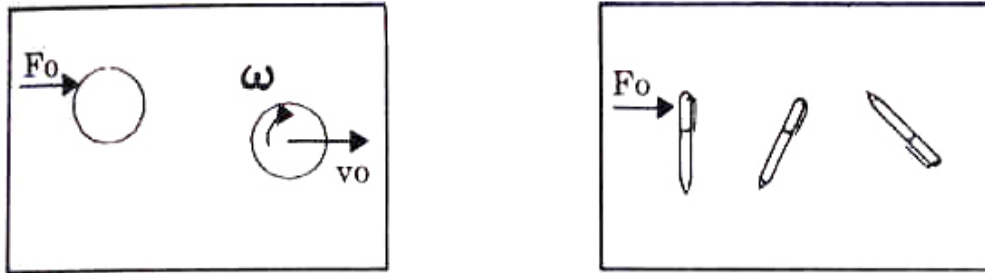


Figura VI.17: Al aplicar una fuerza en una dirección que no atraviesa el centro de masa de un cuerpo, se produce un efecto de traslación y otro de rotación.

Otro ejemplo en el cual se puede apreciar la existencia de este punto ideal –el centro de masa– es el siguiente: sobre una mesa sin roce descansa un lapicero. Al golpearlo en distintos puntos, notamos que en algunos de ellos el lapicero *rota* notablemente menos que en otros. De hecho podemos verificar que al golpearlo en un cierto punto, sólo sufre un desplazamiento y no aparece rotación. Esto nos indica que la línea de acción de la fuerza aplicada pasó justo por sobre el *centro de masa*, puesto que el lapicero se comportó exactamente como un objeto puntual.

Resumen:

En Estática podemos tomar torque con respecto a cualquier punto del espacio.

Las leyes de Newton actuando sobre un cuerpo extendido, se aplican concentrando las fuerzas en un punto: el centro de masa.

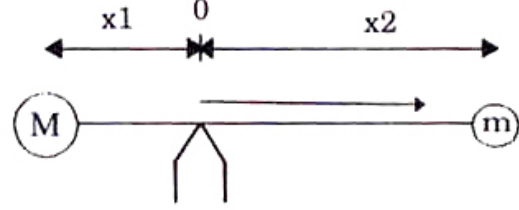
Si el torque neto con respecto a un punto no es nulo, el cuerpo comenzará a rotar. Si la dirección de las fuerzas aplicadas atraviesa el centro de masa, el cuerpo sólo experimenta un desplazamiento.

VI.5.2. Localización del centro de masa

Al resolver el ejercicio de las masas unidas por una barra de largo L , que se equilibraban sobre la punta de un alfiler, obtuvimos una indicación previa acerca de la ubicación del centro de masa. De acuerdo a la sugerencia dada, para equilibrarlas debíamos ubicar el pivote a una distancia x_1 de la masa M .

Incluyendo los signos, la solución de este problema es:

$$\begin{aligned}
 -M \cdot x_1 &= m \cdot x_2, & x_1 &= -\frac{m}{M+m} L \\
 -x_1 + x_2 &= L, & x_2 &= \frac{M}{M+m} L
 \end{aligned}$$



Si esta es la configuración de equilibrio, entonces el punto de apoyo es el centro de masa del sistema. La razón es la siguiente: el torque generado por el peso de una de las masas cancela al torque de la opuesta, si tomamos el punto definido por la coordenada x_1 como el origen. La fuerza de reacción del soporte debe obviamente localizarse en el mismo punto para no generar un torque y comunicar rotación al cuerpo.

Con este argumento localizamos la fuerza de reacción del soporte. Su módulo se obtiene ubicando todas las fuerzas en el punto de apoyo e imponiendo $\sum \vec{F} = 0$.

Podemos, además, repetir el experimento descrito para el lapicero ubicado sobre una mesa sin roce, ilustrado en la Figura anterior, utilizando ahora a la barra con las dos masas en su lugar. Con los argumentos desarrollados, sabemos que si le damos un golpe justo en el centro de masa –definido por x_1 ó x_2 –, la barra no rotará y sólo saldrá disparada moviéndose paralelamente a sí misma. Si la golpeamos en cualquier otro punto, la barra experimentará simultáneamente una rotación y un desplazamiento.

Restringiéndonos a una dimensión, el centro de masa (CM) para un sistema de partículas, está definido como:

$$x_{CM} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (\text{VI.13})$$

esto es, el CM es el valor medio de la coordenada de cada una de las partículas usando como factor de peso sus respectivas masas.

En el ejemplo anterior de la barra, la fórmula del centro de masa da la siguiente ubicación para el CM:

$$x_{CM} = \frac{-M x_1 + m x_2}{M + m} = 0.$$

Debido a que el numerador de esta ecuación es nulo, el CM coincide con el origen de coordenadas.

Una expresión análoga a la del centro de masa se usó en la definición de la *velocidad media* en Cinemática. En ese caso, el factor de peso con respecto al cual se promedió fue el tiempo durante el cual ocurrió cada velocidad. En el caso del CM el factor de peso de la coordenada x_i es la masa asociada con ella.

Así, encontrar el centro de masa de un sistema de partículas puntuales se reduce a ubicar la *distribución espacial media* de las masas que componen un objeto.

Si consideramos un objeto en dos dimensiones, el Centro de Masa, siendo un punto matemático, debe estar representado por dos coordenadas (x, y) . La coordenada y_{CM} se define en forma idéntica a la coordenada x_{CM} :

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (\text{VI.14})$$

La importancia de esta definición queda corroborada por la experiencia. Si calculamos la ubicación del Centro de Masa de un objeto, usando esta fórmula y luego, por ejemplo, se sostiene el cuerpo desde dicho punto, se observará que el cuerpo *no rota*. También, si se le da un impulso, exactamente en dicho punto, se verificará que el cuerpo no experimenta rotación, sólo desplazamiento.

Un modelo muy simple de un cuerpo sólido, consiste de un gran número de partículas puntuales de masa m unidas cada una a su vecina mediante un resorte de constante k . (Este modelo, por ingenuo que parezca, reproduce varias propiedades importantes de un sólido, entre ellas su capacidad calórica.)

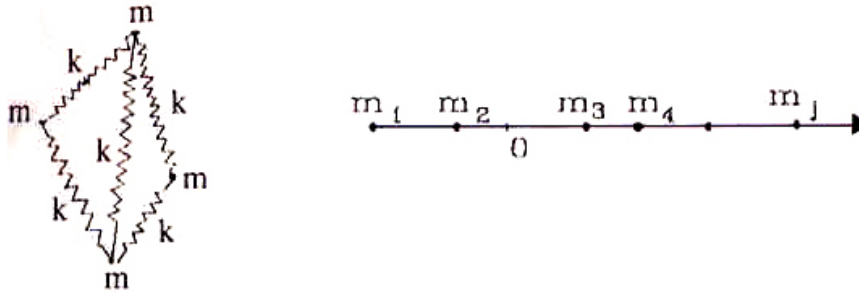


Figura VI.18: Modelo de un sólido unidimensional: masas unidas con resortes (derecha). Un enrejado de resortes, en tres dimensiones, fue utilizado para estudiar la absorción de calor de un cuerpo sólido por P. Debye y A. Einstein.

Volviendo al caso más simple, aquel de un modelo en una dimensión, el centro de masa –como ya vimos–, se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{M}$$

donde $M \equiv \sum_{i=1}^n m_i$: Masa total del sistema.

Lo que hemos hecho es *pesar* la posición de cada objeto con su respectiva masa. Vale decir que si una partícula tiene una masa muchísimo mayor que el resto tendrá el

centro de masa muy cerca de ella, puesto que en la ecuación anterior la posición de dicha partícula será la de más peso dentro de la suma.

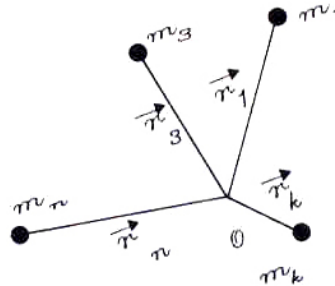
Otro caso donde se emplea un procedimiento similar es en el cálculo del promedio de notas cuando existen pruebas con coeficiente dos. Como su nombre lo indica, estas pruebas *pesan* el doble, comparadas con el resto, en el resultado final.

Generalizando esta expresión al caso de dos dimensiones y escribiéndola en forma vectorial:

$$\vec{x}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (\text{VI.15})$$

o en sus componentes:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$



Ejemplo

Encontrar el centro de masa de una varilla homogénea de largo ℓ y masa m .

De acuerdo a la afirmación que el centro de masa de un cuerpo homogéneo se encuentra en su centro de simetría, concluimos que el centro de masa de una varilla de espesor despreciable se encuentra justo en su punto medio.

Podemos llegar a este resultado calculándolo directamente o empleando un truco, como explicamos a continuación.

Tomemos el origen de coordenadas en el centro mismo de la barra, procedamos a dividirla en pequeños elementos finitos y sumar las coordenadas de cada uno de ellos en forma *simétrica* con respecto al origen. Debido al cambio de signo de la coordenada x_i al tomar el elemento de barra simétrico en la región $x < 0$, la suma se cancela de a pares: $m_i \cdot x_i + m_j \cdot x_j = 0$ porque $m_i = m_j$, (barra homogénea), y $x_j = -x_i$, al tomar el elemento simétrico con respecto al origen.

Este argumento indica que la coordenada del centro de masa es: $x_{CM} = 0$.

Nota

Al calcular $(\sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i)$ debemos considerar siempre las simetrías para acortar el álgebra. De hecho, *si* el cuerpo es *homogéneo* (es decir: tiene las mismas propiedades en todos sus puntos), el centro de masa se ubica en el centro geométrico de la Figura, el punto que contiene mayor número de simetrías.

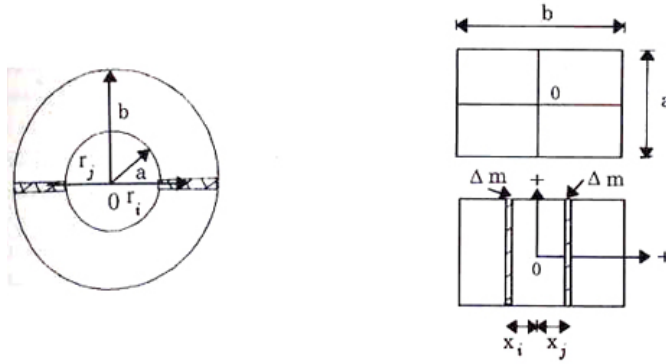


Figura VI.19: Usando las simetrías de cada uno de los dos cuerpos continuos que se incluyen, se puede obtener la posición del centro de masa de ellos, directamente sin tener que calcular explícitamente.

Obviamente el punto O (en los dos casos de la Figura) es el que posee más simetrías. Si queremos verificar este resultado nos conviene tomar ese punto como origen de coordenadas y sumar en torno a él en forma simétrica:

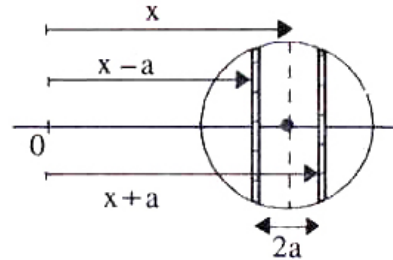
$$+\Delta m \cdot x_i + \Delta m \cdot x_j = 0 \quad (x_i < 0, x_j > 0,)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \Delta m_i \cdot x_i = 0,$$

(puesto que los términos se anulan de a pares).□

Ejercicio

Demostrar que el centro de masa de un disco cuyo origen de coordenadas no coincide con su centro, como se indica en la Figura, es precisamente el centro del disco. Con este ejercicio debe quedar claro que el centro de masa es un punto geométrico y su localización no depende de la ubicación del sistema de coordenadas. $\square$



De la misma forma como dividimos una barra en elementos infinitesimales, podemos descomponer un cuerpo de forma arbitraria. Este debe ser dividido en partes pequeñas, pero simétricas, de manera que su CM sea conocido. Con estos datos y la fórmula del CM podemos encontrar el centro de masa del cuerpo. Para ello debemos sumar sobre todos los elementos en que se subdividió el cuerpo, representados por las masas puntuales ubicadas en su centro de simetría.

Ejemplo

Ubicar el CM del disco de la Figura siguiente.

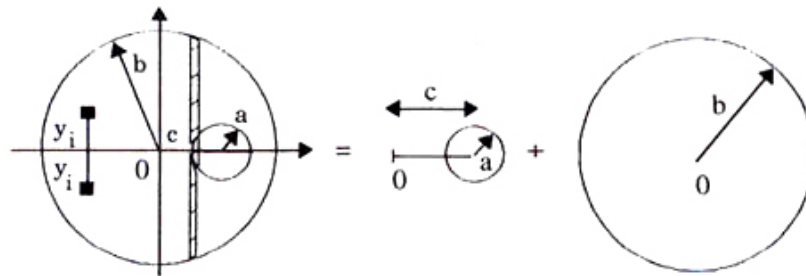


Figura VI.20: El disco original se compone aquí de un disco imaginario de masa negativa y de otro completo. El centro de masa se obtiene con la fórmula usual para el CM. Con esta estrategia, acortamos el cálculo en forma considerable.

Por simetría, el centro de masa se debe ubicar en el eje x , es decir con $y_{CM} = 0$. Para demostrarlo, comenzamos por la expresión del CM:

$$y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

Como podemos sumar esta expresión en la forma que más nos convenga, tomamos dos elementos de masa, m_i y m_j , simétricos con respecto al eje x ; así se cumple que $y_i + y_j = 0$. Como además el cuerpo es homogéneo, elegimos los elementos con igual masa: $\Delta m_i = \Delta m_j = \Delta m$, de esta forma se cumple $[\Delta m] y_i + [\Delta m] y_j = 0$. Si sumamos de a pares en esta forma en el resto del disco tenemos $\Delta m \sum_{i=1}^N y_i = 0 = y_{CM}$.

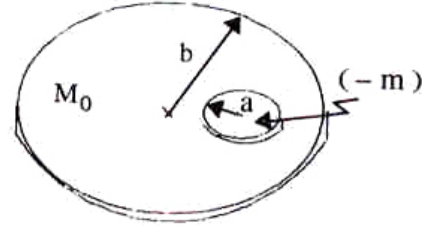
Estos métodos serán abandonados al utilizar el cálculo integral en estos problemas.

¿Cómo evaluamos x_{CM} ?

Debido al orificio de radio $r = a$, *no* existe simetría con respecto al eje y .

Para resolver este problema utilizamos un *truco*: Las ecuaciones *no* pueden saber que no existen masas negativas. Nos aprovechamos de esto y consideramos el problema como la superposición de dos masas imaginarias que al sumarlas nos dan el disco original, con la sección que le falta. Estos dos objetos son:

- Disco *lleno* de radio b y masa M_0 .
- Disco de radio a y masa $-m$ (negativa), ubicado justo donde falta el pedazo en el disco original.



Al superponerlas se obtiene la geometría propuesta, ya que la masa negativa *cancela* su equivalente de masa positiva en el disco lleno.

¿Qué valor toma la masa $-m$, que debemos superponer sobre el disco completo?

En primer lugar, deberá tener las mismas dimensiones que el disco que falta en el original. Además, el valor de su masa debe ser igual (en magnitud) a la masa de un disco del mismo tamaño.

Note que $M = -m + M_0$, el disco original es igual al disco de masa M_0 menos el disco de masa negativa. M es la masa total del disco original, con el forado.

Como la densidad de ambos discos debe ser la misma, tenemos:

$$\rho = \frac{M_0}{\pi b^2 h} = \frac{m}{\pi a^2 h} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{a^2}{b^2} M_0.$$

Donde ρ es la masa del disco y h su espesor. La masa del disco imaginario es:

$$m = -\frac{a^2}{b^2} M_0.$$

Puesto que el centro de masa es una sumatoria, siempre es posible sumarla en el orden que más nos convenga. Lo único relevante es no dejar fuera ninguna de las componentes de la suma.

Por simetría, podemos deducir rápidamente que el centro de masa de un disco lleno homogéneo, M_0 , se ubica en su centro (ver Ejemplo anterior). El centro de masa del disco

con el orificio se calcula entonces como la suma de los centros de masa de dos cuerpos: el disco lleno y el de masa negativa. Este último se superpone a M_0 de forma que su centro coincida con el centro del disco que falta en el problema original. El resultado se puede obtener considerando ambos como partículas puntuales de masa M y $-m$, respectivamente, ubicadas en su centro correspondiente. La expresión que resulta es:

$$x_{CM} = \frac{0 \cdot M_0 + c \left(-\frac{a^2}{b^2} M_0 \right)}{M_0 - \frac{a^2}{b^2} M_0} = \frac{-a^2 \cdot c}{b^2 - a^2} = (-1) \left[\frac{c \cdot a^2}{b^2 - a^2} \right].$$

La ubicación del centro de masa no depende de la masa M_0 ni de su densidad. Este resultado era esperado puesto que –en los cuerpos homogéneos– el CM es un punto que depende de la geometría del sistema. $\square$

Ejercicio

La expresión obtenida anteriormente es válida si $(a + c) \leq b$. Explique porqué debe cumplirse esta desigualdad. ¿Es válido este método si $(a + c) > b$?

Resumiendo:

- En la expresión de x_{cm} , el primer término de la suma es $0 \cdot M_0$, porque la masa del disco lleno es M_0 y su centro de masa se ubica en el origen de coordenadas, por lo tanto $x = 0$.

El otro término corresponde al producto de la masa del disco imaginario por la distancia desde el origen hasta el centro de este disco que, obviamente, coincide con su centro geométrico.

- Hemos resuelto el problema del disco con un agujero circular como una superposición de dos discos. Hemos reemplazado cada uno de los discos por una masa puntual ubicada en su centro, que corresponde al Centro de Masa de cada uno de los discos. $\square$

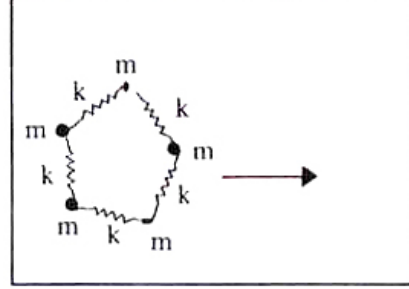
VI.5.3. Movimiento del centro de masa

Estudiemos la dinámica del centro de masa. El resultado que obtendremos fue ya adelantado: el centro de masa se mueve como un punto que concentra toda la masa y está sometido a la suma de todas las fuerzas externas.

Supongamos que las masas de la Figura descansan sobre una mesa sin roce y están oscilando en direcciones al azar. Simultáneamente, están moviéndose como un todo en una dirección arbitraria. Esto último quiere decir que si se suprimieran las oscilaciones de cada punto, el cuerpo se desplazaría como un sólido rígido en una cierta dirección.

Supongamos que el sistema consta de un número mucho mayor de partículas que las que aparecen en la Figura: ¿Cómo podemos extraer alguna información general acerca de este sistema?

Conviene recurrir, en primer lugar, a las propiedades del centro de masa. Sin duda es el más fácil estudiar:



$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

Estudiemos en detalle la coordenada x . El resultado obtenido será similar a lo que suceda con la coordenada y . Ordenemos primero la ecuación del centro de masa:

$$\left[\sum_{i=1}^N m_i \right] x_{CM}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot x_i(t).$$

Ahora hacemos lo usual en cualquier problema en que exista movimiento, tomamos la diferencia entre dos instantes t_1 y t_2 separados por un intervalo Δt y simultáneamente, tomamos el límite $\Delta t \rightarrow 0$, para poder aplicar las leyes de Newton al movimiento de cada una de las partículas:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \frac{x_{CM}(t + \Delta t) - x_{CM}(t)}{\Delta t} \right] = \sum_{i=1}^N m_i \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \right] \right),$$

$$\text{pero } \sum_{i=1}^N m_i \equiv M \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x_{CM}(t + \Delta t) - x_{CM}(t)}{\Delta t} \right) \equiv v_{CM}|_x,$$

$$\text{con } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \right) \equiv v_i|_x,$$

la componente x de la velocidad de la partícula i -ésima.

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$M \vec{v}_{CM}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i(t).$$

Definiendo el término de la izquierda de la ecuación como la cantidad de movimiento del centro de masa y la expresión de la derecha como la cantidad de movimiento de cada una de las partículas, obtenemos la siguiente expresión:

$$\vec{P}_{CM}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t)$$

Derivando esta expresión para extraer la fuerza que actúa sobre cada una de las partículas, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P}_{CM}(t + \Delta t) - \vec{P}_{CM}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i(t + \Delta t) - \vec{p}_i(t)}{\Delta t} \right), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} &= \sum_{i=1}^N \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

En este último paso, hemos usado –entre otras propiedades– que el límite de una suma es igual a la suma de los límites de cada una de sus componentes.

A continuación tomamos el paso más importante: introducimos la física al problema, incorporando las leyes de Newton en estas expresiones:

$$\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} \equiv \vec{F}_{ext}^{(i)},$$

donde $\vec{F}_{ext}^{(i)}$ es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i -ésima: esta es la segunda ley de Newton. La aceleración de una partícula puntual es proporcional a la fuerza *neta* que actúa sobre ella. En este caso $\vec{F}_{ext}^{(i)}$, identifica la suma de las fuerzas que las otras partículas, a través de los resortes, ejercen sobre la masa i -ésima, más las fuerzas externas –como la gravitación u otras– que actúan sobre la partícula.

El primer grupo de fuerzas: aquellas que son generadas por las otras partículas del sistema, se denominan *internas*. Es conveniente distinguirlas del resto porque –como demostraremos a continuación–, a partir de la tercera ley de Newton de acción y reacción, estas fuerzas internas se anulan entre sí.

Introduciendo estos resultados en la ecuación anterior:

$$\frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} = \sum_i \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}^i$$

La fuerza F^i se descompone, como ya se indicó, de la siguiente forma:

$$F^i \equiv \underbrace{F_{\text{ext}}^i}_{\substack{\text{fuerzas externas} \\ \text{actuando sobre la} \\ \text{partícula } i\text{-ésima.}}} + \underbrace{F_{\text{int}}^i}_{\substack{\text{fuerzas internas,} \\ \text{provenientes del resto} \\ \text{de las partículas,} \\ \text{actuando sobre la} \\ \text{partícula } i\text{-ésima.}}}$$

Las fuerzas internas que actúan sobre la partícula i -ésima, que provienen del resto de las partículas, se escriben como:

$$F_{\text{int}}^i = \sum_{j \neq i}^N F^{ji}.$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\frac{\Delta P_{CM}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{i=N} (F_{\text{ext.}}^i + F_{\text{int}}^i) = \sum_i F_{\text{ext}}^i + \sum_i F_{\text{int}}^i = \sum_i F_{\text{ext}}^i + \sum_i \left(\sum_{j, \text{con } i \neq j} F_{\text{int}}^{ij} \right).$$

Por el principio de acción y reacción, todas las fuerzas internas se anulan de a pares entre sí, por lo tanto:

$$\sum_i \sum_{j, i \neq j} F_{\text{int}}^{ij} = 0, \quad \text{puesto que} \quad F^{ij} + F^{ji} = 0, \quad \forall i \neq j, \quad (\text{VI.16})$$

la fuerza con que la partícula identificada con la letra i actúa sobre la partícula j , es idéntica pero de sentido opuesto a la fuerza que esta misma partícula, j ejerce sobre la i , y por lo tanto se cancelan de a pares. Finalmente, después de esta simplificación, la ecuación de movimiento del centro de masa queda:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta \vec{P}_i}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{ext}}, \Rightarrow \text{sólo sobreviven las fuerzas externas al sistema.}$$

Resumen:

$$\frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{externas al sistema}},$$

Escrito de otra forma:
$$\Delta \vec{P}_{CM} = \vec{F}_{ext.} \Delta t. \quad (\text{VI.17})$$

Se desprende de este resultado que si no existen fuerzas externas sobre el sistema, $\vec{F}_{ext} = 0$, el *centro de masa* se mueve con *momentum*:

$$\vec{P}_{CM} = \text{constante.}$$

Este es un resultado importante. Se utiliza especialmente en el estudio de choques de partículas.

En el caso de las masas unidas por resortes, referidas al comienzo de esta sección, por arbitrarias que parezcan allí las vibraciones del sistema, éstas deben ser de tal forma que el centro de masa viaje en línea recta y no oscile, puesto que *no* existen fuerzas externas al sistema. Todas las fuerzas son internas.

Ejemplo

Se tienen dos partículas de igual masa que, mediante un hilo, comprimen un resorte que las separa. El sistema se lanza con velocidad $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = v_0$; al llegar a su máxima altura, el hilo se corta, y en ese instante las masas se separan con una velocidad v_0 *con respecto al centro de masa*. Ubique el lugar donde caen las dos masas. Encuentre el lugar donde se encuentra el CM del sistema cuando ambas partículas tocan el suelo.

Nota

Suponemos que al separarse las partículas sólo adquieren velocidades en la dirección horizontal.

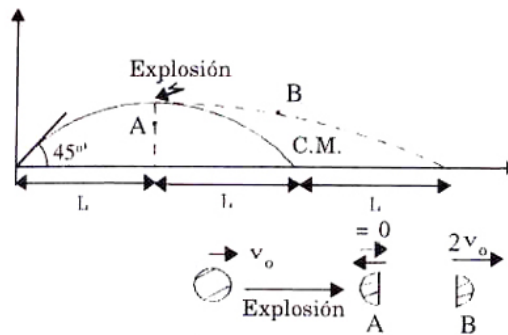
Hemos elegido la velocidad con que se separan las masas, medidas con respecto al CM, igual a la velocidad inicial v_0 , para disminuir el álgebra del problema.

Como ambas componentes de la velocidad son iguales, entonces el ángulo de lanzamiento fue de 45° .

Al llegar a su máxima altura h :

$$2g \cdot h = v_0^2, \quad h = \left(\frac{v_0^2}{2g} \right),$$

el objeto explota. La semiesfera A queda en reposo con respecto a la tierra, puesto que en el enunciado se afirma que su velocidad después de la explosión es precisamente $(-v_0)$ con respecto al Centro de Masa. Al sumar las velocidades se cancelan y, en consecuencia M_A cae verticalmente.



La semiesfera B sale disparada en la dirección horizontal con una velocidad $2v_0$ y por lo tanto alcanza una distancia $2L$ (ver Figura), ya que B –o cualquier otro cuerpo– demora lo mismo en caer una altura h que en elevarse *hasta* esa misma altura.

Recordemos que ambos movimientos (horizontal y vertical) son independientes y que por lo tanto A y B tocan el suelo simultáneamente. El centro de masa viaja como si nada hubiera ocurrido, porque la *explosión origina sólo fuerzas internas* y este punto matemático cae justo en el punto medio del trazo que separa ambas partículas al tocar tierra.

Este ejemplo muestra que el centro de masa es un *punto matemático* que no necesariamente coincide con un punto material del cuerpo que representa. $\square$

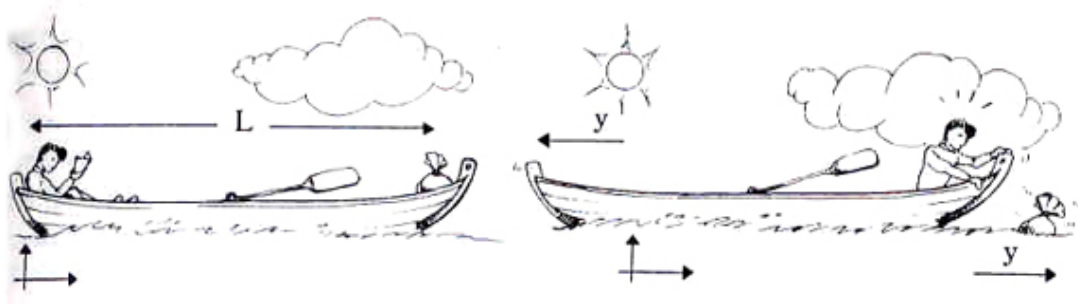


Figura VI.21: Designamos por y la distancia que se ha desplazado el centro de masa del bote.

Ejemplo

Un estudiante de masa m está sentado en un extremo de un bote de masa M . El mar está tranquilo y no hay viento. Al acomodarse, el estudiante realiza un movimiento brusco y la bolsa con la merienda, ubicada al otro extremo del bote, cae al mar. De

inmediato corre hacia el otro extremo –con una velocidad v con respecto al bote– para recuperarla. Si el largo del bote es L metros, ¿a qué distancia de la bolsa se encontrará el estudiante cuando logra alcanzar la otro punta del bote?

Puesto que en la dirección horizontal no existe ninguna fuerza externa, el momentum del sistema *estudiante–bote* se conserva. Como inicialmente el bote estaba en reposo, el momentum inicial es nulo. Supondremos que las velocidades son constantes, tanto del bote como del estudiante. Esta suposición no es esencial, sólo simplifica los cálculos.

$$P_{CM} = 0 = P_{\text{estudiante}} + P_{\text{bote}} = m(v - V) - MV,$$

donde $(v - V)$ representa la velocidad relativa del estudiante con respecto al mar. Hemos supuesto, como es natural, que el bote se mueve en sentido opuesto al estudiante. La velocidad del bote es:

$$V = \frac{m}{(m + M)} v.$$

Todo esto transcurrió en un intervalo de $T = L/v$ segundos. (Recordemos que v es la velocidad del estudiante con respecto al bote.)

Como el bolso permaneció sin moverse en el agua, cuando el estudiante llegó al otro extremo, la distancia que los separaba era el desplazamiento del bote con respecto al agua, y :

$$y = VT = \frac{m}{(m + M)} v \frac{L}{v}, \implies y = \frac{m}{(m + M)} L.$$

En este resultado no figura la velocidad que llevaba el estudiante; sólo depende de las masas y el largo L del bote.

Lo que sucede es lo siguiente: si el estudiante trata de ir más rápido, debe empujar con mayor fuerza con su pie en el piso para darse más impulso, esto genera –a través del principio de acción y reacción– una mayor velocidad para el bote. El estudiante se demora menos en llegar al otro extremo, pero el bote viaja más rápido, compensándose un efecto con otro.

Resolvamos este problema empleando solamente las propiedades del CM. Como no hay fuerzas externas y el sistema está inicialmente en reposo, el CM no puede desplazarse: debe permanecer en el mismo lugar desde el comienzo hasta el final de la carrera.

Tomemos como origen de coordenadas un punto –*en el mar*– que coincida con el extremo del bote donde se encuentra inicialmente el estudiante. A continuación escribamos la ecuación del CM para los instantes $t = 0$, cuando la merienda cae al mar y $t = T$, cuando el estudiante llega al otro extremo:

$$x_{cm} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot L/2}{m + M} \Big|_{t=0} = \frac{m \cdot (L - y) + M \cdot (L/2 - y)}{m + M} \Big|_{t=T},$$

despejando y de la segunda igualdad, se obtiene el resultado anterior, sin necesidad de hacer ninguna suposición con respecto a las velocidades.

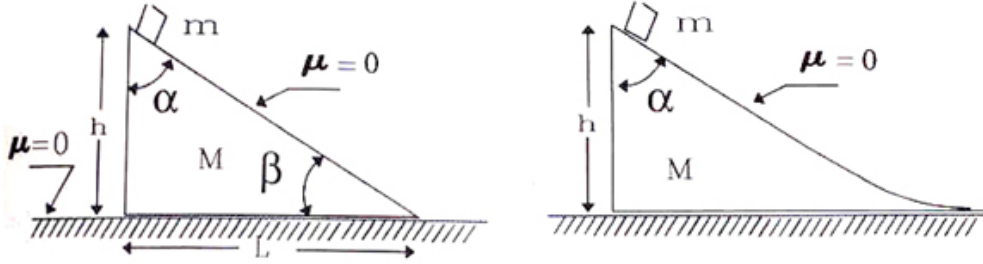


Figura VI.22: Los ángulos de la cuña son α y β . No existe roce en ninguna de las superficies de contacto, incluyendo el piso. A la derecha, se ha suavizado el ángulo β de manera que la masa m tenga, al tocar el piso, sólo una componente horizontal para la velocidad.

Ejemplo

Las superficies de los objetos de la figura: la cuña, el bloque y el piso, no tienen roce. La cuña tiene una masa M , altura h y el lado que está en contacto con el piso, largo L .

Si el bloque de masa m se deja caer desde el vértice superior de la cuña y $\beta > 0$:

a) ¿cuál es la posición de la masa m , al llegar al piso? En esta pregunta y en las siguientes suponga que el bloque es una masa puntual, con el objeto de reducir los cálculos.

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad de la cuña y la velocidad de la masa m ? Escriba la ecuación de la conservación de la energía para este caso.

c) Para el caso en que $\beta = 0$ (ver Figura), ¿cuál es la velocidad de la cuña y la masa m cuando esta última toca el piso?

a) Como el CM permanece estático debido a que no hay fuerzas externas en la dirección x , se tiene que:

$$X_{cm} = \frac{m \cdot 0 + M \cdot L/3}{m + M} \Big|_{t=0} = \frac{m \cdot (L - y) + M \cdot (L/3 - y)}{m + M} \Big|_{t=T},$$

donde establecimos el origen de coordenadas en un punto fijo al piso pero que coincide, en el instante inicial $t = 0$, con el vértice recto de la cuña. Supusimos, además, que su centro de masa se desplaza una cantidad y durante la caída de la masa m .

Nota: El centro de masa de un triángulo es: $x_{\text{triángulo}} = L/3$. (**Ejercicio**).

De la última ecuación, obtenemos que $y = (m L)/(m + M)$ y por lo tanto la masa m se ubica a una distancia $(M L)/(m + M)$ del origen de coordenadas fijo al piso.

b) La velocidad de la cuña tiene sólo una componente horizontal y la designamos por V_x . La masa m tiene velocidad u_x y u_y . Por conservación del momentum, se cumple que:

$$P_{CM} = 0 \implies -M V_x + m u_x = 0.$$

Hemos supuesto que la masa M se desplaza hacia la izquierda de la Figura.

La conservación de la energía mecánica en este ejemplo, genera la siguiente ecuación:

$$m g h = \frac{1}{2} M V_x^2 + \frac{1}{2} m u_x^2 + \frac{1}{2} m u_y^2,$$

si reemplazamos el valor de V_x en esta ecuación, se llega a:

$$m g h = \frac{1}{2} m \left(\frac{m}{M} + 1 \right) u_x^2 + \frac{1}{2} m u_y^2.$$

c) Cuando la cuña se deforma y el ángulo β se anula, desaparece la componente vertical de la velocidad y en este caso podemos encontrar, con estos métodos, la velocidad de ambos cuerpos M y m . La velocidad de m se obtiene despejando de la ecuación de conservación de la energía mecánica, la velocidad u_x :

$$u_x = \sqrt{\left[\frac{2 M g h}{m + M} \right]}, \quad V_x = \frac{m}{M} \sqrt{\left[\frac{2 M g h}{m + M} \right]}.$$

Ejemplo

Dos masas m_1 y m_2 , descansan sobre una mesa sin roce. Un resorte de constante k es comprimido una distancia d , con m_2 pegado a la pared y enseguida el sistema es abandonado desde el reposo.

a) Encontrar qué distancia viaja m_1 antes que m_2 comience a moverse.

b) En el instante que m_2 ha perdido el contacto con la pared, ¿cuál es la velocidad del CM? ¿Cuál es la velocidad de cada una de las masas?.

a) Siempre que el resorte esté comprimido la masa m_2 permanecerá apoyada en la pared. Cuando el resorte alcance su largo natural, no habrá fuerza sobre m_2 , y por lo tanto, tampoco contra la pared. Esto ocurre cuando m_1 ha recorrido una distancia d .

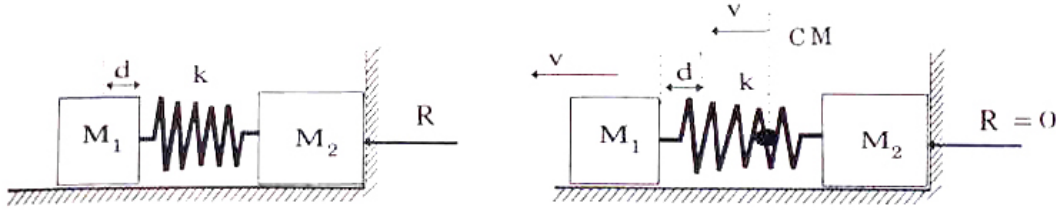


Figura VI.23: No hay roce entre los bloques y el piso. El resorte no tiene masa.

b) Cuando la masa m_2 deja de presionar a la pared, no hay ninguna fuerza horizontal actuando sobre el sistema. A partir de ese instante el CM se desplazará con una velocidad constante igual a:

$$V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + 0}{m_1 + m_2}.$$

Por conservación de la energía, tenemos:

$$E_i = E_f \implies \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{k d^2}{2}, \implies v_1 = \sqrt{\frac{k d^2}{m_1}},$$

de esta forma la velocidad del CM es:

$$V_{cm} = \frac{\sqrt{k d^2 m_1}}{m_1 + m_2}.$$

A continuación nos ubicamos en un sistema de referencia que se mueva con el CM. En este sistema las velocidades de las masas son:

$$u_1 \equiv v_1 - V_{cm} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{k d^2}{m_1}}, \quad u_2 \equiv -V_{cm} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{k d^2}{m_1}},$$

donde u_1 y u_2 son las velocidades relativas al CM de m_1 y m_2 respectivamente.

Al despegarse de la pared, las dos masas continuarán oscilando con respecto al CM. Las condiciones iniciales para describir esta oscilación en el sistema CM, son las siguientes: el resorte adopta su largo natural en ese instante y u_1 y u_2 representan las velocidades iniciales de cada una de las masas. $\square$

Resumen:

Existe un punto matemático que representa al objeto y cuya dinámica ocurre como si sobre él actuaran todas las fuerzas externas al sistema:

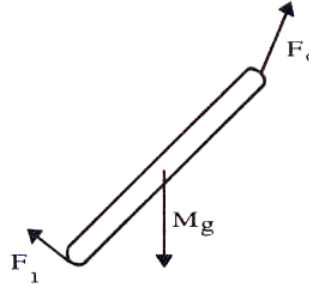
$$\Delta \vec{P}_{CM} = \Delta t (\sum \vec{F}_{ext}).$$

Si el cuerpo *no* es puntual, *además* de la expresión anterior debemos usar el *Torque*.

Si un cuerpo rígido no rota o gira con velocidad angular constante y su centro de masa permanece en reposo, entonces:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0,$$

$$\sum \vec{\tau} = 0.$$



Estas son la ecuaciones de la *Estática*.

VI.6. MOMENTO ANGULAR**VI.6.1. Definición**

La definición de momento angular es:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \wedge \vec{P} \quad (\text{VI.18})$$

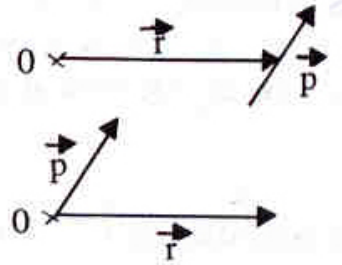
Comenzamos con la definición del producto vectorial aplicada al momento angular, utilizando los vectores que la definen: $\vec{r}$ y $\vec{P}$.

El módulo de $\vec{L}$, está dado por:

$$L = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\theta.$$

El sentido de $\vec{L}$ está determinado por la regla de la mano derecha, y puede entrar ($\Rightarrow \vec{L} = L \otimes$), o salir del plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$, ($\Rightarrow \vec{L} = L \odot$).

Recordemos que θ es el ángulo más pequeño entre $\vec{r}$ y $\vec{p}$.



Momento angular de una partícula rotando

Calculemos el valor del momento angular para el caso más simple. Una partícula de masa M que gira describiendo una circunferencia de radio r . El momentum lineal es: $\vec{p} = m\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es tangente a la circunferencia y por lo tanto el ángulo que forma con el radio es $\theta = \pi/2$. El módulo de la velocidad tangencial es $v = \omega r$.

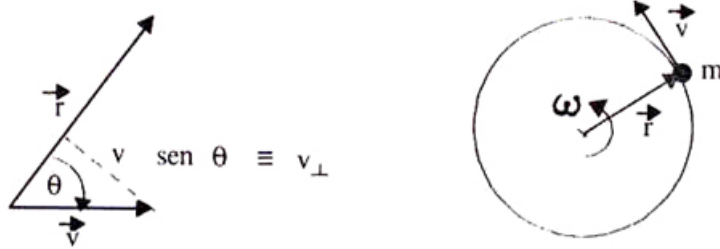


Figura VI.24: Momento angular de una partícula moviéndose a lo largo de una circunferencia.

$$L = m|\vec{r}||\vec{v}|\sin\theta, \quad \text{con } |\vec{r}| = r \text{ y } |\vec{v}| = v,$$

$$L = mrv_{\perp}, \quad \text{donde } v_{\perp} = \omega r \quad \text{en una circunferencia} \quad (\text{VI.19})$$

$$L = m r \omega r$$

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega. \quad (\text{VI.20})$$

Esta última expresión representa el *Momento Angular* de una partícula que describe una órbita circular. La velocidad angular ω no debe ser necesariamente constante. La fórmula obtenida es general para el movimiento circular.

Momento angular de una barra rígida

¿Cuál es el momento angular de una barra que gira en torno a un extremo?

Este es un ejemplo de un sólido con dimensiones finitas. Para encontrar el momento angular de la barra, la descomponemos en una serie de trozos infinitesimales y calculamos el momento angular de cada uno de ellos, considerados como una partícula. Al sumar el momento angular de cada uno de ellos obtenemos el momento angular de la barra.

La exactitud de este método depende del error incorporado en la aproximación. Los elementos infinitesimales son, al fin de cuentas, pequeñas barras que nosotros hemos confundido con una partícula puntual. Mientras más pequeño sea el largo de estas barras infinitesimales y menor su ancho, mejor será la exactitud de este método.



Figura VI.25: Descomposición de una barra continua en elementos muy pequeños que finalmente, en el cálculo, son considerados como partículas puntuales.

El momento angular de este sistema de partículas es:

$$L = \sum_{n=1}^N m_n r_n^2 \omega_0 \quad (\text{VI.21})$$

ω_0 : es la velocidad angular de la barra. No es necesariamente constante.

r_n : indica la distancia que separa a la partícula n-ésima del centro de giro.

m_n : es la masa de la partícula n-ésima. La suponemos igual para cada uno de los elementos en que se dividió la barra.

El procedimiento usado consistió en dividir la barra en elementos de largo Δ – todos iguales –, tal como se indica en la Figura. El valor de r_n lo elegimos de manera que identifique el punto medio de cada uno de los elementos en que se dividió la barra. Este punto medio es el centro de masa de la barra infinitesimal.

$$r_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta = (2n - 1) \frac{\Delta}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{VI.22})$$

$m_n = m_0$, la masa es la misma para cada uno de los trozos Δ ,

$\omega = \omega_0$, ω no depende de n ,

$$\begin{aligned} L &= m_0 \omega_0 \left(\sum_{n=1}^N r_n^2 \right) = m_0 \omega_0 \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^N (2n - 1)^2 \\ L &= m_0 \omega_0 \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 \left[\sum_{n=1}^N (4n^2 - 4n + 1) \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.23})$$

Resumiendo, hemos considerado la barra rígida como un agregado de puntos materiales que rotan con una velocidad angular ω_0 constante, con respecto a uno de sus extremos.



Figura VI.26: Modelo usado para calcular el momento angular de una barra rígida. En rigor, este modelo identifica la barra con un segmento de una línea recta: no consideramos su ancho. Incluirlo complica el álgebra y no agrega nada conceptualmente nuevo.

Definimos $r_n = (n - \frac{1}{2}) \Delta$ para indicar el Centro de Masa de cada uno de los trozos en que se dividió la varilla. De esta forma, para $n = 1$, el CM se ubica en $\Delta/2$ y para la n -ésima partícula, tenemos $(n \Delta - \Delta/2) = (n - 1/2)\Delta$.

Resumen de los resultados sobre series

En el párrafo que sigue, citamos los resultados acerca de series que son necesarios para resolver este ejercicio.

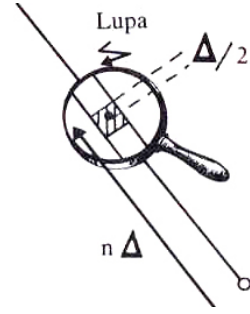
$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N}{6}(2N+1)(N+1).$$

Recordemos que:

$$\sum_{n=1}^N (Aa_n + Bb_n) = A\left(\sum_{n=1}^N a_n\right) + B\left(\sum_{n=1}^N b_n\right),$$

Con A y B independientes de n . Los otros coeficientes a_n y b_n pueden depender de n .



VI.6.2. Momento de inercia de una barra

Retornando a la sumatoria [VI.23]. Si desarrollamos cada uno de los términos incluidos allí, obtenemos la siguiente expresión:

$$L = m_0 \omega_0 \frac{\Delta^2}{4} \left[\sum_{n=1}^N 4n^2 - \sum_{n=1}^N 4n + \sum_{n=1}^N 1 \right],$$

el resultado de cada una de las sumatorias es:

$$= m_0 \omega_0 \Delta^2 \left[\frac{N}{6}(2N+1)(N+1) - \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N}{4} \right],$$

y finalmente, ordenando la suma:

$$= m_0 \omega_0 \left[\frac{\Delta^2}{6} N(2N+1)(N+1) - \Delta^2 \frac{N(N+1)}{2} + \frac{\Delta^2 N}{4} \right]. \quad (\text{VI.24})$$

El paso siguiente consiste en lograr que esta suma de pequeñas barras se aproxime lo más posible a una barra continua. Para ello imponemos que $N \rightarrow \infty$, esta operación equivale a subdividir repetidamente cada trozo infinitesimal de la barra, es decir:

$$\Delta \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \quad \text{de forma que se cumpla}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \Delta = \ell, \quad \text{con } \ell \equiv \text{largo de la barra.} \quad (\text{VI.25})$$

$$\text{Además: } \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot m_0] = M, \quad \text{masa de la barra.} \\ m_0 \rightarrow 0 \end{array} \quad (\text{VI.26})$$

Agrupando explícitamente en la sumatoria [VI.24], cada uno de los productos: $\Delta \cdot N$ y $m_0 \cdot N$, la expresión del Momento Angular L , toma la siguiente forma:

$$L = \omega_0 \left\{ \frac{1}{6} (m_0 N) [2N\Delta + \Delta] [N\Delta + \Delta] - \frac{m_0}{2} \Delta N [\Delta N + \Delta] + \Delta N \cdot \frac{\Delta m_0}{4} \right\}.$$

$$\text{donde usamos: } \Delta^2(2N+1)(N+1) \equiv (2N\Delta + \Delta)(N\Delta + \Delta).$$

$$\text{Ahora si: } \Delta \rightarrow 0, \quad m_0 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

$$\text{con } \Delta \cdot N = \ell, \quad N \cdot m_0 = M \quad \text{entonces tenemos:}$$

$$L = \omega_0 \left[\frac{1}{6} M (2\ell + \Delta)(\ell + \Delta) - \frac{m_0}{2} \ell(\ell + \Delta) + \frac{\ell}{4} \Delta m_0 \right],$$

$$L = \frac{M\ell^2}{3} \omega_0. \quad (\text{VI.27})$$

En la última igualdad, descartamos los términos que contenían como factores a Δ y m_0 . Esta determinación se tomó porque ambos términos tienden a cero. Su efecto en la suma se desvanece en este límite, frente a los otros términos que permanecen finitos.

El factor que acompaña a ω_0 depende solamente de la geometría del cuerpo y de la ubicación relativa del eje de rotación dentro del cuerpo. Este término tiene dimensiones de masa multiplicado por largo al cuadrado. Recibe el nombre de *momento de inercia* y se identifica con la letra I .

$$I \equiv \text{momento de inercia. Sus dimensiones son: } [M] \cdot [L]^2$$

$$I = \frac{1}{3} M \ell^2, \quad (\text{VI.28})$$

este es el momento de inercia de una barra evaluado con respecto a uno de sus extremos. La barra tiene largo ℓ y masa M .

La expresión genérica del momento de inercia I , de un objeto es:

$$I = k M L^2,$$

donde k es un número determinado por la geometría del cuerpo y la posición del eje con respecto al cual se calcula el momento de inercia I . M es la masa del cuerpo y L , representa una longitud característica del objeto.

No existe un valor único de I asociado a un cuerpo, como se ilustra a continuación.

Ejemplo

Calcular el valor del momento de inercia de una barra que rota con respecto a un eje que pasa por su centro de masa.

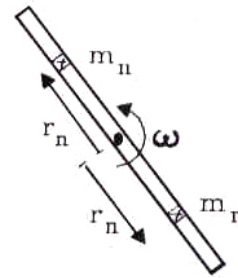
El largo de la barra es ℓ y su masa M .

$$I \equiv \sum_{n=1}^N m_n r_n^2.$$

Sabemos que es posible realizar esta suma en cualquier orden sin alterar el resultado. Entonces podemos considerar este ejemplo como una suma de dos barras independientes, cada una de largo $\ell/2$ y masa $M/2$.

Esta es la fórmula que se usó anteriormente. Aquí r_n señala cada uno de los trozos en que se subdividió la barra. Como es una *suma*, podemos hacerla en la forma que más nos convenga. Primero debemos sumar los términos hacia un lado de la barra y enseguida el resto, esto es lo que hacemos en la primera línea de la ecuación que sigue. Ya hemos calculado anteriormente cada una de las sumas; su valor se inserta en la segunda de las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$I = \sum_{n=1}^{N/2} m_n r_n^2 + \sum_{k=1}^{N/2} m_k r_k^2,$$



$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3} \left(\frac{M}{2} \right) \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{M}{2} \right) \cdot \left(\frac{\ell}{2} \right)^2, \\
&= \frac{1}{24} M \ell^2 + \frac{1}{24} M \ell^2, \\
I &= \frac{1}{12} M \ell^2. \tag{VI.29}
\end{aligned}$$

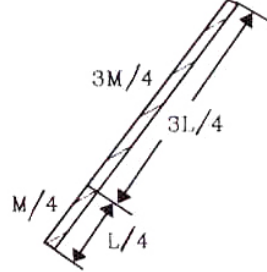
Este es el valor del momento de inercia de una barra que gira con respecto a su punto medio. Como se aprecia, siempre tiene un valor proporcional a $M \cdot \ell^2$. El factor numérico que lo multiplica depende de la posición relativa del eje de giro en el cuerpo.

Ejemplo

Calcule el valor del momento de inercia de la misma barra anterior, pero ahora tomando como referencia un eje perpendicular al plano del papel, ubicado a una distancia $\frac{L}{4}$ de su extremo.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
I &= I_{\frac{3L}{4}} + I_{\frac{L}{4}}, \\
I &= \frac{1}{3} \left(\frac{3M}{4} \right) \left(\frac{3L}{4} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{M}{4} \right) \left(\frac{L}{4} \right)^2, \\
I &= \frac{7}{48} ML^2. \quad \square
\end{aligned}$$



Resumen:

La expresión para el momento de inercia I , se obtuvo a partir del momento angular de una partícula que gira en un plano describiendo una circunferencia.

El momento angular de un cuerpo en torno a un eje fijo es:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = I \vec{\omega}, \tag{VI.30}$$

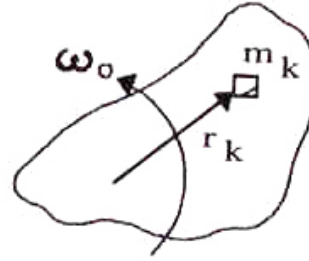
donde el $\vec{\omega}$ apunta en la dirección perpendicular al plano y cuyo sentido queda determinado por la regla de la mano derecha. Coincide, además, con el sentido determinado a partir del producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{p}$.

$$I = \sum_{n=1}^N m_n r_n^2 \equiv \int dm r^2. \quad (\text{VI.31})$$

I es una cantidad que depende de la ubicación del eje de rotación y de la geometría del objeto.

Si el cuerpo es un sólido rígido y rota con velocidad angular ω alrededor de un eje, podemos escribir entonces:

$$L = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \omega_0 = I \omega.$$



VI.6.3. Torque y aceleración angular. Rotación con respecto a un eje fijo

Si el eje de rotación mantiene fija su orientación y el cuerpo no se deforma o cambia la posición relativa de sus componentes; la variación del momento angular en el tiempo se obtiene de la siguiente forma:

$$\frac{dL}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I \left(\frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \right),$$

donde I = constante, por ser un sólido rígido.

$$= I \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} \right),$$

$$\frac{dL}{dt} = I \alpha, \text{ donde } \alpha \text{ es la aceleración angular.}$$

Para incorporar el torque en la última ecuación, utilicemos la definición del momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ y derivémosla con respecto al tiempo para conectarla con la expresión anterior.

Comencemos enfatizando dos puntos: primero, realizaremos este cálculo para una partícula y posteriormente, generalizaremos al cuerpo entero, sumando sobre cada una de ellas. Segundo: *en un sólido rígido, todas las partículas tienen la misma velocidad y aceleración angular*, ω y α , respectivamente.

Por definición:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{r}(t + \Delta t) \wedge \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \wedge \vec{p}(t)}{\Delta t} \right\}$$

Debemos aplicar la condición de *Leibnitz* –que caracteriza a toda operación que se denomine derivada–, a esta última expresión. Esta condición afirma que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{A(t + \Delta t) \cdot B(t + \Delta t) - A(t)B(t)}{\Delta t} \right\} &= \\ &= A(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} \right] + \\ &\quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \right] \cdot B(t). \end{aligned}$$

Entonces, en el caso del momento angular L ,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right) \right] \wedge \vec{p} + \\ &\quad + \vec{r}(t) \wedge \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \right], \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t)}{\Delta t} \right] &= \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F}, \end{aligned}$$

el primer término es cero, puesto que $\vec{p} = m \vec{v}$, y por lo tanto es paralelo a $\vec{v}$. Finalmente, obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}_{\text{externas}} = \vec{\tau}. \quad (\text{VI.32})$$

Resumen:

Acortamos el cálculo para no alargar excesivamente el texto. Por ejemplo, falta la sumatoria de esta expresión con respecto a cada una de las partículas: es decir, en $\vec{r} \wedge \vec{p}$, debería aparecer $\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$. También faltó analizar el efecto de las fuerzas internas y estudiar como se cancelan los torques generados por estas fuerzas, por efecto del principio de acción y reacción.

El resultado final es el exhibido en la ecuación [VI.32], donde L representa el momento angular del cuerpo rígido y τ el torque externo que actúa sobre el sistema.

Las expresiones obtenidas a partir de la definición del momento angular L y de su derivada son:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}, \quad (\text{VI.33})$$

$$\Delta\vec{L} = \Delta t \vec{\tau}. \quad (\text{VI.34})$$

Para un cuerpo rígido:

$$\vec{\tau} = I \vec{\alpha}. \quad (\text{VI.35})$$

$$\text{Si } \sum \vec{\tau} = 0, \implies \Delta\vec{L} = 0 \implies \vec{L} = \text{constante}. \quad (\text{VI.36})$$

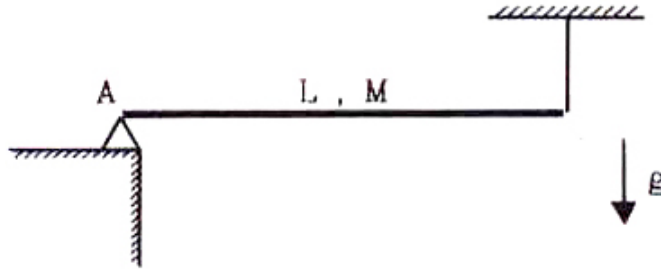


Figura VI.27: Barra rotulada en A y sostenida por un hilo desde el extremo opuesto. Al cortarse repentinamente la cuerda, la reacción en el punto A disminuye, como se demuestra en el Ejemplo siguiente.

Ejemplo

Una barra de masa M , largo L y momento de inercia I_A con respecto al punto A, ($I_A = \frac{1}{3} ML^2$), está sostenida por un hilo en el punto B y puede girar alrededor de un pivote en el otro extremo. Repentinamente el hilo se corta.

- a) Calcular las reacciones en el punto A y la tensión de la cuerda en B, antes de cortarse el hilo.
- b) Calcular la reacción R en A y la aceleración angular α *inmediatamente* después del corte de la cuerda.

Respuesta:

a) No existen fuerzas horizontales, entonces sólo existen componentes verticales, y al aplicar las leyes correspondientes a la estática, se obtiene:

$$R_A = T_B = \frac{1}{2} Mg.$$

b) Note que se piden estos valores exactamente después del corte de la cuerda, puesto que en un instante posterior el problema se complica, porque el torque va a depender del valor del ángulo que la barra forme con la horizontal.

Aplicando la segunda ley de Newton en el centro de masa de la barra, tenemos:

$$1) \quad R - Mg = M a_{CM},$$

y calculando el torque con respecto al extremo fijo A,

$$\sum \tau_A = I\alpha, \quad \text{y reemplazando la expresión del torque,}$$

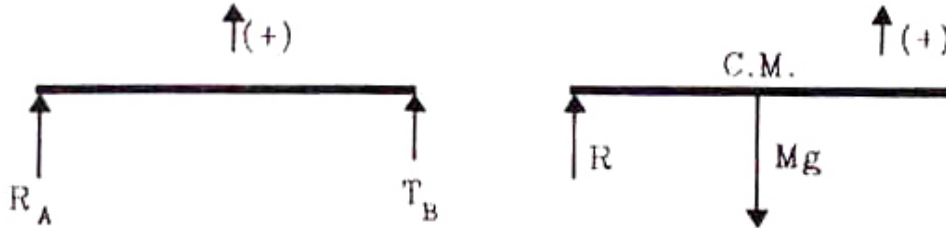


Figura VI.28: Diagrama de cuerpo libre para el caso estático, antes de romper la cuerda (izquierda) y justo después que se corta.



Figura VI.29: Diagrama de cuerpo libre de la barra justo en el instante en que se cortó el hilo. Se ilustra también la relación entre la velocidad angular y la velocidad lineal del centro de masa.

$$2) \quad Mg \cdot \frac{L}{2} = I\alpha.$$

Existe una relación geométrica entre la aceleración angular y la aceleración del centro de masa, cuando la barra comienza a girar con respecto al punto A:

$$3) \quad a_{CM} = \alpha \cdot \frac{L}{2}.$$

Ahora ya tenemos suficientes ecuaciones para resolver este problema. Despejando α de la ecuación 3) obtenemos:

$$\frac{1}{4}MgL^2 = I a_{CM} = \frac{1}{3}M L^2 a_{CM}, \quad \text{de donde:}$$

$$a_{CM} = \frac{3}{4}g \quad \text{y} \quad R = \frac{1}{4}Mg. \square$$

Es interesante hacer notar que el extremo de la barra tiene una aceleración de:

$$a_B = \alpha L = a_{CM} \frac{2}{L} L = \frac{3}{2}g.$$

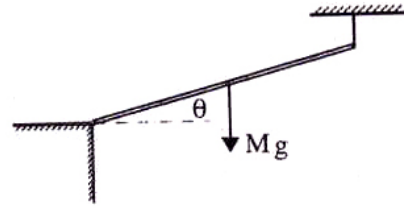
Podemos hacer un experimento para saber si este resultado es correcto: colocar una bolita en el extremo de una barra, similar a la del ejemplo reciente pero que haga un cierto ángulo sobre la horizontal. Si repentinamente soltamos la barra, la bolita experimenta una aceleración igual a g , por lo tanto debe caer más lentamente que el extremo de la barra y además verticalmente, con lo cual alcanzará un punto más al interior de la barra. Se puede hacer, en ese punto, una concavidad para que la bolita se instale allí al final de su caída y, con esto, verificar los resultados obtenidos aquí.

Ejemplo

¿Qué sucede si la barra forma un ángulo θ con respecto a la horizontal? ¿Cuál es el valor de la aceleración en el extremo de la barra?

Todo es similar al ejemplo anterior, excepto que:

$$\begin{aligned}\vec{r} \wedge \vec{g} &= r g \sin(\theta + \pi/2), \\ &= r g \cos \theta \otimes.\end{aligned}$$



Las ecuaciones de Newton, el torque y la relación entre la aceleración angular y lineal, para el caso en que el hilo se acaba de cortar, se escriben a continuación:

$$1) \quad M a_{CM} \cos \theta = -R_y + M g,$$

$$2) \quad M a_{CM} \sin \theta = R_x,$$

$$3) \quad M g \frac{L}{2} \cos \theta = I \alpha \otimes,$$

$$4) \quad a_{CM} = \alpha \frac{L}{2}.$$

Donde T es la fuerza tangencial que ejerce el piso sobre la barra. R es la reacción normal del piso.

Despejando la velocidad angular en función de la velocidad del CM de la ecuación 4) y reemplazándola en la ecuación 3), obtenemos:

$$a_{CM} = \frac{M g \cos \theta L^2}{\frac{1}{3} M L^2 4} = \frac{3}{4} g \cos \theta,$$

esta es la aceleración del CM. En el extremo de la barra se cumple:

$$a = \frac{3}{2}g \cos \theta.$$

Si $\cos \theta > \frac{2}{3} \Rightarrow a_B > g$, en el instante en que se corta el hilo de la barra.

Ejercicio

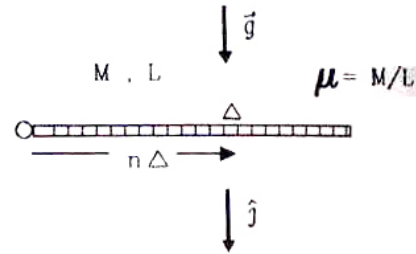
Calcular la posición de la cavidad de manera que la bolita al caer, desde un extremo de la barra, se ubique en el receptáculo. $\square$

Ejemplo

Demuestre que al calcular el torque con respecto a un extremo de la barra y concentrar todo el peso en el CM, como se hizo en el ejemplo anterior, se obtiene el mismo resultado que al evaluar el torque generado por el peso de cada elemento infinitesimal de barra con respecto al mismo punto.

En la ecuación 3) del último ejemplo, usamos el peso del cuerpo Mg como la fuerza que generó el torque, sin embargo en rigor deberíamos usar la suma de los pesos de cada una de las partes infinitesimales de la barra por su respectivo brazo, para calcular el torque total.

No lo hicimos porque el resultado es el mismo, es equivalente a considerar el peso de la barra concentrado en el CM. A continuación demostramos este resultado. Δ es el largo de cada segmento de barra, μ es la densidad lineal, M la masa total y L el largo de la barra. El vector unitario $\hat{j}$ se indica en la Figura.



Note que la barra permanece horizontal, de modo que:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i \wedge (g\hat{j}) &= r_i g, \quad \text{puesto que } \sin\theta = 1. \\ \vec{\tau} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \mu \Delta \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge (g\hat{j}), \\ \vec{\tau} &= \mu \Delta g \left[\sum_{n=1}^N \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \Delta = \mu g \Delta^2 \left[\sum_{n=1}^N \left(n + \frac{1}{2} \right) \right], \\ &= \mu g \Delta^2 \left\{ \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{2} N + \frac{1}{2} N \right\}, \\ &= \mu g \left\{ \frac{1}{2} (N\Delta)^2 + (N\Delta) \cdot \Delta \right\},\end{aligned}$$

Tomando el límite $\Delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, tal que $N \cdot \Delta = L$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\tau &= \underbrace{\mu g \frac{1}{2} L^2}_{\text{}} + \mu g \cdot L \cdot \Delta, \\ \vec{\tau} &= (\mu L) g \frac{L}{2} = \frac{1}{2} M g L \otimes.\end{aligned}$$

Con este cálculo verificamos que, concentrar la masa total del cuerpo en el CM, y calcular el torque sumando el efecto de cada uno de sus elementos, son métodos equivalentes.

Ejemplo

Calcular el momento angular con respecto a un punto P, para una barra que se traslada (sin rotar) con velocidad $\vec{V}$ en un plano, como se indica en la Figura.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i = \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \right) \wedge \vec{p},$$

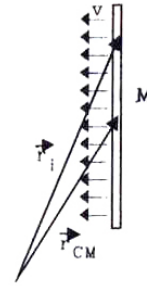
ya que $\vec{p}_i = \vec{p}_j = \vec{p}$ debido a que la barra experimenta solo traslación.

$$\sum \vec{r}_i = \sum (\vec{r}_{CM} + n \Delta \hat{j}) = N \vec{r}_{CM} + 0.$$

Donde $\sum (n \Delta) \hat{j} = 0$, puesto que –por simetría– existe el mismo número de segmentos de largo Δ sobre el CM, que bajo él.

$$p = m_o \vec{v}, \quad N m_o = M.$$

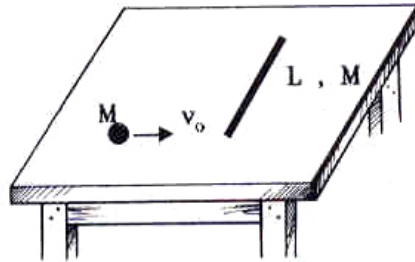
$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \wedge (M \vec{v}).$$



Ejemplo

Una barra de largo L y masa M descansa sobre una mesa horizontal pulida (con roce despreciable). Una masa M que tiene una velocidad v_0 y que está dirigida perpendicularmente contra la barra (ver Figura) choca con el extremo y se queda pegada a ella.

- ¿Cuál es la posición del CM del sistema cuando la masa se encuentra a una distancia a de la barra?
- ¿Cuál es el valor de la velocidad del CM, antes y después del choque?
- Calcule la velocidad angular ω_0 del sistema barra-masa con respecto al CM, antes y después del choque.



Solución:

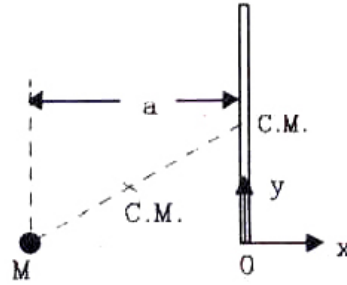
a) Por simetría, el CM de la barra homogénea se ubica en su punto medio. Para determinar el CM del sistema barra-masa, lo descomponemos en dos masas puntuales, una que representa a la barra ubicada en su punto medio y la otra la masa M . El CM del sistema se localiza en el punto medio de la línea que los une.

Ubicamos el origen del sistema de coordenadas en el extremo de la barra, en el lugar exacto donde ocurrirá el choque (ver Figura).

En un cierto instante, la masa M se ubica en $x = -a$, entonces, usando la expresión para calcular el CM, obtenemos para el sistema barra-masa:

$$x_{CM} = \frac{(-a)M + 0 \cdot M}{2M} = -\frac{a}{2},$$

$$y_{CM} = \frac{0 \cdot M + \frac{L}{2}M}{2M} = \frac{L}{4}.$$



b) Como $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ en el plano de la mesa, entonces:

$$\Delta \vec{P}_{CM} = \Delta t \left[\sum \vec{F}_{ext} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{V}_{CM}|_{antes} = \vec{V}_{CM}|_{después}.$$

$$V_{CM}|_x = \frac{M v_0 + M \cdot 0}{2M} = \frac{1}{2} v_0, \quad V_{CM}|_y = 0.$$

$$\text{Donde hemos usado [VI.5.3]: } \vec{V}_{CM} = \frac{\sum m \vec{v}_i}{\sum m_i}.$$

c) Como la masa M no choca con el centro de masa de la barra, después del choque, el conjunto experimenta un movimiento de traslación y rotación simultáneos. El CM del sistema *no* sufre cambios debido al choque, puesto que las fuerzas que ocurren en ese instante, son internas y no afectan la dinámica del conjunto barra-masa. Como no hay fuerzas externas en el plano de la mesa, *la velocidad del centro de masa permanece constante e igual a $V_0/2$.*

Parece razonable reubicar el origen del sistema de referencia en el centro de masa. En esta nueva ubicación, la barra junto con la masa M en su extremo, no se desplaza y sólo gira en torno al nuevo origen de coordenadas. Más aún, como el torque externo al sistema barra-masa es nulo, el momentum angular, L_0 , permanecerá constante.

$$\tau = 0 \Rightarrow L = \text{constante},$$

es decir: $L_{\text{antes del choque}} = L_{\text{después del choque}}$.

Comencemos estudiando el movimiento del conjunto barra-masa, desde el sistema ubicado fijo al centro de masa.

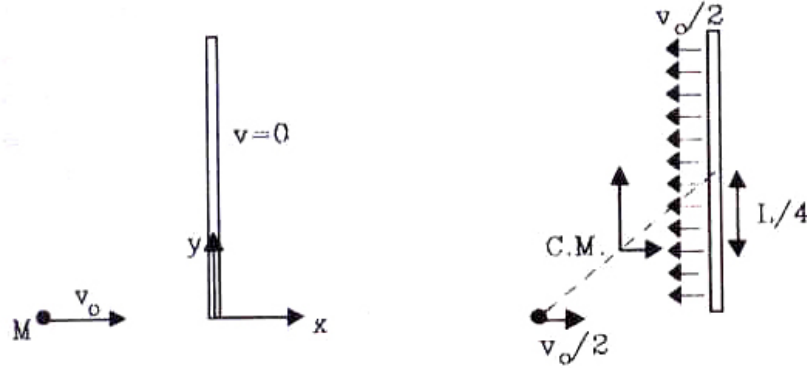


Figura VI.30: El choque visto por un observador ubicado en la mesa (sistema de Laboratorio) y otro observador que se mueve con el centro de masa del conjunto barra-masa.

Calculemos las velocidades relativas. De acuerdo a la fórmula obtenida en el Capítulo III:

$$V_{\text{barra}/\text{CM}} = V_{\text{barra}/\text{Lab}} + V_{\text{Lab}/\text{CM}} = V_{\text{barra}/\text{Lab}} - V_{\text{CM}/\text{Lab}},$$

reemplazando los valores correspondientes:

$$V_{\text{barra}/\text{CM}} = 0 - \frac{V_0}{2} = -\frac{V_0}{2},$$

$$V_{\text{masa}/\text{CM}} = V_{\text{masa}/\text{Lab}} - V_{\text{CM}/\text{Lab}} = V_0 - \frac{V_0}{2} = \frac{V_0}{2}.$$

Ambas velocidades sólo tienen componentes en el eje-x.

Para calcular la velocidad angular después del choque, necesitamos conocer el valor del momento angular del sistema antes que éste ocurra. Este valor es la suma del momento angular de la barra más la contribución de la masa M . Si tomamos como origen el CM, entonces (ver ejercicio previo):

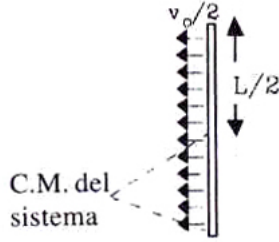


Figura VI.31: Campo de velocidades de la barra. La barra no tiene velocidad angular, todos sus puntos tienen la misma velocidad, en consecuencia, podemos usar el resultado obtenido en un ejercicio anterior para el cálculo del momento angular.

$$L_{\text{barra/CM}} = \vec{r}_{CM} \wedge \vec{p} = \frac{M L V_o}{8}, \quad (\text{VI.37})$$

$$L_{\text{masa/CM}} = M \frac{V_o}{2} \frac{L}{4}, \quad \text{y el momento angular total es,} \quad (\text{VI.38})$$

$$L_{\text{antes del choque}} = \frac{1}{4} L M V_o. \quad (\text{VI.39})$$

Después de ocurrido el choque, el momento angular del conjunto permanece constante y el *conjunto barra-masa gira como un todo*, lo que facilita el cálculo del momento angular total:

$$L_{\text{después del choque}} = L_{\text{barra/CM}} + L_{\text{masa/CM}}.$$

$$L_{\text{barra/CM}} = I \omega_0, \quad (\text{puesto que sólo existe rotación, con respecto al CM}).$$

$I \equiv$ Momento de Inercia de una barra rotando con respecto al centro de masa del conjunto barra-masa.

El valor del momento de inercia de la barra rotando con respecto al punto que se indica en la Figura ya se calculó en un ejemplo anterior, el valor obtenido fue:

$$I = \frac{7}{48} M L^2.$$

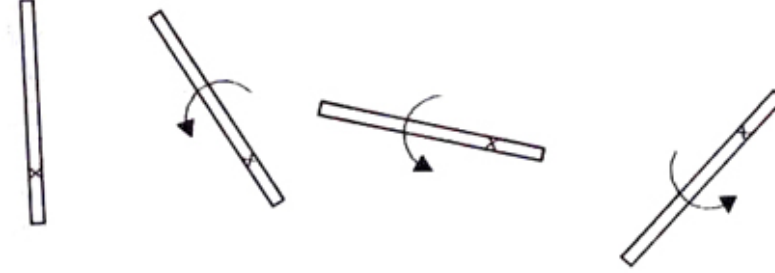


Figura VI.32: Movimiento del conjunto barra-masa después del choque. El CM se mueve con velocidad constante, por lo tanto las cruces –que ubican el CM– deben estar en una línea horizontal e igualmente espaciadas, si los intervalos de tiempo considerados entre cada posición, son iguales.

$$L_{\text{después del choque}} = \underbrace{\frac{7}{48} ML^2 \omega_0}_{I \omega_0} + \underbrace{M \left(\frac{L}{4} \right)^2 \omega_0}_{M r_M^2 \omega_0} = \frac{5}{24} ML^2 \omega_0,$$

pero, $L_{\text{antes}} = L_{\text{después}}$, de aquí obtenemos la ecuación que nos permite calcular ω_0 :

$$\frac{M V_o L}{4} = \frac{5}{24} (\omega_0 L) ML, \quad \text{simplificando, se tiene:}$$

$$V_o = \frac{5}{6} (\omega_0 L) \implies \omega_0 = \frac{6}{5} \frac{V_o}{L}.$$

Comentarios

Este es un problema largo y conviene resumir sus puntos más importantes.

- El conjunto estudiado consiste en la barra y la masa puntual. Sobre este sistema *no* existen fuerzas externas en el plano de la mesa, por lo tanto el momentum lineal y el momento angular se conservan:

$$\Delta \vec{P}_{\text{sistema}} = 0,$$

$$\Delta \vec{L}_{\text{sistema}} = 0.$$

Cualquier cambio de velocidades entre estas dos componentes se debe a la acción de las fuerzas internas.

- Como no hay fuerzas externas el centro de masa se mueve con *velocidad constante*, por lo tanto conviene ubicar el sistema de referencia fijo a dicho punto. Las leyes de Newton son válidas allí, puesto que *es* un sistema inercial.

- Al considerar el momento angular antes del choque, la barra se toma como un punto de masa M y velocidad $(V_0/2)$ porque se *traslada paralelamente a sí misma*.

- Como las masas de ambos cuerpos son iguales a M , no tenemos oportunidad de considerar los casos extremos en que la partícula tiene una masa m muy pequeña o muy grande comparada con la masa M de la barra.

Ejercicio

Repita estos cálculos utilizando una masa $m \neq M$ para la partícula puntual. Verifique que estos resultados coinciden con los obtenidos anteriormente, cuando se impone que ambas masas sean iguales.

VI.7. TEOREMA DE STEINER

VI.7.1. Momento de inercia

Existen muchos ejemplos interesantes en los cuales el eje de rotación no pasa por el centro de masa.

A continuación expresamos el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje fijo, perpendicular al plano de movimiento y que lo atraviesa por un punto arbitrario.

El valor del momento de inercia con respecto a este nuevo eje es igual a la suma del momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa y el valor del momento de inercia del centro de masa –considerado como una partícula– con respecto al nuevo eje.

La única operación que debemos realizar es descomponer el vector posición de cada una de las partículas $\vec{x}_i$, como la suma de un vector que va desde el eje al centro de masa $\vec{R}_{CM}$ y otro que apunta desde el CM al punto i -ésimo, $\vec{r}_i$.

$$I_o = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i)^2, \quad \vec{x}_i = \vec{R} + \vec{r}_i.$$

Utilizaremos $\vec{R}_{CM} \equiv \vec{R}$, en los siguientes desarrollos, en el resultado final incluiremos nuevamente el sub-índice CM.

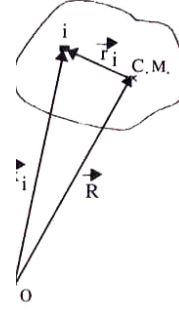
$$(\vec{x}_i)^2 = (\vec{R} + \vec{r}_i)^2,$$

$$(\vec{x}_i)^2 = \vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2,$$

$$I_o = \sum_{i=1} m_i \left[\vec{R}^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{r}_i + \vec{r}_i^2 \right],$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0, \text{ entonces:}$$

$$I_o = M R_{CM}^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^2.$$



Identificando los términos correspondientes, se obtiene:

$$I_o = I_{CM} + I_{c/r CM}$$

VI.7.2. Momento angular

Una situación análoga se produce en el caso del momento angular. La misma separación de coordenadas anterior, es válida aquí. El detalle de los cálculos es el siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \wedge \vec{p}_i &= \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \wedge (m_i \vec{v}_i), \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ (\vec{R}_{CM} + \vec{r}_i) \wedge (m_i \vec{v}_i) \right\}, \\ &= \vec{R}_{CM} \wedge \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{v}_i), \end{aligned}$$

$$\text{como, } \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{CM}, \text{ y además, } \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_i, \text{ reemplazando}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{R}_{CM} \wedge (M \vec{V}_{CM}) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \wedge \vec{V}_{CM} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{u}_i). \end{aligned}$$

En este cálculo hemos usado la igualdad: $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0$, y la composición de velocidades: $\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{u}_i$, obtenida derivando con respecto al tiempo, el vector posición: $\vec{x}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i$.

El momento angular con respecto al punto O se descompone en la suma de dos términos: el momento angular del cuerpo con respecto al centro de masa y el momento angular del objeto –concentrado en su centro de masa–, con respecto al punto O :

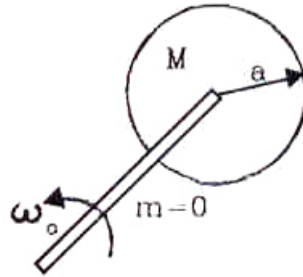
$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \wedge M \vec{v}_{CM}.$$

La variación del momento angular con respecto al tiempo está relacionada con el torque a través de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

Ejemplo

Una barra de masa despreciable ($m = 0$) y largo ℓ , sostiene en su extremo un disco –de masa M y radio a – mediante un eje sin fricción. Si a medida que la barra gira, el disco permanece paralelo a sí mismo, calcular el momento angular con respecto al eje de giro de la barra.



El momento angular es:

$$\vec{L}_o = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \wedge M \vec{v}_{CM}.$$

Como el disco *no* gira con respecto a su centro de masa, $\vec{L}_{CM} = 0$. El momento angular se reduce al de una masa M ubicada en el extremo de la barra, que rota con la velocidad angular de la barra ω_o :

$$I = M \ell^2, \quad L_o = M \ell^2 \omega_o.$$

Ejemplo

Para evitar que el disco se traslade paralelamente a sí mismo, como sucede en el caso anterior, lo fijamos a la barra. Ahora el disco *gira* unido a la barra y su centro de masa describe una circunferencia.

Calcule el momento angular del conjunto.

La expresión del momento angular es:

$$L_o = L_{CM} + L_{c/r \text{ CM}}.$$

$L_{c/r \text{ CM}}$ es el momento angular del disco con respecto a su centro. Su velocidad angular es la misma de la barra. Su valor es:

$$L_{c/r \text{ CM}} = I_{c/r \text{ CM}} \omega_o = \frac{1}{2} M R^2 \omega_o,$$

donde ω_o es la velocidad angular de la barra. $[M R^2]/2$, es el valor del momento de inercia del disco con respecto a su centro.

Por otra parte:

$$L_{CM} = M \ell^2 \omega_o \Rightarrow L_o = \left\{ M \ell^2 + \frac{1}{2} M R^2 \right\} \omega_o. \square$$

Supongamos que en este caso $\ell = R$, entonces $L_o = [3 M R^2]/2 \omega_o$. Esto es equivalente a que el disco gire en torno a un eje situado en el borde, por lo tanto, el valor del momento de inercia de un disco con respecto a un borde es:

$$I_{c/r \text{ al borde}} = \frac{3}{2} M R^2.$$

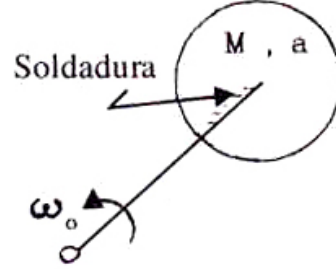
Ejemplo

Calcular la aceleración de un cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano inclinado. Este plano forma un ángulo θ con la horizontal. El valor del coeficiente de roce entre el cilindro y el plano es $\mu_{\text{estático}}$.

Lo primero que debemos hacer es elegir un sistema de referencia adecuado que facilite los cálculos. Una de las posibilidades es ubicarlo en el punto P de la Figura, de modo que la ecuación del torque sea simple. Esta no es la única alternativa, como ilustraremos al final de este ejemplo.

De acuerdo a la ley de composición del momento angular, tenemos:

$$L_P = L_{CM} + L_{c/r \text{ CM}}.$$



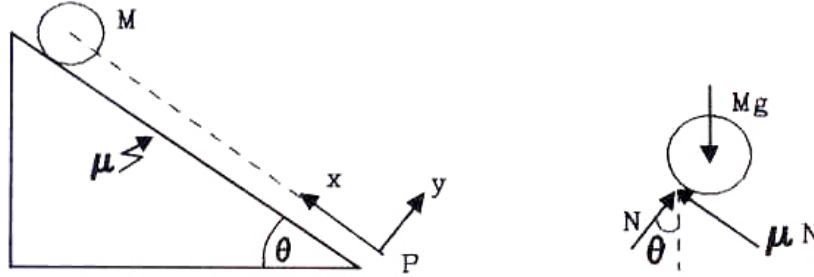


Figura VI.33: Diagrama de cuerpo libre de un cilindro que cae por un plano inclinado con roce.

L_{CM} es nulo: la velocidad del centro de masa es colineal con el vector que une este punto con P . De esta forma:

$$L_P = L_{c/rCM} = \frac{M R^2}{2} \omega,$$

donde ω es la velocidad angular del cilindro. A medida que se desplaza por el plano inclinado, su velocidad angular aumentará, de modo que $\omega = \omega(t)$.

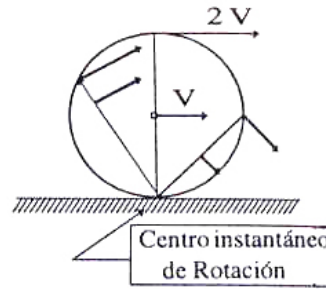
Por otra parte, la expresión para el torque es:

$$\tau = \frac{dL_P}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{M R^2}{2} \omega \right\}.$$

La única fuerza que genera un torque con respecto al punto P es el roce. La fuerza normal al plano $\vec{N}$, se cancela con la proyección del peso del cilindro: $Mg \cos \theta$ (ver Figura).

Las ecuaciones de Newton y la del torque son entonces:

- 1) $F_{roce} = I_{CM} \alpha \quad \left(\frac{d\omega}{dt} \equiv \alpha \right),$
- 2) $Mg \sin \theta - F_{roce} = M a_{CM}.$
- 3) $N - Mg \cos \theta = 0.$



La condición geométrica de *resbalar sin rodar* indica que *instantáneamente* el cilindro está rotando con respecto al punto de contacto entre el cilindro y el plano. La velocidad del centro del disco es: $R\omega = v_{CM}$. La velocidad relativa entre el punto del cilindro en

contacto con el piso y el piso mismo es nula en ese instante (ver Figura). Las aceleraciones están relacionadas por:

$$R\alpha = a_{CM}.$$

Tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas: α , N , F_{roce} y a_{CM} . Despejando a_{CM} ,

obtenemos:

$$a_{CM} = \frac{2g \sin \theta}{3} \quad \alpha = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin \theta.$$

El valor de N se obtiene directamente de la ecuación 3), y

$$F_{\text{roce}} = -Mg \frac{\sin \theta}{3}.$$

Note que si el cilindro rueda sin resbalar, debe cumplirse que la fuerza de roce, sea menor o igual al valor máximo $F_{\text{máxima de roce}}$, que de acuerdo a la definición empírica dada es $F_{\text{máxima de roce}} = \mu_{\text{estática}} F_{\text{normal}}$.

De esta forma, para que el cilindro no resbale a medida que baja, debe cumplirse que:

$$F_{\text{roce}} = Mg \frac{\sin \theta}{3} \leq \mu_{\text{estática}} F_{\text{normal}} = \mu_{\text{estática}} Mg \cos \theta.$$

De aquí obtenemos la condición para que el cilindro no resbale:

$$\frac{\tan \theta}{3} \leq \mu_{\text{estática}}.$$

Es decir, si incrementamos lentamente el ángulo θ , el cilindro comenzará a resbalar sobre el plano, cuando se cumpla que: $\tan \theta > 3\mu$. El factor $1/3$, depende de la geometría del cuerpo. $\square$

Ejercicio

Continuando con este ejemplo, elija ahora un sistema de referencia apoyado en el plano, es decir con el punto P , origen del sistema de coordenadas, descansando en el vértice inferior del plano inclinado. Demuestre que el momento angular con respecto al punto P es:

$$L_o = L_{c/r \text{ CM}} + L_{\text{CM}} = \frac{3}{2} M R^2 \omega.$$

Comente este resultado teniendo presente el valor del momento de inercia con respecto a un borde del disco, encontrado anteriormente. $\square$

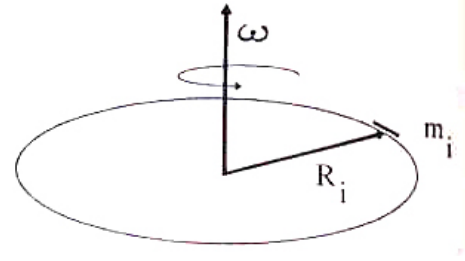
VI.8. ENERGIA CINETICA DE ROTACION

Calculemos la energía cinética, K , de un anillo rotando con respecto a un eje perpendicular a su plano, que pasa por el centro de masa. Este puede ser el modelo de una rueda de bicicleta, si despreciamos la masa de los rayos que unen el aro al eje central.

La velocidad tangencial de una partícula en el borde es, $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$, donde $\vec{R}$ es el vector que apunta a dicha partícula y $\vec{\omega}$, la velocidad angular del anillo.

Como $\vec{\omega}$, es perpendicular a $\vec{R}$, para cualquier punto del aro, entonces: $\vec{\omega} \wedge \vec{R} = (\omega R) \hat{t}$, donde $\hat{t}$, es un vector unitario tangente al anillo. La energía cinética de un elemento de arco es:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2,$$



donde m_i es la masa de un elemento de arco del aro, y $V = R\omega$, su velocidad tangencial.

Sumando sobre todas las partículas del aro, obtenemos su energía cinética:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^N K_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2, \\ K &= \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i R_i^2 \right] \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

Este mismo método puede generalizarse al caso de un objeto bidimensional girando alrededor de un eje perpendicular a él, o a una figura que gira en torno a un eje que coincide con uno de sus ejes de simetría.

La expresión general para la energía cinética de un cuerpo, cuyo momento de inercia con respecto a un eje de simetría es I , en torno al cual se encuentra girando, es:

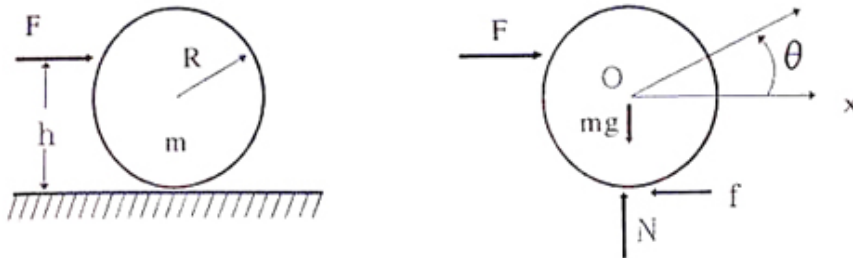
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{VI.41})$$

Esta expresión también es válida para un objeto plano, cualquiera sea su forma.

Un ejemplo que se repite a menudo, es el de un cuerpo rodando sin resbalar sobre otro. En estos casos, la fuerza de roce no realiza trabajo, porque no hay desplazamiento relativo entre los dos puntos en contacto de los cuerpos. Por tanto, la energía se conserva.

Por ejemplo, si hacemos rodar un cilindro en un plano rugoso, de manera que no resbale sobre él, en teoría –dada una velocidad inicial– el cilindro permanece eternamente rodando. En la práctica sabemos que esto no sucede. La suposición que existe un único punto de contacto entre el cilindro y el piso no se cumple: en realidad, es una superficie debido a que el cilindro se deforma –muy poco–, pero suficiente para que la condición de rodar sin resbalar no se cumpla en forma estricta. Además, el piso no es perfectamente plano, de manera que en algunos instantes existe –independiente de la deformación ya mencionada– más de un punto en contacto simultáneo, lo que genera un torque que contribuye a disipar la energía inicial con estos choques microscópicos.

Otra característica de esta forma de desplazamiento, es el rango de valores que puede alcanzar la fuerza de roce. Por ejemplo, un cilindro que rueda sin resbalar sobre un plano horizontal, tiene una fuerza de roce que se opone a su movimiento y cuyo *máximo valor* es igual a $F = \mu_{\text{estático}} N$, donde N es la fuerza normal al plano. Debemos recordar que esta fuerza no está determinada por esta ecuación, sino que varía desde cero hasta su valor máximo, ya indicado. Esta fuerza responde de acuerdo a las características del piso. Si es perfectamente plano y horizontal, el valor que toma la fuerza de roce es igual a cero, puesto que el cilindro no desacelera. Pero en caso que surga una leve pendiente, al ser remontada por el cilindro, su peso deja de ser normal al piso, adquiriendo una componente paralela a él, y simultáneamente, aparece una fuerza en sentido opuesto generada por el roce. Esta última no es, necesariamente, igual a la proyección tangencial del peso.



Ejemplo

Un cilindro de radio R y masa m , está empujado por una fuerza F , que actúa a una distancia h del piso, como se indica en la Figura. El coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y el piso es μ . Encuentre el valor de la fuerza de roce f y la aceleración lineal del cilindro.

Usamos las ecuaciones de Newton –incluyendo el torque– para resolver este problema. Sea x , el eje horizontal que se ubica a la altura del centro de masa del cilindro, y θ el ángulo que describe el cilindro al rodar. Las ecuaciones de Newton son:

$$m a = F - f.$$

Tomando torque con respecto al centro de masa y suponiendo que el momento de inercia del cilindro con respecto a este eje es I , tenemos:

$$I \alpha = -F(h - R) - f R.$$

Note que ambas fuerzas: F y f , generan un torque en el mismo sentido.

Si el valor de F permite que el cilindro ruede sin resbalar, entonces se cumple: $R \alpha = a$. Con esta última igualdad, tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: α , a y f . Resolviendo las ecuaciones se obtiene:

$$a = \frac{F h R}{I + m R^2} = R \alpha, \quad f = F \left[1 - \frac{m h R}{I + m R^2} \right].$$

Resulta interesante analizar los distintos valores que debe tomar f cuando cambiamos el punto de aplicación de la fuerza F . Esto ilustra lo que comentamos en el párrafo anterior: f no es constante, sino que varía dentro de ciertos límites.

Si $h = 0$, entonces estamos aplicando la fuerza en el punto de contacto, así: $f = F$, y el cilindro sólo se moverá si $F > f$. Si $h = R$, $f = F/3$, si incluimos el valor del momento de inercia del cilindro, $I = m R^2/2$. Podemos calcular en qué punto debemos aplicar F , de modo que no exista fuerza de roce, $f = 0$: $h = 3 R/2$.

Si el valor de f es mayor que $\mu_{\text{estático}} m g$, entonces el cilindro resbala y la fuerza de roce es: $f = \mu_{\text{cinético}} m g$. Este valor modifica la aceleración del cilindro:

$$a = \frac{F - \mu m g}{m}, \quad \alpha = \frac{F(h - R) + \mu m g R}{I}.$$

Ejemplo

Un disco con momento de inercia I_1 gira sobre un piso sin roce, con velocidad angular ω , alrededor de un eje vertical sin fricción. Un segundo disco de momento de inercia I_2 , que inicialmente no rota, cae sobre el primero (ver Figura). Como existe roce entre las superficies, pasados unos segundos ambos discos giran con la misma velocidad angular Ω .

- Calcule el valor de Ω .
- Calcule la razón entre la energía cinética de rotación inicial y la final, cuando ambos discos giran unidos.
- Suponga que la fuerza de roce entre ambos discos genera un torque $\tau_o = \text{constante}$: calcule cuánto tardaron los discos en alcanzar la velocidad angular común, Ω .

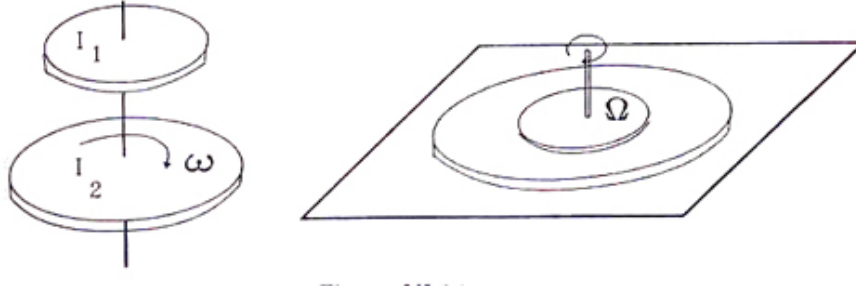


Figura VI.34:

a) Como no hay torques externos sobre los discos, el momento angular se conserva: $L_i = L_f$. El momento angular inicial corresponde exclusivamente al disco I_2 , puesto que es el único que se encuentra girando al comienzo:

$$L_i = L_f \implies I_2 \omega = [I_1 + I_2] \Omega,$$

el momento angular final es la suma de ambos momentos de inercia. De esta ecuación, podemos encontrar el valor de Ω :

$$\Omega = \frac{I_2}{I_1 + I_2} \omega.$$

b) La energía cinética de rotación inicial es: $I_2 \omega^2/2$ y la final es: $I_2^2 \omega^2/[2(I_1 + I_2)]$. La razón entre ambas es:

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} = 1 - \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

la energía cinética inicial que desapareció, fue disipada en forma de calor durante el lapso de tiempo en que los discos alcanzaron una misma velocidad angular.

Note que si $I_1 \gg I_2$, prácticamente toda la energía se disipa, independiente del valor inicial.

c) Sobre el disco I_2 se ejerce un torque τ_o que lo tiende a frenar. Puesto que no hay ningún torque externo, por acción y reacción, el mismo τ_o actúa sobre I_1 , pero en sentido opuesto. La aceleración angular sobre cada uno de los discos es:

$$\alpha_1 = \frac{\tau_o}{I_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\tau_o}{I_2}.$$

La velocidad angular obedece la ecuación: $\omega_f = \omega_i \pm \alpha t$, como ambos discos deben alcanzar –simultáneamente– la misma velocidad, se tiene:

$$\Omega = \omega - \alpha_2 T = 0 + \alpha_1 T, \implies T = \frac{\omega}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{I_1 I_2 \omega}{\tau_o [I_1 + I_2]}. \quad \square$$

Ejemplo

Un disco de masa M y radio R , está montado en un eje horizontal sin roce cuyo radio es r . Sobre este eje se enrolla un hilo cuyo extremo libre tiene atada una masa m . El conjunto se deja libre, partiendo del reposo (ver Figura). Si después de caer una altura h , el hilo se desprende del cilindro: ¿qué torque debemos aplicar al disco para detenerlo en cinco revoluciones?

Podemos resolver este problema usando el método tradicional de torque y fuerzas, pero es mucho más directo resolverlo utilizando el método de la energía.

Inicialmente sólo existe energía potencial, correspondiente a la masa m que está suspendida a una altura h : $E_i = m g h$. Esta expresión indica que el sistema de coordenadas usado tiene como origen el punto donde la masa m pierde contacto con el cilindro.

La energía total en el instante en que la masa m se desprende, es:

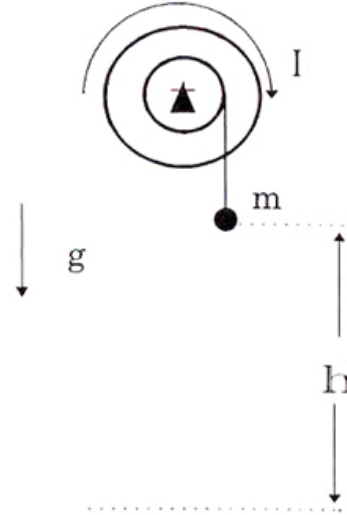
$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

donde I , es el momento de inercia del sistema disco-eje, y ω es su velocidad angular. La relación entre v y ω es: $v = \omega r$.

Igualando estas dos últimas expresiones obtengo el valor de la velocidad angular del disco, ω :

$$\omega^2 = \frac{2 m g h}{m r^2 + I}.$$

Si aplicamos un torque constante τ , la desaceleración del sistema será $\alpha = \tau/I = \text{constante}$. Recordando que la velocidad angular final es nula, entonces: $\omega_i = \alpha T$, con T , el



tiempo que tarda en detenerse el sistema. La expresión para θ , el ángulo recorrido antes de detenerse, es:

$$\theta = \omega_i T - \frac{1}{2} \alpha T^2 = \frac{\omega_i^2}{\alpha} - \frac{\alpha \omega_i^2}{2 \alpha^2} = \frac{\omega_i^2}{2 \alpha} = \frac{2 m g h I}{[m r^2 + I] \tau}. \square$$

Existe una forma más directa de obtener este resultado, que explicaremos a continuación.

La ecuación del trabajo y la energía

Análogamente a la forma cómo calculamos la pérdida de energía debida al roce para el movimiento de traslación, lo hacemos para la rotación.

El trabajo se definió como $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$, con $\Delta \vec{x}$, el desplazamiento del objeto donde actuaba la fuerza F . En el caso de la rotación se verifica que: $\Delta W = \tau \Delta \theta$. Se elimina el producto punto que aparece en su similar, porque estamos estudiando rotaciones con respecto a u. eje fijo en el espacio, de esta forma la dirección del torque siempre coincide con el vector que identifica al ángulo de rotación.

El formalismo para una rotación finita es:

$$\sum_{i=1}^N \tau \Delta \theta = \sum_{i=1}^N I \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Delta \theta = \sum_{i=1}^N I \Delta \omega \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N I \Delta \omega \omega = \frac{1}{2} I [\omega_f^2 - \omega_i^2],$$

donde usamos procedimientos similares a los utilizados al introducir el concepto de energía. El resultado final es:

$$\sum_{i=1}^N \tau \Delta \theta = \frac{1}{2} I [\omega_f^2 - \omega_i^2]. \quad (\text{VI.42})$$

Podemos aprovechar la semejanza de estos cálculos con sus equivalentes, desarrollados anteriormente y definir la potencia. En el caso de la traslación, su definición es:

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Para la rotación:

$$\text{Potencia} \equiv P = \tau \omega. \quad (\text{VI.43})$$

Ejemplo

Un cilindro de masa M , radio R y momento de inercia I con respecto a su eje de simetría, rueda sin resbalar desde lo alto de una colina. Si la velocidad del centro de masa del cilindro era V_o , encontrar la velocidad del cilindro después que ha descendido una altura h .

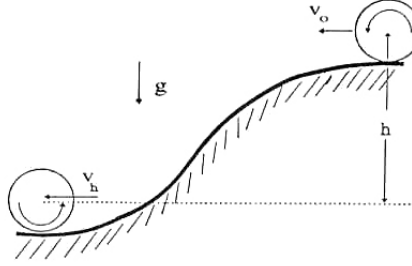


Figura VI.35:

Como no hay pérdida de energía, podemos usar su ley de conservación, incluyendo la energía de rotación:

$$E_i = E_f \implies \frac{1}{2} m V_o^2 + \frac{1}{2} I \left[\frac{V_o}{R} \right]^2 + m g h = \frac{1}{2} m V_h^2 + \frac{1}{2} I \left[\frac{V_h}{R} \right]^2.$$

En el primer término, no hay que olvidar la energía de rotación del disco. V_h , es la velocidad del disco en el punto inferior. Despejando V_h , obtenemos:

$$V_h^2 = V_o^2 + \frac{2 m g h}{m + I/R^2}. \square$$

VI.9. ROTACION EN TORNO A UN PUNTO

Los ejemplos y ejercicios desarrollados en este capítulo corresponden al caso de cuerpo plano girando en torno a un eje perpendicular a este plano o, a un cuerpo en tres dimensiones, si y sólo si, el eje escogido coincide con uno de sus ejes de simetría.

Para un cuerpo en tres dimensiones cuya rotación no se realiza de acuerdo a las especificaciones anteriores, las ecuaciones:

$$\vec{L} = I \omega, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = I \alpha,$$

no son válidas. El momento de inercia en este caso es una matriz y no un número como nosotros lo hemos introducido aquí.

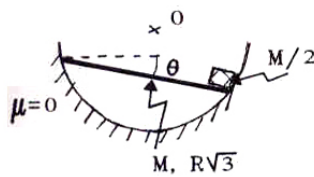
Estos casos son tratados en textos más avanzados.

VI.10. EJERCICIOS

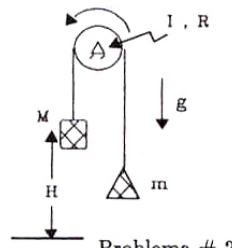
1. – Una barra de masa M y largo $\sqrt{3}R$ descansa sobre un canal de sección circular y de radio R . En un extremo de la barra se ubica una masa puntual $M/2$, como se indica en la Figura. Calcule el ángulo θ que adopta la barra en su posición de equilibrio.
2. – Sobre la polea de la Figura, cuyo momento de inercia es I , se enrolla una cuerda inextensible y sin masa. La polea gira unida a la cuerda, sin resbalar en ningún momento. En cada uno de sus extremos, cuelga un bloque de masa m y M respectivamente, con $M > m$.

Inicialmente la masa M está a una altura H y en reposo. Al soltarla cae y después de chocar con el piso permanece en reposo.

- a) Calcule el tiempo que demora la masa M en tocar el piso.
- b) Calcule hasta que altura alcanza a subir la masa m después que M toca el piso.



Problema # 1



Problema # 2

Figura VI.36:

3. – Un péndulo balístico es un aparato que se usa para medir la velocidad de una bala. En la Figura se muestra un esquema simplificado de este péndulo para entender su funcionamiento. Consiste de una masa M que cuelga de una cuerda ideal (sin masa) de largo L .

Contra la masa de este péndulo se dispara una bala con velocidad V_0 y masa m que se incrusta en el péndulo. Si M estaba inicialmente en reposo y ambas masas terminan moviéndose juntas después del choque:

¿Cuál es el ángulo máximo, θ_{Max} , que alcanza el péndulo debido al choque? Exprese el resultado en función de los datos del problema, incluyendo g y V_0 , de esta manera puede posteriormente determinar V_0 en función del ángulo de desviación.

4. – Cuando un cuerpo cuelga de un punto y se encuentra en reposo, cualquiera sea su forma, *siempre* su centro de masa se ubica en la vertical que pasa por dicho punto.

Las dos barras de largo $2L$ y 2ℓ , cuyas masas son M y m respectivamente, están soldadas en B formando un ángulo de 90° .

- Calcule la posición del Centro de Masa del sistema de las dos barras.
- Calcule el ángulo α que hace la barra $2L$ con la vertical en la posición de equilibrio.
- Estudie su respuesta con los siguientes casos particulares:
 - $m = 0$,
 - $M = 0$
 - $\ell = L$, con $m = M$.

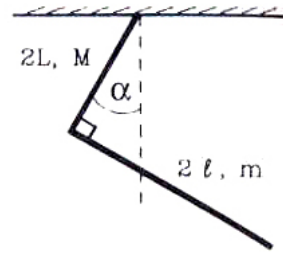
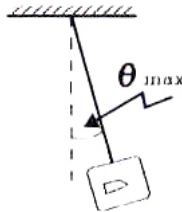
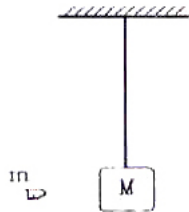


Figura VI.37:

Problema # 3

Problema # 4

5. – Pedro y Pablo Diet desean saber cuánto pesan, pero no disponen de una buena balanza. Para hacerlo idearon el siguiente método: se dirigieron a la plaza y se ubicaron en los extremos del balancín. Si Pablo se ubica a una distancia l_1 del apoyo del balancín y Pedro a una distancia l_2 , el balancín queda en equilibrio (ver Figura). Enseguida, Pedro toma una piedra de P kg. y se ubica a una distancia l_3 del centro de giro, mientras que Pablo lo hace a una distancia l_4 , quedando el sistema en equilibrio. Considere $l_4 > l_3$.

Obtenga una expresión para los pesos de Pedro y Pablo en función de los datos del problema.

6. – Calcular la tensión sobre la cuerda AB, si la barra OC tiene masa despreciable y el pivote en O no tiene roce.
7. – Un letrero luminoso, cuya masa tiene un valor M , cuelga en forma horizontal, sostenido mediante una cuerda y una barra, como se muestra en la Figura.

Calcule la tensión en la cuerda DC y las reacciones en la rótula de apoyo A.

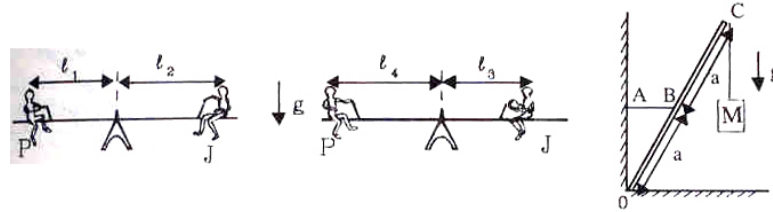


Figura VI.38:

Problema # 5

Problema # 6

8. – Un aro de madera circular delgado de masa m , radio R , se encuentra en un plano horizontal sin roce, en reposo. Una bola, también de masa m , se mueve con velocidad horizontal v , choca al aro y se incrusta en él como lo indica la Figura. Calcular la velocidad del centro de masa, el momento angular del sistema con respecto al CM , la velocidad angular ω del aro y la energía cinética del sistema, antes y después de la colisión.

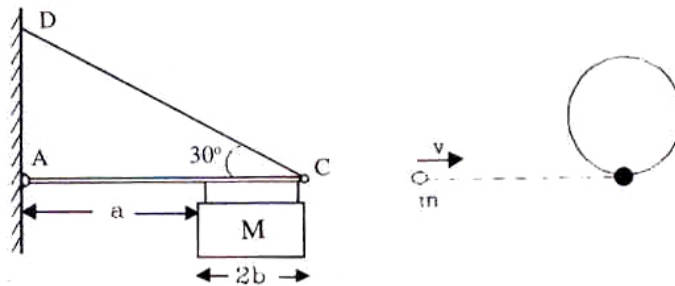


Figura VI.39:

Problema # 7

Problema # 8

9. – Los cuatro puntos de la Figura, cuyas masas son iguales a m , se ubican en los vértices de un rectángulo de lados ℓ y 2ℓ , que descansa sobre una superficie horizontal sin roce. Los puntos están conectados por barras rígidas de masa despreciable. Otra masa puntual, M , se acerca en la dirección del eje x con una velocidad V_o , choca con la masa ubicada en ese vértice y permanece adherida a ella después del choque.
- Encuentre la posición del centro de masa del rectángulo. No considere, en esta pregunta, la masa que colisiona.
 - Calcule el valor de la velocidad del centro de masa del sistema total, incluyendo todas las partículas.
 - Describa el movimiento del sistema después del choque.

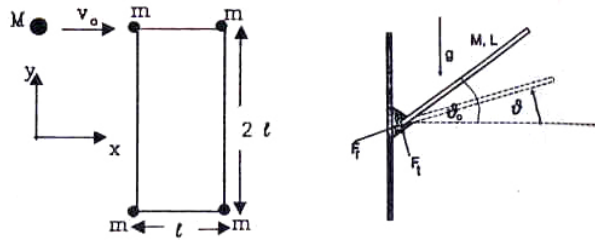


Figura VI.40:

Problema # 9

Problema # 10

10. – Una barra de largo L y masa M , puede girar libremente en torno a una bisagra empotrada en la pared (ver Figura). La barra está inicialmente en reposo y forma un ángulo θ_0 con la pared. En $t = 0$, la barra se suelta. Calcule la componente perpendicular a la barra de la fuerza que ejerce la bisagra sobre la barra, cuando el ángulo entre la barra y la vertical es θ . El momento de inercia de la barra con respecto al centro de masa es $I = M L^2/12$.
11. – Un panel rígido delgado de masa M , ancho w y longitud l , está suspendido verticalmente desde un eje horizontal, sin roce, en su lado superior. Una bala de masa m , con velocidad V perpendicular al panel, se aloja en su centro.
- a) ¿Cuál es la velocidad de la bala justo después del impacto?
- b) ¿Cuál es el valor del ángulo de giro, θ , que experimenta el panel?

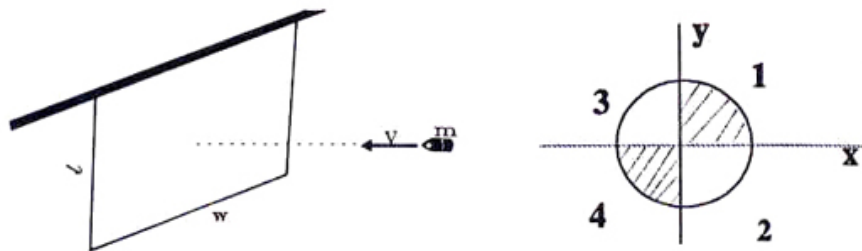


Figura VI.41:

Problema # 11

Problema # 13

12. – Un hombre se encuentra de pie en el *centro* de una plataforma giratoria con sus brazos extendidos horizontalmente y con una masa de 5 kg en cada mano. Se le pone en rotación alrededor de un eje vertical, con una velocidad angular de una vuelta cada dos segundos. Calcular su nueva velocidad angular si deja caer

sus manos a ambos lados del cuerpo. El momento de inercia del hombre puede suponerse constante e igual a $5,9 \text{ kg m}^2$. La distancia primitiva de los pesos al eje es de 90 cm y su distancia final 15 cm.

13. – Un cilindro sólido tiene una densidad que varía por cuadrantes, como se indica en la Figura. Los números que allí aparecen reflejan los valores relativos de las densidades en los cuadrantes. Encuentre la ecuación de la recta que cruza el origen y el CM simultáneamente. Tome como referencia el eje x e y , de la Figura.

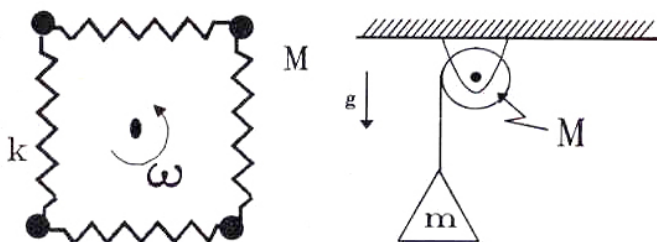


Figura VI.42:

Problema # 14

Problema # 15

14. – Cuatro masas M , ubicadas en un mismo plano y sometidas únicamente a la fuerza externa provocada por los resortes de constante K , largo natural L y masa despreciable. Los resortes están girando con velocidad angular W en torno a un eje perpendicular al plano a través de su centro de simetría. Suponiendo que el sistema se mantiene en equilibrio. ¿Cuánto se extienden los resortes?
15. – Una masa m está colgada de una cuerda alrededor de un cilindro sólido circular de masa M y radio R , pivoteado sin roce como se muestra en la Figura. Encontrar la aceleración de m .
16. – Un cascarón esférico de radio externo R , y radio interno r , tiene una masa por unidad de volumen, ρ , constante. Expresa el momento de inercia I de este cascarón, con respecto a un eje que pasa a través del centro, en términos de r , ρ , R y la masa total M .
17. – Una esfera uniforme y sólida, se ubica en reposo sobre un plano inclinado en un ángulo θ . ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de roce estático, μ_0 , entre la esfera y el plano inclinado, para que ruede sin resbalar?
18. – Un yo-yo está formado por dos discos uniformes cada uno de masa M y radio R . Uniendo estos discos hay un eje de radio r y masa despreciable.

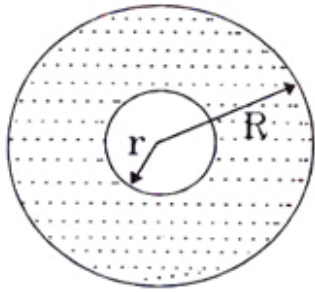
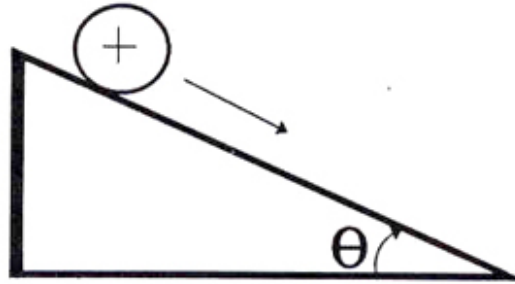


Figura VI.43:



Problema # 16

Problema # 17

Un hilo se enrolla en torno a este eje y su extremo se sostiene desde una cierta altura. En un instante, el yo-yo se deja caer, partiendo del reposo. Inicialmente se encuentra a una distancia D , del extremo superior del hilo.

- Si no hay movimiento pendular, ¿qué ángulo forma el hilo con la vertical cuando se suelta el yo-yo?
- ¿Cuál es la aceleración del centro del carrito?

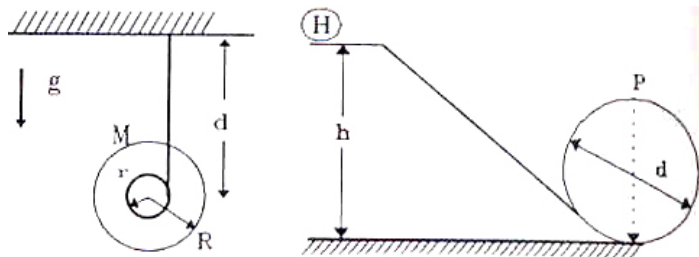


Figura VI.44:

Problema # 18

Problema # 19

- El aro H de radio r rueda sin resbalar por el plano inclinado. La altura de partida h , es tal que el aro adquiere una velocidad suficiente para mantenerse en contacto con el riel circular hasta el punto P .
¿Cuál es el valor de la altura h ?
- Al presionar una bolita sobre una mesa horizontal, sale proyectada a lo largo de la mesa con velocidad inicial v_0 , y velocidad angular w_0 , siendo el eje de rotación horizontal y perpendicular a v_0 . La bolita tiene radio R , y su coeficiente de fricción con la mesa es constante.

- a) ¿Qué relaciones deben existir entre v_0 , R y w_0 para que la bolita se detenga?
 b) Relacione v_0 , R y w_0 para que la bolita resbale, se detenga y vuelva a su posición inicial con velocidad $V = \frac{3}{7} v_0$

21. – Un disco circular uniforme de radio R y masa M , puede girar libremente con velocidad angular ω , en un plano horizontal alrededor de P . Fijas al borde del disco se mantienen dos masas m , unidas –cada una– por una cuerda de largo ℓ . En cierto instante, se rompe la traba que las mantenía fijas, sin afectar – en este proceso– el momento angular del sistema. Las masas se extienden y las cuerdas que las sostienen son liberadas de sus ganchos H y H' , cuando éstas alcanzan a extenderse radialmente hacia afuera. Encontrar ℓ , la longitud de estas cuerdas, tal que el disco sea detenido por esta acción.

Nota: Este esquema ha sido usado para reducir el movimiento de giro de algunos satélites.

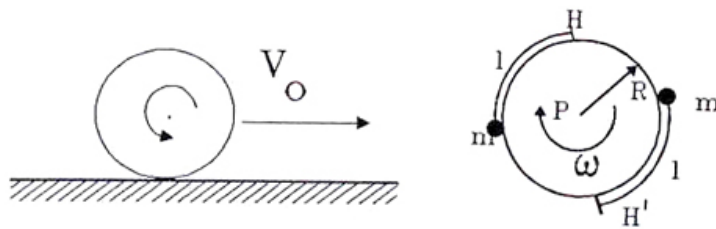


Figura VI.45:

Problema # 20

Problema # 21

22. – Dos cilindros indistinguibles entre sí ruedan sin deslizar sobre un plano inclinado. Uno de ellos llega al extremo del plano *antes* que el otro. Si ambos tienen la misma masa y radio externo, ¿qué conclusión puede sacar Ud. acerca de la estructura de estos cilindros?
23. – Dos partículas cuyas masas son $\frac{3}{4}M$ y M respectivamente, están conectadas por un resorte de masa despreciable, largo natural L y constante k . Estas partículas se encuentran inicialmente en reposo, a una distancia L sobre una mesa horizontal sin roce. Un objeto cuya masa es $M/4$, se mueve con rapidez v a lo largo de la línea que define el resorte, choca y se adhiere a la partícula de $3M/4$. Encontrar la amplitud y el período con el cual vibra el sistema después del choque.
24. – El sistema de la Figura, consiste de dos masas que se mantienen separadas una distancia $a + \ell$, donde ℓ , es el largo natural del resorte que las une. No existe roce entre las masas y el piso. Repentinamente son abandonadas desde el reposo.

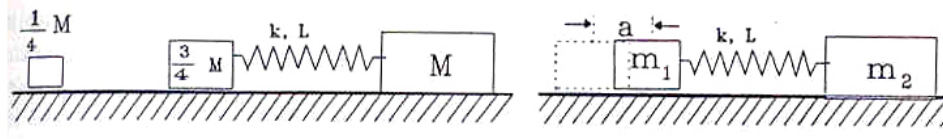


Figura VI.46:

Problema # 23**Problema # 24**

- a) Encontrar los períodos de oscilación de m_1 y m_2 .
 - b) Comparar el período con el de un oscilador de masa simple.
 - c) Encuentre la energía de oscilación del sistema.
 - d) ¿Cómo se reparte esta energía entre m_1 y m_2 ?
25. – Una barra de largo ℓ y masa m , cuelga verticalmente de un soporte, sin roce, que le permite girar completamente en torno a él.

Por la izquierda se aproxima una masa m que impacta horizontalmente en el extremo de la barra, con velocidad V_o . Inmediatamente después del impacto la masa queda pegada a la barra y comienza a moverse con ella.

- a) Calcule la velocidad angular del conjunto barra-masa inmediatamente después del impacto.
- b) ¿Qué valor debe tomar V_o para que el sistema barra-masa pueda alcanzar la posición vertical superior con una velocidad angular nula?

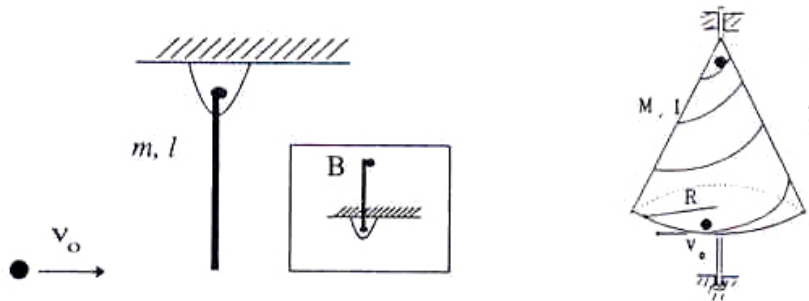


Figura VI.47:

Problema # 25**Problema # 26**

26. – Un cono de masa M , radio basal R , altura h puede girar libremente y sin roce alrededor de su eje de simetría. El momento de inercia con respecto a este eje es I . Una partícula puntual de masa m , parte del reposo desde su vértice y se desliza por un tubo *sin fricción*, que envuelve el manto del cono y emerge *horizontalmente*,

en forma tangente al círculo de su base. Inicialmente el *cono y la partícula se encuentran en reposo*. Encontrar la velocidad angular del cono ω y la velocidad V_o de la partícula con respecto al piso, justo después que ésta sale por la base. Recuerde que la velocidad V_o es paralela al piso en el momento de la salida.

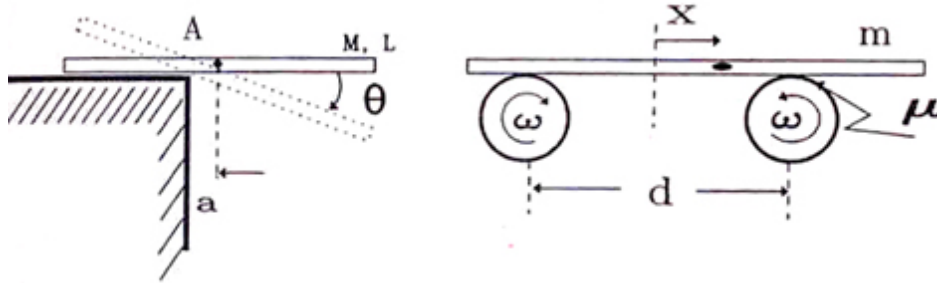


Figura VI.48:

Problema # 27

Problema # 28

27. – Una barra recta, uniforme y homogénea de masa M , y longitud L , se encuentra perpendicular al borde de una mesa. Su centro de masa se ubica fuera de la mesa, a una distancia a , como se muestra en la Figura. La barra se suelta desde el reposo en una posición horizontal y *comienza a girar teniendo como centro, el borde de la mesa*. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y la mesa es μ , encontrar el valor del ángulo θ que forma la barra con la horizontal en el instante que ésta *comienza a deslizar* por el borde.

Nota: para encontrar el ángulo θ opere de la siguiente manera:

- Suponga que la barra comienza a deslizar cuando el ángulo alcanza un valor igual a θ . Escriba la conservación de la energía para dos instantes: cuando la barra adopta el ángulo θ y al comenzar a caer. (Esto genera una ecuación).
- En la posición de la Figura, escriba las ecuaciones de Newton y el torque con respecto al punto A , para el centro de masa de la barra, esto nos suma tres ecuaciones adicionales.

No olvide incluir la aceleración angular *tangencial y centrípeta* en las ecuaciones de Newton. Recuerde que la aceleración angular α y la aceleración del centro de masa están relacionadas (una ecuación adicional).

- De estas 5 ecuaciones puede despejar θ . Encuentre que el ángulo θ es:

$$\tan \theta = \frac{\mu \ell^2}{\ell^2 + 36 a^2}.$$

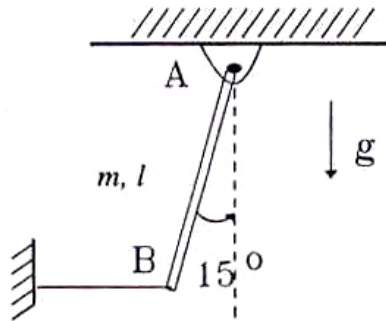


Figura VI.49:

Problema # 29

28. – La Figura muestra un tablón uniforme de masa m deslizando horizontalmente sobre dos rodillos que giran en sentidos opuestos y con velocidad angular constante ω . La distancia entre ejes es d y el coeficiente de roce cinético es μ .
- En la posición de la Figura, con su centro de masa desplazado una distancia x , calcule las reacciones del cilindro sobre el tablón. El origen de la coordenada x es el punto medio de la distancia entre ejes.
 - Demuestre que el tablón describe un movimiento armónico simple. Determine el valor de ω .
 - Si en el instante que el centro de masa del tablón pasa por $x = 0$ tiene una velocidad V_0 , encuentre el valor de la amplitud de esta oscilación.
29. – Una barra uniforme de masa m y largo ℓ , puede girar libremente en torno al extremo A. Inicialmente la barra está en equilibrio sostenida por una cuerda unida a su otro extremo B, formando un ángulo $\theta = 15^\circ$ con la vertical.
- Calcule la tensión de la cuerda horizontal que sostiene la barra.
 - Si en $t = 0$ se corta la cuerda, calcule el tiempo que demora la barra en retornar por primera vez a su posición inicial. Suponga que el movimiento es armónico simple.
 - Calcule la velocidad del extremo B en cualquier instante t .

Gravitación

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

VIII

Capítulo VII

GRAVITACION

VII.1. INTRODUCCION

La ley de gravitación universal de Newton posee una expresión muy simple y se verifica en una amplia escala de distancias. Tiene el gran mérito de describir –en base a una sola definición–, fenómenos locales, como la caída de un pedazo de tiza en la superficie de la Tierra, hasta el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Sus aplicaciones se extienden a distancias aún mayores: a una galaxia, o, a escalas cosmológicas, a la descripción del universo, donde provee una excelente aproximación.

El poder de esta ley, que logró explicar con una misma fórmula, un gran número de fenómenos, la transformó en casi un dogma.

Por ejemplo, su aplicación al estudio de la trayectoria de los planetas, a comienzos del siglo pasado, permitió establecer la existencia de Neptuno, antes de que éste fuera observado por los astrónomos.

Efectivamente, en 1841, John Couch Adams, estudiante de la Universidad de Cambridge, al analizar la trayectoria de Urano, encontró que las anomalías descubiertas en su órbita, podían explicarse mediante la existencia de otro planeta –aún no observado– que orbitaba alrededor del Sol. Para llegar a esta conclusión, empleó los resultados de la Mecánica Celeste, que es un formalismo que incorpora las leyes de Newton y de la gravitación universal, al estudio del movimiento de los planetas incluyendo, además de la atracción gravitacional del Sol, la interacción entre ellos.

Los astrónomos no prestaron atención a este resultado. Sólo cinco años más tarde, en 1846, fue observado en una posición muy cercana a la predicha, por Johan Gotfried Galle, quien lo hizo a instancias del teórico francés Urbain Jean Joseph Le Verrier, que había llegado a la misma conclusión que Couch, en 1845.

Una predicción similar a la anterior fue hecha con respecto a la existencia de Plutón, a principios de este siglo. Las desviaciones observadas en la órbita de Urano y Neptuno

podían ser explicadas mediante la atracción gravitacional de un objeto extraño que supuestamente orbitaba en dicha región del espacio.

Plutón fue descubierto, fortuitamente, en 1929. Los cálculos empleados en la predicción de su órbita contenían errores y la trayectoria anunciada no coincidió con la observada.

Conviene aclarar que la solución al problema de tres (o más) cuerpos en el espacio, cuyas trayectorias están determinadas por la atracción gravitacional mutua, *no tiene solución analítica*. Es decir, el movimiento del sistema no puede ser descrito en base a funciones conocidas. Las órbitas deben obtenerse mediante métodos numéricos o *aproximaciones* analíticas.

Se denomina sistema binario a un par de estrellas girando, una en torno de la otra. Constituyen otro campo en el cual las leyes de Newton han contribuido a descubrir un objeto invisible. En estos casos, al observar una estrella –aparentemente solitaria– que describe un movimiento periódico alrededor de un punto en el espacio, podemos deducir, que existe un objeto invisible que la mantiene en órbita.

Dependiendo de los datos observacionales disponibles, se pueden estimar algunas características de la estrella invisible. La más importante –en particular en la búsqueda de agujeros negros– es su masa.

Los agujeros negros son estrellas que están colapsando debido a su propia atracción gravitacional, hasta desaparecer de la vista, pero que dejan como remanente, su intenso campo gravitacional. Para que una estrella alcance un comportamiento como el descrito, debe llegar a la última etapa de su evolución, con una masa superior a tres veces la masa del Sol. Los candidatos más serios a agujeros negros en nuestro sistema solar, son *Cygnus X-1*, y *V404 Cygni*, cada uno de ellos pertenece a un sistema binario; son los acompañantes invisibles de otra estrella luminosa y las estimaciones más conservativas los clasifican como estrellas en su última etapa de evolución, con una masa equivalente a la de –aproximadamente– seis masas solares cada una.

De este modo podemos apreciar la diferencia que existe entre una ley física: la gravitación universal de Newton, por ejemplo, y una empírica, como la usada en la descripción del roce. Un experimento que no se ajuste a esta última, no lleva a pensar en nuevos fenómenos físicos, sino más bien indica los límites de la aproximación. En cambio, una leve desviación de la esperada a partir de la ley de gravitación universal, *sugiere* la existencia de un objeto nuevo en el espacio.

Es conveniente señalar que la gravitación universal propuesta por Newton, es una *excelente aproximación*, pero no es la teoría definitiva. En 1850, Le Verrier, ya citado anteriormente, conocía de una pequeña discrepancia existente entre la trayectoria de Mercurio y las predicciones de la Mecánica Celeste que, como sabemos, está fundada sobre las leyes de Newton. El desacuerdo entre observación y teoría, fue resuelto por Albert Einstein en 1915, cuando anunció que dentro del esquema de su nueva teoría de

la gravitación, la relatividad general, desaparecía la discrepancia: la nueva trayectoria obtenida, se ajustaba a la observada en el planeta Mercurio. Este resultado y otros más, dieron –merecidamente– a Einstein el prestigio que hoy le rodea.

La base teórica de la relatividad general es la geometría y sus efectos son –al menos aquí en la Tierra– difíciles de medir por la gran precisión que es necesario utilizar. En general, las teorías Newtonianas son suficientes para entender una amplia gama de fenómenos.

Finalmente, mencionaremos dos suposiciones que introduce la ley de gravitación universal, sin procurar explicación alguna para ellas: establece que la interacción gravitacional entre dos cuerpos ocurre en forma instantánea, y que la fuerza gravitacional se transmite a través del espacio vacío, sin necesidad de un medio que la sustente. A cambio de esto proporciona una formulación matemática que describe una infinidad de fenómenos, algunos de ellos que anteriormente parecían no estar relacionados. Los enigmas que introduce son mínimos, comparados con los que resuelve.

VII.2. LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL

VII.2.1. Fuerzas proporcionales al inverso del cuadrado de la distancia

Examinemos la semejanza que pudiera existir entre la caída de un cuerpo en la superficie de la Tierra y el movimiento de la Luna alrededor de nuestro planeta. La idea de Newton fue la siguiente: los objetos caen debido a la atracción gravitacional de la Tierra; lo mismo debe suceder con la Luna, si esta fuerza se extiende hasta su posición. La Luna describe aproximadamente una circunferencia alrededor de la Tierra. Este cambio en la trayectoria rectilínea señala la existencia de una aceleración que permanentemente la está desviando. Note, que al hacer esta afirmación, estamos suponiendo –implícitamente– que las leyes de Newton son válidas para objetos como la Luna; ubicados a una gran distancia y de una dimensión mucho mayor que las usuales en la Tierra.

Newton argumentó que la Luna estaba cayendo hacia la Tierra, pero que debido a la magnitud de su velocidad orbital, el cambio de dirección experimentado, se compensaba con la curvatura de la superficie de la Tierra, de modo que la velocidad permanecía paralela a ella, y el radio de su órbita se mantiene constante, como ilustra la Figura [VII.1].

Newton afirmaba que al lanzar un objeto desde la cima de una montaña (ver Figura [VII.1]), con una velocidad de $\sim 90,000$ km/h, veríamos que el objeto se perdía en el horizonte, sin alcanzar la superficie. Argumentaba, que la curvatura experimentada por la trayectoria de la partícula, coincidía con aquella de la esfera terrestre, por lo tanto, se mantenía en órbita, sin caer nunca.

Examinemos los números que caracterizan el movimiento de la Luna, e investiguemos

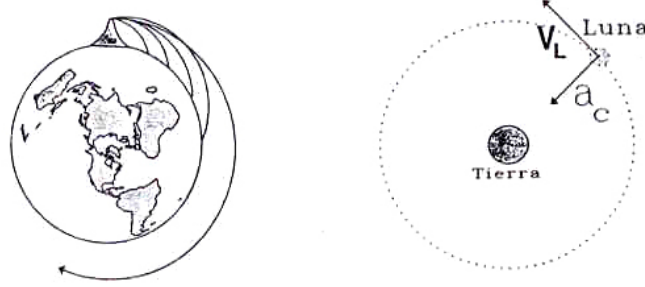


Figura VII.1: Órbita de una partícula lanzada con distintas velocidades desde una montaña, de acuerdo al experimento concebido por Newton. A la derecha se incluye el diagrama de cuerpo libre de la Luna, considerada como un punto, orbitando la Tierra.

si este razonamiento coincide con las observaciones. Su período es de 27.3 días y el radio de la órbita alrededor de la Tierra –que suponemos circular– es:

Distancia Luna–Tierra = $3,84 \times 10^8 \text{ m} \approx 60 \times R_{\oplus}$, con $R_{\oplus} \equiv$ radio de la Tierra.

Con estos datos podemos calcular la velocidad orbital de la Luna:

$$v_{\text{Luna}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 3,84 \times 10^8}{27,3 \times 24 \times 3600} \approx 1 \times 10^3 \text{ m/seg.}$$

$$a_{\text{Luna}} = \frac{v^2}{R} \simeq \frac{10^6}{3,84 \cdot 10^8} \simeq 0,26 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \approx 2,6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Este es el valor de la aceleración centrípeta que experimenta la Luna. Aquí no hemos usado las leyes de Newton, sólo geometría.

Siguiendo el esquema desarrollado por Newton, *suponemos que la atracción gravitacional entre dos cuerpos, disminuye proporcionalmente al inverso del cuadrado de la distancia entre ellos*. Newton se inspiró en el decaimiento observado en la intensidad de la luz a medida que se propaga, para enunciar esta ley.

Comparemos la aceleración centrípeta a_c calculada anteriormente, con la aceleración gravitacional que debe experimentar la Luna, si la ley que rige su decaimiento –propuesta en el párrafo anterior– es correcta.

Si denominamos $g_{\oplus} \equiv$ aceleración gravitacional en la superficie de la Tierra debido a su propia masa, y $a_L \equiv$ aceleración gravitacional ejercida sobre un objeto ubicado en la posición de la Luna originada por nuestro planeta, tenemos:

$$a_L \propto \frac{K}{R_{L-T}^2}, \quad g_{\oplus} \propto \frac{K'}{R_{\oplus}^2}.$$

Suponiendo que la caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra está gobernada por la misma ley que desvía a la Luna de su trayectoria rectilínea, entonces, la constante de proporcionalidad en ambos casos debe ser la misma: $K = K'$. De aquí encontramos la razón entre estos dos números:

$$\frac{g_{\oplus}}{a_L} = \frac{R_{L-T}^2}{R_{\oplus}^2},$$

tomando $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, obtenemos:

$$a_L = \left(\frac{R_{\oplus}}{R_{L-T}} \right)^2 g_{\oplus} \simeq 2,7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

Dentro de las aproximaciones hechas, esta aceleración es similar a la encontrada anteriormente, donde sólo usamos cinemática. Podemos concluir que la proposición acerca del comportamiento de la fuerza gravitacional actuando sobre la Luna, no contradice abiertamente los datos observacionales.

En rigor, al resolver el problema usando las leyes de Newton es necesario hacer varias correcciones. Una de ellas es que el sistema Tierra–Luna *gira en torno a su centro de masa* y no con respecto al centro de la Tierra, como supusimos al hacer el cálculo anterior. Lo que sucede es que la Tierra es mucho más masiva que la Luna, de modo que el centro de masa del sistema se ubica al interior de nuestro planeta.

Ejercicio

Suponiendo que la Tierra y la Luna son dos esferas que permanecen en reposo, ubique la posición del centro de masa de este sistema.

VII.2.2. Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal de Newton, establece que la fuerza de atracción gravitacional entre dos masas puntuales m y M , está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{r}. \quad (\text{VII.1})$$

El signo $(-)$ indica que la fuerza entre las dos masas es atractiva, r es la distancia entre ellas y $\hat{r}$ es el vector unitario que apunta desde el centro de uno de los cuerpos hacia el otro. G es la constante de gravitación universal y fue medida por Henry Cavendish usando una balanza de torsión.

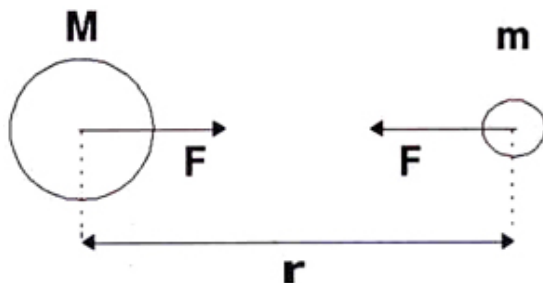


Figura VII.2: Suponemos que ambos cuerpos son partículas puntuales. La distancia r indica la separación entre los centros de las respectivas esferas.

El principio de acción y reacción es válido: la fuerza que ejerce M sobre m es la misma, en magnitud y dirección, pero tiene sentido opuesto a la fuerza que ejerce m sobre M .

Un esquema del aparato usado por Cavendish para medir G , se muestra en la Figura. Consiste en un péndulo de torsión con una barra unida a su extremo, la cual sostiene un par de masas iguales. Al acercar dos masas –cuyo valor es conocido– al extremo de la barra, ésta gira debido al torque generado por la atracción gravitacional que se produce sobre las esferas masivas instaladas en ella. Como esta rotación es muy pequeña, es necesario magnificarla; para ello se instala un espejo en el eje del péndulo de torsión, que refleja un haz de luz que se hace incidir sobre él, proyectándolo sobre una pantalla ubicada a cierta distancia. Un pequeño giro en la barra, produce una gran desviación de la imagen en la pantalla.

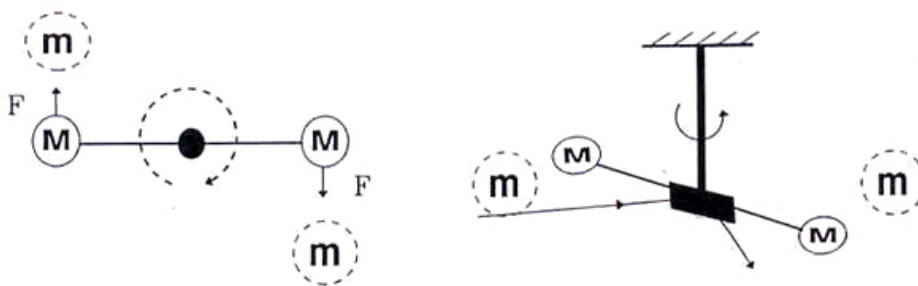


Figura VII.3: La Figura muestra el diseño del péndulo de torsión empleado por Cavendish para medir la constante de gravitación G . El espejo refleja un haz de luz incidente, que permite detectar pequeñas rotaciones de la barra.

Dados los valores de las masas en el extremo de la barra, la distancia a la cual se

aproximaron las masas externas y el ángulo de rotación del péndulo, se puede calcular el valor de G :

$$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ newton } m^2/kg^2 \quad (\text{VII.2})$$

Es interesante mencionar otros métodos usados para calcular el valor de G .

Un geofísico francés: P. Bouguer, en 1730, fue quien la determinó por primera vez, al notar una pequeña desviación en un plomo que colgaba de una cuerda muy larga en un precipicio en la cordillera de los Andes, en Ecuador. Bouguer supuso, correctamente, que este cambio de dirección se debía a la masa de la montaña y midió, bajo estas condiciones, la constante G . Este fue el primer intento de una serie de experimentos posteriores realizados por la comunidad de geofísicos y que ha concluido con un valor para G , diferente al obtenido en el laboratorio usando instrumentos más sensibles que los utilizados por Cavendish en 1798.

Es interesante notar que transcurrieron más de cien años entre la publicación del libro *Principia* de Newton y la determinación del valor de G por Cavendish. Una posible explicación de este retraso, según K. E. Bullen (*The Earth's Density*, 1975, Chapman and Hall, London) se debió a un error aritmético de Newton, que lo hizo pensar que no se podía medir el valor de G en el laboratorio. Newton calculó el tiempo que demoraba un par de esferas de aproximadamente 30 cm. de diámetro en chocar, era de un mes, si inicialmente estaban a 7,5 cm. de distancia y la única fuerza que actuaba sobre ellas era la atracción gravitacional mutua. El valor correcto es de 330 segundos.

Conocido $R_{\oplus}$ y la constante G , podemos determinar la masa de la Tierra incluyendo la fuerza gravitacional en la segunda ley de Newton:

$$m g = G \frac{M m}{R_{\oplus}^2} \Rightarrow M = \frac{g R_{\oplus}^2}{G}.$$

Insertando los valores numéricos de las cantidades indicadas, obtenemos:

$$M_{\oplus} \simeq 5,98 \times 10^{24} kg.$$

Con este valor podemos encontrar la *densidad media* de la Tierra:

$$\rho \simeq \frac{6 \times 10^{24}}{\frac{4\pi}{3} (6,4 \times 10^6)^3} \simeq 5,5 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}.$$

VII.3. TEOREMAS DE NEWTON

Newton demostró, en dos teoremas, que *resulta correcto reemplazar un objeto masivo con simetría esférica por un punto, que concentra toda la masa de este objeto y que se ubica en su centro*. Esta posibilidad ha sido utilizada en los cálculos anteriores, cuando hemos reemplazado la Tierra –supuestamente una esfera perfecta–, por una masa puntual

en su centro. Estos teoremas dan validez a los métodos utilizados en la resolución de los ejemplos anteriores.

Destaquemos que la posibilidad de reemplazar un cuerpo con simetría esférica por una masa puntual en su centro, se debe exclusivamente a que la fuerza depende del inverso del cuadrado de la distancia entre las partículas.

Teorema I

Un objeto, cualquiera sea su forma, que se ubique dentro de un cascarón esférico y homogéneo de materia, no experimenta ninguna fuerza gravitacional proveniente del cascarón.

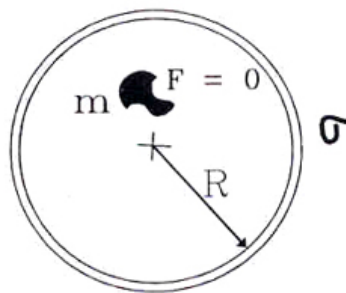


Figura VII.4:

Teorema II

La fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo que se ubica fuera de un cascarón esférico y homogéneo, de masa M , es la misma que experimentaría si toda la masa del cascarón se concentrara en el centro de la esfera.

Demostración del Teorema I.

Considere una partícula de masa m en un punto P , en cualquier lugar dentro de un cascarón esférico de materia. Suponga que tiene una densidad uniforme σ , y un espesor despreciable.

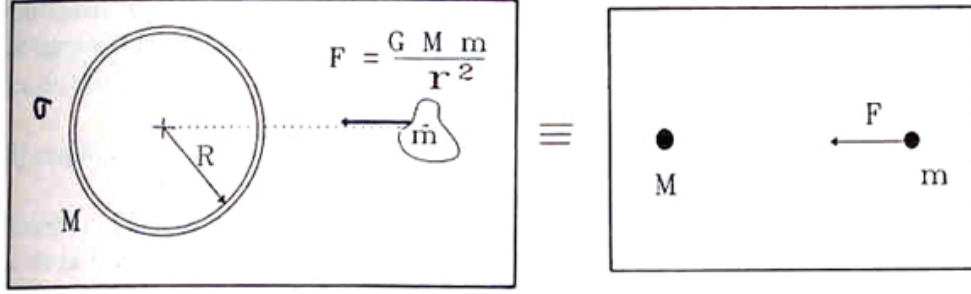


Figura VII.5:

Se construye un cono, *muy angosto*, con vértice común P , que determina las áreas A_1 y A_2 , en su intersección con el cascarón. Las distancias desde P hasta el centro de A_1 y A_2 es r_1 y r_2 , respectivamente. Como la apertura de los conos es infinitesimal, podemos dibujar una esfera de radio r_1 que, aproximadamente, coincida con la superficie A_1 . Mientras más pequeño sea el ángulo del vértice del cono, mejor es la aproximación. De esta forma, el área A_1 es igual al *ángulo sólido* Ω_1 por el radio r_1 al cuadrado. (Ver Apéndice Matemático, para conocer el origen de esta expresión del área). De aquí:

$$A_1 = \Omega_1 r_1^2, \quad \text{además la masa en esta área es: } \Delta M_1 = \sigma \Omega_1 r_1^2.$$

La fuerza gravitacional generada por este elemento ΔM_1 , sobre la masa m , ubicada en P es:

$$\Delta F_1 = \frac{G \Delta M_1 m}{r_1^2},$$

y está dirigida hacia el centro de A_1 , a lo largo del eje del cono. Reemplazando la expresión para ΔM_1 definida anteriormente, obtenemos:

$$\Delta F_1 = \frac{G \sigma \Omega_1 r_1^2 m}{r_1^2} = G \sigma \Omega_1 m,$$

Podemos repetir el mismo argumento para calcular la fuerza que ejerce ΔM_2 sobre m . El resultado es:

$$\Delta F_2 = \frac{G \sigma \Omega_2 r_2^2 m}{r_2^2} = G \sigma \Omega_2 m,$$

y apunta desde m hacia ΔM_2 .

Siendo uno de los conos la prolongación del otro, tienen el mismo ángulo sólido: $\Omega_1 = \Omega_2$.

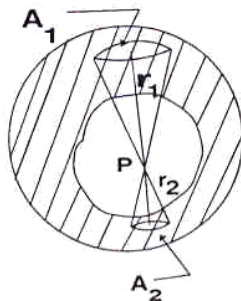


Figura VII.6: En la Figura se indican los conos geométricos utilizados en la demostración del Teorema I. Se supone que son infinitesimales, de manera que las aproximaciones tengan un error despreciable.

Ambas fuerzas ΔF_1 y ΔF_2 , tienen la misma dirección, pero sentidos opuestos. Como el cascarón es homogéneo, la densidad de masa σ , es constante e igual en todos los puntos, de modo que la fuerza neta sobre la masa m , se cancela:

$$\Delta F_1 + \Delta F_2 = 0.$$

Además, como el punto P fue elegido arbitrariamente, este argumento es válido para cualquier posición dentro del cascarón esférico homogéneo.

Hasta aquí, sólo hemos demostrado que las fuerzas provenientes de un par de elementos infinitesimales de superficie del cascarón, elegidos de la forma especificada, *no* producen ninguna fuerza neta, sobre una masa puntual m , ubicada en el interior.

Para extender el resultado a toda la superficie, sólo debemos sumar el efecto de cada uno de los pares de conos infinitesimales hasta cubrir la esfera.

Para generalizar este resultado a una esfera masiva o con un hueco en su interior, basta con sumar cascarones infinitesimales sobrepuestos, aumentando lentamente su radio.

La condición que *no* podemos eliminar es la homogeneidad del cascarón: $\sigma = \text{constante}$, puesto que se destruye el equilibrio de las fuerzas.

Es conveniente destacar que este resultado se obtuvo debido a que la fuerza es proporcional a $1/r^2$. Una pequeña variación en la potencia de r , destruye este resultado. A su vez, esta característica permite verificar, mediante un experimento, la exactitud del valor de este exponente.

Con este comentario finalizamos la demostración que la fuerza gravitacional neta sobre una partícula ubicada al interior de un cascarón homogéneo es nula. $\square$

No se incluye la prueba del segundo teorema. Aceptamos el resultado y lo usaremos más adelante. Se puede dar un argumento de plausibilidad: debido a la simetría

esférica, la fuerza que experimenta una masa puntual frente a un cascarón, sólo puede tener una componente neta en la dirección del eje que une sus centros; las componentes perpendiculares a este eje, se anulan por simetría.

Ilustraremos este argumento resolviendo –como Ejemplo– el problema de una partícula frente a un anillo. No es difícil imaginar una esfera como una superposición de anillos de distinto radio.

Ejemplo

Calcular la fuerza que se ejerce sobre la masa m , ubicada a una altura h en el eje del anillo de la Figura. El anillo tiene una densidad lineal de masa λ [kg/m], y un radio R .

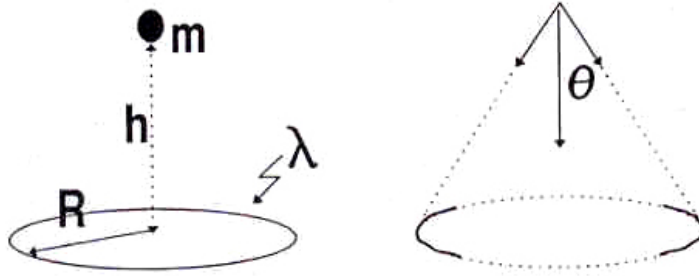


Figura VII.7: Al sumar las fuerzas generadas por segmentos opuestos del anillo, sobre la partícula m , se ve que sólo sobreviven sus componentes verticales.

Un elemento de arco del anillo se representa por $[ds]$, y la masa asociada es: $\lambda [ds]$. De acuerdo a la ley de gravitación universal, la fuerza que este segmento ejerce sobre m es:

$$\Delta \vec{F} = G \frac{\lambda [ds] m}{(R^2 + h^2)} \hat{r},$$

donde $\hat{r}$, representa el vector unitario cuya dirección es la línea que une ambas masas, apuntando hacia el segmento del anillo.

En la Figura se aprecia que al sumar las fuerzas generadas por elementos de arco diametralmente opuestos, sus componentes perpendiculares al eje se cancelan, y sólo contribuyen las proyecciones de la fuerzas paralelas a él.

El coseno del ángulo φ , que es la proyección del vector $\hat{r}$ sobre el eje vertical, se expresa como:

$$\cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Proyectando la fuerza de atracción de un segmento de arco sobre la masa m , en el eje vertical, se obtiene:

$$\Delta F_{\text{vertical}} = G \frac{\lambda [ds] m}{R^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Note que todas las cantidades que aparecen en la expresión de la fuerza vertical –aquella paralela al eje del anillo–, son constantes, de forma que sólo debemos sumar los segmentos del anillo para encontrar la fuerza total. Como: $[ds] = R \Delta\varphi$, entonces:

$$F = \sum_{n=1}^N F_n = \sum_{n=1}^N G \frac{\lambda [R \Delta\varphi] h m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = G \frac{\lambda R h m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \sum_{n=1}^N \Delta\varphi_n,$$

al recorrer todo el anillo, $\sum \Delta\varphi_n = 2\pi$ radianes, de esta forma, el resultado es:

$$F_{\text{vertical}} = G \frac{\lambda R h m}{(R^2 + h^2)^{3/2}} 2\pi = G \frac{M m h}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (\text{VII.3})$$

En la última igualdad reemplazamos $\lambda 2\pi R$ por M .

Como la gravitación es atractiva, la fuerza sobre m apunta hacia el plano del anillo. Por el principio de acción y reacción, la misma fuerza se ejerce sobre el centro de masa del anillo, pero en sentido opuesto.

Si m se ubica en el centro del anillo, la fuerza neta es nula, por simetría. Este caso corresponde a imponer $h = 0$ en la ecuación [VII.3].

Ejemplo

Se tiene un cascarón esférico, de espesor despreciable, masa M y radio R . Calcule la fuerza que actúa sobre una masa puntual m , colocada a una altura h , sobre la esfera.

A partir de la expresión anterior, demuestre que en el límite $h \ll R$, esta fuerza es constante.

Usando el segundo teorema de Newton, sabemos que el valor de la fuerza en m es:

$$F_m = \frac{G M m}{(R + h)^2},$$

y apunta hacia el centro de la esfera. Sea σ_0 la densidad superficial de masa del cascarón, $\sigma \equiv [\text{masa}/\text{unidad de superficie}]$:

$$\sigma_0 = \frac{M}{4\pi R^2},$$

reemplazando en la fórmula anterior tenemos:

$$F_m = 4\pi \frac{G \sigma_0 m}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}.$$

Como $h/R \ll 1$, y recordando que: $(1 + X)^{-2} = \{1 - 2X \pm \dots\}$, si $X \ll 1$, entonces usando esta aproximación, la fuerza sobre la masa m , es:

$$F_m = 4\pi G \sigma_0 m \left[1 - 2\frac{h}{R} \pm \dots\right], \quad (\text{VII.4})$$

como $h/R \ll 1$, no la consideramos en la expresión y, de este modo, la fuerza de gravedad en la vecindad exterior del cascarón es constante. $\square$

El mismo argumento se puede usar para estimar la aceleración de gravedad sobre la Tierra. De acuerdo al segundo teorema de Newton, sabemos que no es posible distinguir una esfera homogénea y masiva, de un cascarón esférico con igual masa. Ambos ejercen la misma fuerza sobre una partícula *ubicada fuera de la esfera*.

Si h es la altura de un objeto en la cercanía de la superficie de la Tierra, por ejemplo $h = 100$ m, es fácil darse cuenta que el término (h/R) es despreciable, considerando que el radio promedio de la Tierra es de $R_{\oplus} \approx 6,4 \times 10^6$ m.

Si hacemos esta identificación, obtenemos:

$$F_m \equiv m g = 4\pi G m \sigma = \frac{G m M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2},$$

de aquí, la aceleración de gravedad g , es:

$$g \equiv \frac{G M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}. \quad (\text{VII.5})$$

Esta es la aproximación que empleamos al usar la aceleración de gravedad g , como una constante.

Es interesante comparar la fuerza de gravedad en la vecindad del cascarón esférico —es decir, con $h/R \ll 1$ —, con la de un plano infinito, con la misma densidad superficial de masa σ .

Como la Tierra es *localmente plana*, podemos suponer que la fuerza gravitacional generada en su vecindad, es la correspondiente a un plano infinito. Esto resulta ser falso.

La atracción gravitacional de un plano infinito, es simétrica con respecto al plano: la misma en ambas caras. Esta simetría *no se cumple* en el cascarón esférico: en su interior no existe fuerza alguna de origen gravitacional.

Escribamos la expresión de la fuerza generada por un plano infinito sobre una masa puntual m :

$$g_{\text{plano infinito}} = 2\pi G \sigma_0, \quad (\text{VII.6})$$

este es la mitad del valor encontrado para un cascarón.

Ejemplo

Se tiene un plano infinito, homogéneo – es decir, que tiene las mismas propiedades en todos sus puntos– y con densidad de masa σ_0 [kg/m²]. Compruebe que la única cantidad, *con las dimensiones correctas*, que se puede formar con estos datos y que representa la fuerza de atracción gravitacional actuando sobre una masa m , es: $G \sigma_0 m$.

Es directo verificar las dimensiones de $G \sigma_0 m$. Esta expresión sólo se puede multiplicar por una cantidad adimensional. Este argumento es el único que ofrecemos para justificar la ecuación [VII.6].

Supongamos que una partícula se ubica a una altura h del plano infinito; en este caso, no hay forma de incluir esta altura en la fórmula de la fuerza de atracción gravitacional, sin alterar las dimensiones y por tanto arruinar la respuesta.

La diferencia entre el plano y la esfera, en este argumento dimensional, salta a la vista: en el cascarón debemos usar G , σ_0 y m , para tener las dimensiones correctas de fuerza gravitacional, pero además, es posible incluir la distancia h , a la cual se ubica la masa m , porque *existe otro parámetro extra*: R , que lo caracteriza. Con este radio, podemos formar cantidades adimensionales, específicamente, potencias de h/R , que es posible agregar a $G \sigma m$, sin cambiar las dimensiones. Esto es lo que aparece en la fórmula [VII.4].

Otro argumento geométrico, para distinguir entre un plano infinito y el cascarón, se incluye en la Figura [VII.8]. $\square$

Para calcular la aceleración debida a un plano infinito necesitamos sumar (o integrar) los campos generados por una serie de anillos de radio $R = 0$, hasta $R = \infty$.

Un disco con $\sigma = \text{constante}$, se utiliza para modelar nuestra galaxia y calcular órbitas de estrellas que no se ubican en el plano galáctico.

El diámetro de la galaxia es de 150.000 años-luz y su espesor en la ubicación del Sol es de aproximadamente 1.500 años-luz. (1 año-luz $\simeq 9 \times 10^{12}$ km).

Ejemplo

Calcule, *aproximadamente*, la fuerza que experimenta una masa m_1 , al interior de un cascarón de radio R , y densidad superficial σ_0 , al cual le falta un pequeño disco de masa m en su superficie.

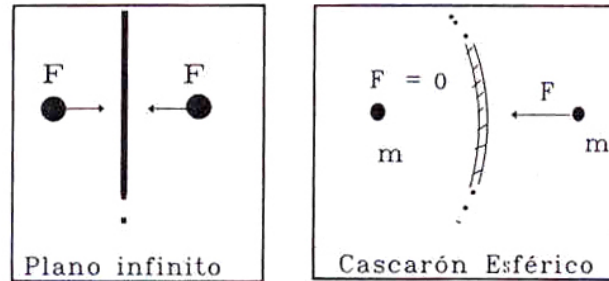


Figura VII.8: Al interior de la esfera, los elementos de masa del cascarón, atraen a la partícula de masa m , en la misma dirección pero en sentidos opuestos. Esto no ocurre en el plano infinito, donde la atracción gravitacional es la misma en ambas caras.

Estime, dentro de este esquema, la fuerza gravitacional que ejerce este cuerpo, sobre una masa ubicada en su exterior.

Al faltar un disco en la superficie del cascarón, se pierde la homogeneidad y los teoremas de Newton no son válidos. Una solución exacta de este problema, requiere matemáticas avanzadas. Nosotros sólo podemos emplear aproximaciones físicas, que describan el comportamiento de este sistema.

Para estimar la fuerza que afecta a la masa m_1 , usaremos el principio de superposición. Al cascarón original, sin el disco, lo reemplazamos por uno completo –y por tanto homogéneo– más una masa puntual negativa –y por tanto imaginaria– ($-m$), ubicada en el centro del lugar ocupado originalmente por el agujero del cascarón.

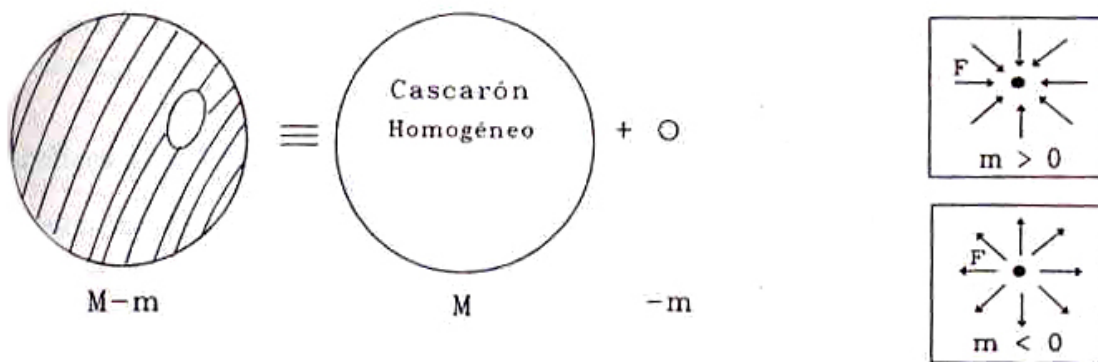


Figura VII.9: Superposición de una partícula de masa ($-m$) y un cascarón homogéneo. Esta configuración aproxima el caso de un cascarón al cual se le extrajo un pequeño disco de masa m .

Para estimar la fuerza sobre una partícula m_1 , respetando la aproximación señalada, sólo debemos utilizar la repulsión generada por la masa puntual imaginaria $(-m)$. (Recordemos que al interior de un cascarón homogéneo, no existen fuerzas gravitacionales).

En este caso, la fuerza repulsiva tiende a distanciar m_1 de la región donde se ubica el orificio del cascarón.

Si la partícula de prueba m_1 , se encuentra fuera del cascarón, la fuerza es la suma vectorial de la repulsión generada por $(-m)$, y la atracción del cascarón, considerado como un punto con masa, $M = 4\pi R^2 \sigma_o$, ubicado en el centro de la esfera.

En cuanto al error introducido por este método, depende del tamaño del disco: mientras más pequeño, mejor es la aproximación. El modelo planteado comienza a perder validez si nos acercamos a la masa $-m_1$.

Ejercicio

En el ejemplo anterior, pruebe que la fuerza repulsiva que aleja a la masa m_1 de la ubicación del agujero circular, se puede también obtener utilizando el mismo argumento empleado en la demostración del Teorema I de Newton. $\square$

VII.4. LEYES DE KEPLER

Kepler resumió en tres leyes, su trabajo de años acerca del movimiento de los planetas. Sus mediciones fueron realizadas en el observatorio de Tycho Brahe, el padre de la astronomía moderna. Cabe notar que no existían telescopios en esa época, sólo se utilizaba un instrumento con graduaciones angulares, con el objeto de registrar la posición relativa de los planetas en el transcurso del tiempo.

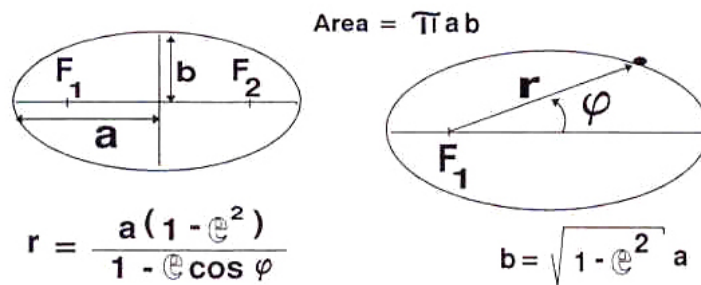


Figura VII.10: Definición de los distintos parámetros de una elipse.

Dos de sus tres leyes, aparecen en su libro *A New Astronomy*, publicado en 1609. Constituyeron las primeras leyes naturales en el sentido que hoy le adjudicamos a ese

término, es decir, sus conclusiones estaban basadas en una observación metódica del movimiento de los planetas y no, únicamente, en principios filosóficos sin una base observacional. Esta característica marca una diferencia con la tradición existente hasta ese tiempo, en cuanto al estudio de los objetos celestes.

Kepler también contribuyó al desarrollo de los instrumentos ópticos.

Leyes de Kepler:

1) El movimiento de un planeta es una elipse, en uno de cuyos focos está el Sol.

2) La línea que conecta el Sol con el planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales.

3) Cuando la órbita del planeta es una circunferencia, se cumple que:

$$R^3 \omega^2 = G M_{\odot},$$

donde $M_{\odot}$ es la masa del Sol; si la órbita es una elipse, su período es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G M_{\odot}}},$$

donde a es el semieje mayor de la elipse.

Note que en el caso de una órbita elíptica, el período T es constante, sin embargo su velocidad angular y tangencial es diferente en cada uno de sus puntos.

Satélites síncronos

Se denomina de esta forma a los satélites que permanecen a una altura fija, rotando con la misma velocidad angular de la Tierra, de esta forma, se mantienen constantemente en el cenit de un mismo punto geográfico.

Su objetivo es comunicar distintos puntos del planeta, transmitiendo señales desde un continente a otro. El satélite recibe una señal y la retransmite a las estaciones en Tierra. Este medio reemplaza a las estaciones retransmisoras, como las que utilizan en Chile los canales de televisión para llegar a las regiones.

Ejemplo

Encontrar la altura a la cual es necesario dejar en órbita un satélite para que gire con la velocidad angular de la Tierra.

Este problema es una aplicación directa de la tercera ley de Kepler, ubicando la Tierra en el centro de la circunferencia y el satélite en el lugar del planeta. Sin embargo, hemos escogido un camino más largo para llegar a ese resultado, con el objeto de repasar algunos detalles del movimiento bajo fuerzas centrales.

Comenzamos fijando un sistema de referencia inercial, de modo que la Tierra gire con respecto él, con una velocidad angular de [una vuelta/día]. Este debe ser el mismo valor con el cual, por definición, debe girar el satélite síncrono:

$$v_{sat} = \frac{2\pi R}{T},$$

donde $T = 24$ horas, es el periodo de la órbita y R , es su radio, cuyo valor debemos encontrar. La aceleración es:

$$a_{centrípeta} = \frac{v^2}{R}, \Rightarrow a_{centrípeta} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Recordemos que la aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia, al igual que la fuerza de atracción gravitacional:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \Rightarrow \frac{-GMm}{R^2} \hat{r} = -m \frac{v^2}{R} \hat{r}. \quad (\text{VII.7})$$

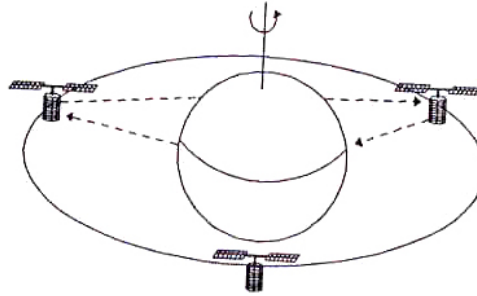


Figura VII.11: Con tres satélites síncronos es posible comunicar dos puntos geográficos ubicados arbitrariamente sobre la superficie de la Tierra.

Para hacer más fáciles los cálculos, recordemos la ecuación [VII.5]:

$$g \equiv \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 9,8 \text{ m/seg}^2. \quad (\text{VII.8})$$

Reemplazando esta última expresión en la fórmula [VII.7]:

$$\frac{G M_{\oplus}}{R^2} \left(\frac{R_{\oplus}^2}{R^2} \right) = \omega^2 \cdot R,$$

donde ω , es la velocidad angular del satélite síncrono. Incorporando la expresión para g , de la ecuación [VII.8], tenemos:

$$g \left(\frac{R_{\oplus}}{R} \right)^2 = \omega^2 R,$$

de esta forma, recuperamos la *tercera ley de Kepler*, en la forma anticipada al comienzo:

$$R^3 \cdot \omega^2 = g R_{\oplus}^2 = G M_{\oplus} \implies R^3 \omega^2 = G M_{\oplus}. \quad (\text{VII.9})$$

En esta ecuación supusimos, correctamente, que la masa del satélite es muy pequeña comparada con la masa de la Tierra. Si esto no fuera así, aparecería un $(M_{\oplus} + m_{sat})$, en lugar de $M_{\oplus}$, en la ecuación [VII.9].

Hasta aquí sólo hemos recuperado la tercera ley de Kepler. El método elegido nos permitió demostrar que las leyes de Kepler, están en perfecta armonía con las de Newton, incluyendo su ley de gravitación universal.

Calculemos ahora el valor del radio de la órbita del satélite.

$$R^3 = \frac{G M_{\oplus}}{\omega^2} = g \left(\frac{R_{\oplus}}{\omega} \right)^2,$$

introduciendo valores numéricos, obtenemos:

$$R \simeq 4,2 \times 10^7 m = 4,2 \times 10^4 km. \quad (\text{VII.10})$$

Restándole a esta cantidad, el radio de la Tierra, obtendremos la altura h a la que se encuentra el satélite:

$$h \simeq 42,000 - 6,000 = 36,000 \text{ km}. \quad (\text{VII.11})$$

La ionósfera es una de las capas que componen la atmósfera. Su altura es $h_{\text{ionósfera}} \simeq 300 km$. En ella se reflejan las ondas de radio, permitiendo así comunicarse a los radioaficionados en distintos puntos de la Tierra. Desgraciadamente, para frecuencias más altas, que corresponden a las ondas de TV, entre otras, esta capa es transparente –las deja pasar, sin reflejarlas– por esta razón, estos medios deben usar los satélites geoestacionarios o síncronos como los hemos llamado, para transmitir información entre dos puntos muy alejados.

Ejercicio

Encuentre la expresión para la tercera ley de Kepler, suponiendo que la Luna y la Tierra son cuerpos puntuales y que describen una circunferencia en torno al centro de masa del sistema Tierra–Luna.

Indicación: Suponga que la Tierra se encuentra a una distancia R_T del centro de masa (CM). Análogamente, la distancia entre la Luna y el CM, es R_L , de forma que $R_L + R_T = \ell$.

Las ecuaciones de movimiento para ambos cuerpos son:

$$G M_L / \ell^2 = \omega^2 R_T; \quad G M_\oplus / \ell^2 = \omega^2 R_L,$$

de aquí se obtiene: $G(M_\oplus + M_L) = \omega^2 \ell^3$. donde $\ell \equiv$ Distancia Tierra–Luna.

VII.5. MOMENTO ANGULAR

Dos partículas que interactúan gravitacionalmente, no pueden generar torque, puesto que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \left[-\frac{G M_\odot m}{r^2} \hat{r} \right], \implies \tau = 0.$$

En esta expresión, ubicamos el origen de coordenadas en una de las partículas. En la segunda igualdad reemplazamos $\vec{F}$ por la fuerza gravitatoria. Como esta fuerza apunta en la misma dirección del vector posición, $\vec{r}$, se concluye que el torque es nulo: $\vec{\tau} = 0$.

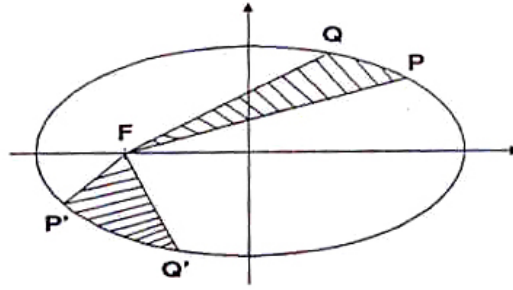


Figura VII.12: Órbita de un cuerpo alrededor de otro considerablemente más masivo. Se indica el área barrida por el vector de posición del cuerpo más liviano en dos instantes cercanos de su trayectoria.

Si $\vec{\tau} = 0$, sabemos que el momento angular se conserva. Esta característica de las fuerzas gravitacionales fue descubierta, empíricamente, por Kepler cuando, a partir de

sus observaciones, concluyó que el vector posición de los planetas *barría áreas iguales en tiempos iguales* a lo largo de su trayectoria alrededor del Sol. Esto sucedió mucho antes que Newton anunciara su ley de gravitación universal.

Veamos cómo esta propiedad se deduce de la conservación del momento angular.

Fuerzas Centrales $\implies |\vec{L}| = \text{Constante} \equiv \text{Segunda Ley de Kepler.}$

(VII.12)

El área del triángulo FPQ de la Figura es:

$$\Delta FPQ = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{PQ}|,$$

aproximando la cuerda PQ, por su arco:

$$\Delta FPQ = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v} \cdot \Delta t|,$$

como Δt es un número:

$$\frac{\Delta t}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}|.$$

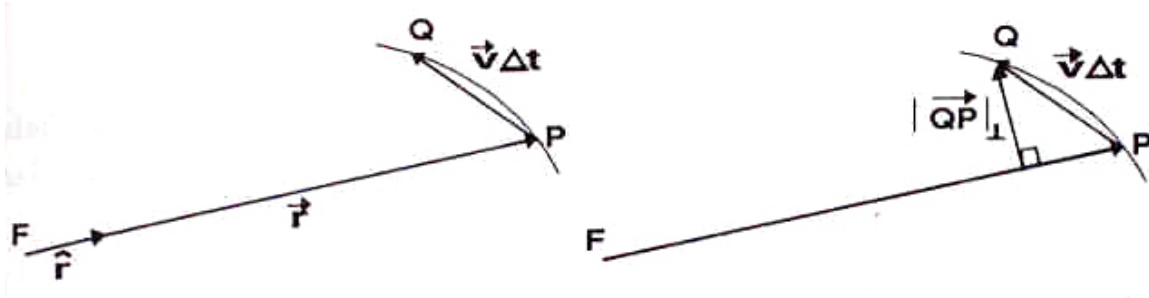


Figura VII.13: Triángulo usado en la demostración de la proporcionalidad entre el momento angular y el área barrida por el vector posición del objeto en órbita.

Recordemos que: $|\vec{r} \wedge \vec{PQ}| = |\vec{r}| |\vec{PQ}| \sin \theta = |\vec{r}| |\vec{PQ}_\perp|.$

Esta expresión es válida en cualquier instante, puesto que hemos usado *sólo geometría* para obtenerla. El mismo razonamiento se repite para el triángulo $\Delta FP'Q'$, de la Figura anterior:

$$\Delta FP'Q' = \frac{1}{2} |\vec{r}' \wedge \overrightarrow{P'Q'}| = \frac{1}{2} r' |\overrightarrow{P'Q'}|_{\perp},$$

Por otra parte, la definición de momento angular $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$, se puede escribir como:

$$\vec{L} \cdot \Delta t = m \vec{r} \wedge \vec{v} \Delta t = m [\vec{r} \wedge \vec{v} \Delta t] = \text{Constante} \cdot \Delta t.$$

En la última igualdad usamos el hecho que el momento angular se conserva.

De esta forma, al tomar dos puntos cualquiera $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, en la trayectoria de un planeta alrededor del Sol y elegir un intervalo de tiempo Δt , igual para ambos, obtenemos:

$$m |\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1| = m |\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2|,$$

por conservación del momento angular. Multiplicando ambos lados por Δt , obtenemos:

$$|\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1| \Delta t = |\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2| \Delta t.$$

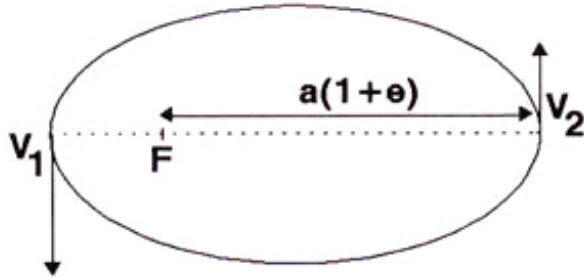
Ya demostramos que esta última expresión, es proporcional al área barrida por el planeta en distintos puntos de su órbita, en intervalos iguales de tiempo, luego:

$$2 \times \text{Area}_1 = 2 \times \text{Area}_2.$$

El área barrida por el planeta en un intervalo de tiempo Δt , es la misma en cualquier par de puntos de su órbita.

Ejercicio

Encuentre la razón entre las velocidades de un cometa en el afelio y perihelio de su órbita. La elipse tiene como uno de sus focos al sol y el valor de su excentricidad es e .



Ejemplo

Se perfora un túnel a través de la Tierra –supuesta como una esfera homogénea–, en la forma indicada en la Figura. Demuestre que si dejamos caer una partícula en este túnel, partiendo del reposo, el movimiento resultante corresponde al de un oscilador armónico. Verifique que su periodo es el mismo que aquel de una partícula que cruza la Tierra a través de un diámetro o de una nave que circunda la Tierra a muy baja altura.

Explique cuantitativamente, porqué no se toma en consideración la rotación de la Tierra.

De acuerdo al segundo teorema de Newton, sólo la esfera masiva ubicada al *interior* de la posición de la partícula –en cada instante–, actúa gravitacionalmente sobre ella.

La fuerza de atracción gravitacional, *proyectada* a lo largo de la dirección del túnel, en cualquier instante y posición es:

$$-\hat{x} \cdot \vec{F} = \frac{G M(x)m}{(h^2 + x^2)} \cos \phi, \quad \text{con} \quad \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

$M(x)$, es la masa de la Tierra contenida dentro de la esfera, con centro en O' , que pasa por el punto señalado por la coordenada x . El ángulo ϕ varía con la coordenada x .

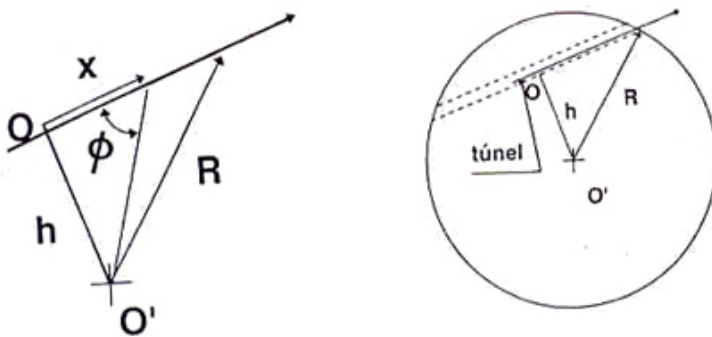


Figura VII.14: Túnel a través de la Tierra. Se incluye el diagrama utilizado para calcular el valor de x y $\cos \phi$. La fuerza gravitacional apunta siempre hacia el centro O' , de la esfera.

Designamos a_x , como la aceleración de la partícula en la dirección x indicada en la Figura. La segunda ley de Newton proyectada en la dirección $\hat{x}$, es:

$$m a_x = -\frac{G M(x)m}{h^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Suponemos que no existe roce en las paredes del túnel. La masa $M(x)$, en la esfera centrada en O y al interior de x es:

$$M(x) = \frac{4\pi}{3} \rho_o G (x^2 + h^2)^{3/2},$$

donde hemos supuesto que la Tierra es una esfera de densidad uniforme ρ_o . Simplificando obtenemos:

$$a_x = -\frac{4\pi G}{3} \rho_o x,$$

que es precisamente la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple, a partir de la cual, obtenemos la velocidad angular que adquiere la masa m en su recorrido dentro del túnel:

$$\omega^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho_o.$$

Esta es la misma frecuencia que tiene una partícula que atraviesa *diametralmente* la Tierra. Si planteamos la ecuación de movimiento radial para este nuevo caso, obtenemos:

$$m a_r = -\frac{G M(r) m}{r^2}, \quad \text{con } M(r) = \frac{4\pi G}{3} \rho_o r^3,$$

de esta forma, la aceleración, es:

$$a_r = -\left(G \frac{4\pi}{3} \rho_o\right) r,$$

que corresponde a un movimiento armónico simple, con la misma frecuencia angular del caso anterior.

Obviamente la velocidad máxima es mayor en esta situación, porque la amplitud es igual al radio de la Tierra y $v_{\max} = \omega R$.

Este resultado también coincide con el periodo de una nave que circunda la Tierra a una altura despreciable. En este caso:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G M}{R^2}, \quad \text{como } v = \omega R,$$

$$\omega^2 = \frac{G M}{R^3} = \frac{4\pi}{3} G \rho_o.$$

Que el periodo T sea proporcional al producto $G \rho$ para estos tres casos, no es sorprendente. Es la única cantidad que tiene dimensiones de tiempo (¡compruébelo!), y en las cuales intervienen la estrella, a través de su masa M y el radio R , combinados para

escribirlo como ρ ; y el otro agente es G , que señala la presencia de la gravitación. Lo que desconcierta es que el factor adimensional en frente de esta cantidad: $4\pi/3$, sea el mismo en todos los casos y no incluya términos como h/R , por ejemplo.

Sin embargo, después de volver a meditarlo, la sorpresa se esfuma y sospechamos que esta propiedad se debe a las simplificaciones impuestas, entre las cuales están: estrella con densidad constante, no hay atmósfera y por lo tanto no hay roce del aire, y tampoco se incluyó la velocidad angular de la Tierra. Esta última, hace una diferencia obvia: no es lo mismo cavar este túnel imaginario a través del eje Polar, que en dirección perpendicular a él. A continuación, veremos que la magnitud de esta corrección es despreciable.

¿De qué magnitud es el error cometido al no incluir la rotación de la Tierra en la ecuación de movimiento de la partícula?

Para responder esta pregunta, incluyamos la rotación en sus ecuaciones originales, para ver como se afecta el movimiento.

Resolvamos el caso de un túnel que cruza diametralmente la Tierra, a través del Ecuador.

La ecuación radial es:

$$m a'_r = -\frac{G M(r) m}{r^2}, \quad \text{con} \quad a'_r = a_r - \omega_{\oplus}^2 r,$$

donde hemos incluido la rotación de la Tierra a través de la aceleración centrípeta $\omega_{\oplus}^2 r$, que experimenta la partícula al ser arrastrada por las paredes del túnel. Despejando a_r :

$$a_r = \omega_{\oplus}^2 r - \frac{G M(r)}{r^2} = \left(\omega_{\oplus}^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho_o \right) r.$$

Estimemos ahora el valor relativo de cada uno de los términos que aparecen a la derecha de la ecuación anterior:

$$\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \simeq 8 \times 10^{-5} \Rightarrow \omega_{\oplus}^2 \approx 6,4 \times 10^{-9}.$$

Por otra parte,

$$\frac{4\pi}{3} G \rho_o \simeq 1,5 \times 10^{-6}.$$

Este último término es aproximadamente mil veces mayor que la modificación introducida por la rotación de la Tierra, que resultó ser proporcional a $\omega_{\oplus}^2$.

VII.6. ENERGIA EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

Para trasladar una partícula de masa m entre dos posiciones arbitrarias, en presencia de un cuerpo masivo M , debemos realizar un trabajo. Una característica del campo gravitacional es que este trabajo *no depende del camino elegido*, sino solamente del punto final e inicial de la trayectoria.

En estos casos es posible definir una función que se denomina la *energía potencial*, $V(P)$, que representa el trabajo necesario para trasladar una partícula de prueba desde el infinito hasta un punto P cualquiera. Esta función es unívoca: a cada punto del espacio le asocia un sólo valor y además no experimenta cambios bruscos de valor a medida que nos desplazamos en el espacio.

Esta propiedad de las fuerzas gravitacionales, es compartida por otros modelos estudiados anteriormente: el oscilador armónico, el campo gravitacional g , en la vecindad de la superficie terrestre,...etc.

VII.6.1. Trabajo

Para calcular el trabajo, debemos multiplicar la fuerza aplicada por el desplazamiento realizado. Trasladar un cuerpo lentamente entre dos puntos arbitrarios, significa moverlo en forma tal, que casi se encuentra en reposo en cada uno de los puntos de la trayectoria. Para que así ocurra, es necesario aplicar una fuerza que –en este caso– cancele la atracción gravitacional.

Trabajo en un desplazamiento radial

Hagamos una simplificación adicional: calculemos el trabajo necesario para trasladar una masa puntual, *radialmente* entre los puntos A y B de la Figura [VII.15]. Con el objeto de mantener el equilibrio en cada punto de la trayectoria, necesitamos aplicar una fuerza externa igual y en sentido opuesto a la atracción gravitacional. La fuerza aplicada apunta radialmente, alejándose de la masa M .

$$\vec{F} = \frac{G M m}{r^2} \hat{r}.$$

La expresión para el trabajo realizado por esta fuerza externa es:

$$W_{A \rightarrow B} = \sum_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = \sum_{r_A}^{r_B} \frac{GMm}{r_i^2} \Delta r_i.$$

El trabajo se reduce al producto de las dos cantidades, puesto que ambos apuntan en la misma dirección y sentido: $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = F \Delta r_i$. Para evaluar la sumatoria tomamos

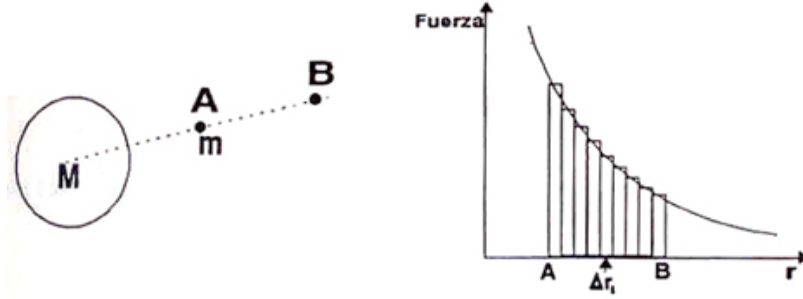


Figura VII.15: El trabajo realizado se reduce a calcular el área bajo la curva entre el punto final e inicial del traslado. Para ello se aproximan los elementos de área a trapecios, como se ha hecho anteriormente.

intervalos Δr_i , iguales para todo i , y los designamos como Δ . El método geométrico usado anteriormente para evaluar esta sumatoria, consiste en calcular el área encerrada bajo la curva $F(r)$, entre A y B, donde esta función representa el valor de la fuerza en cada punto de la trayectoria radial.

Aproximamos el área bajo un elemento de curva, mediante un trapecio infinitesimal, como se indica en la Figura [VII.15].

En los cálculos que siguen, temporalmente, nos olvidamos del factor GMm que aparece en la fuerza gravitatoria, con el objeto de acortar las expresiones usadas. Al final, multiplicamos el resultado por esta expresión, para tener las dimensiones correctas.

Como el área del trapecio es el producto de la semisuma de las bases por la altura, y la fuerza es proporcional a $1/r^2$, tenemos que:

$$\text{Area del Trapecio } i\text{-ésimo} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) \Delta = \frac{r_i^2 + r_{i+1}^2}{2 r_i^2 r_{i+1}^2} \Delta, \quad (\text{VII.13})$$

pero, como $r_{i+1} \equiv \Delta + r_i$, entonces:

$$\text{Area del Trapecio } i\text{-ésimo} = \frac{2 r_i^2 + 2 r_i \Delta + \Delta^2}{2 r_i^2 r_{i+1}^2} \cdot \Delta.$$

Como la estrategia usual es hacer Δ lo más pequeño posible ($\Delta \rightarrow 0$), despreciamos la potencia más alta en Δ , que aparece en el numerador. Se puede mostrar que este término complica los cálculos intermedios y desaparece, después de tomar el límite señalado. Con esta simplificación, tenemos que:

$$\text{Area del Trapecio } i\text{-ésimo} \simeq \frac{r_i [r_i + \Delta]}{r_i^2 r_{i+1}^2} \cdot \Delta = \frac{r_i r_{i+1}}{r_i^2 r_{i+1}^2} \cdot \Delta = \frac{1}{r_i r_{i+1}} \cdot \Delta,$$

y finalmente reemplazando, $\Delta = [r_{i+1} - r_i]$, obtenemos:

$$\text{Area del Trapecio } i\text{-ésimo} = \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right] \quad (\text{VII.14})$$

El trabajo corresponde a la suma de esta expresión entre A y B, multiplicada por la constante, $G M m$:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \sum_{i=1}^N G M m \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right] \\ &= G M m \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{r_{N-1}} - \frac{1}{r_N} \right) \right]. \end{aligned}$$

Al sumar estos términos, se aprecia que se anulan de a pares, sobreviviendo sólo el primero y el último. El resultado es:

$$W_{A \rightarrow B} = G M m \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad (\text{VII.15})$$

Este es el trabajo necesario para desplazar muy lentamente una masa m desde r_A hasta r_B contra la atracción gravitacional de la masa M .

Se identificó $i = 1$ con A, y B con $i = N$.

Trabajo en un desplazamiento arbitrario

Ahora estamos en condiciones de generalizar esta expresión considerando un desplazamiento arbitrario.

Existen tres puntos relevantes en este cálculo: la masa M , que por el teorema II de Newton, podemos considerar como una masa puntual y los puntos extremos del trayecto: A y B. Con estos tres puntos podemos generar un plano, y de esta manera vamos a considerar sólo trayectorias planas, de la forma que se indica en la Figura [VII.16].

El *producto escalar* entre el vector desplazamiento y la fuerza, que aparece en la definición de trabajo, está proyectando el desplazamiento en la dirección de la fuerza. De esta forma, sólo su componente en esa dirección contribuye al trabajo. Conviene, entonces, descomponer la trayectoria en una suma de segmentos radiales y arcos de circunferencia, indicados en la Figura [VII.16]. Únicamente los segmentos radiales dan una contribución distinta de cero. Los arcos son ortogonales a la fuerza —en cada uno de sus puntos— y, en consecuencia, el producto escalar con dicho desplazamiento, desaparece.

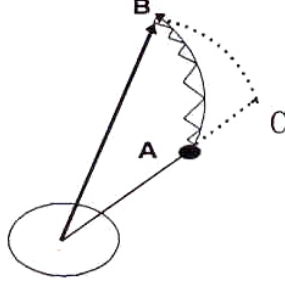


Figura VII.16: En esta trayectoria arbitraria nos desplazamos desde el punto A hasta B realizando una sucesión de movimientos radiales y a lo largo de un elemento de circunferencia. El resultado final es que sólo el desplazamiento radial genera trabajo.

Resumiendo: como el trabajo se realiza contra la fuerza gravitacional, sólo contribuyen los desplazamientos *paralelos a ella*. Aquellos ortogonales, es decir, a lo largo del arco de circunferencia, no aportan a la suma total.

Evaluemos el trabajo para trasladar la masa m , desde A hasta B, de acuerdo a la Figura [VII.16]:

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + W_{C \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} + 0.$$

Geométricamente podemos convencernos que la trayectoria punteada de A a B, es equivalente a la línea llena: cada arco de circunferencia infinitesimal se puede trasladar al que une C con B, y en forma análoga, la distancia radial de los triángulos infinitesimales de A a B, se reproduce en la línea punteada de A hasta C. Como la fuerza es radial y depende sólo de r , el trabajo evaluado en una u otra trayectoria arroja el mismo resultado.

Usando la trayectoria punteada –por ser más conveniente para calcular–, obtenemos el trabajo efectuado entre A y B:

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow C} &= G M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_C} \right), \\ \Rightarrow W_{A \rightarrow B} &= G M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

En este último paso usamos que r_B y r_C , están ubicados en un arco de circunferencia.

Concluimos que la primera expresión encontrada para el trabajo, usando desplazamientos radiales, es general: incluye a cualquier trayectoria independiente de su forma.

En un desplazamiento tridimensional el argumento es similar: debemos considerar esferas en lugar de circunferencias y la contribución al trabajo proviene solamente de los saltos desde una esfera a la siguiente.

El trabajo realizado por un agente externo para transportar, lentamente, un cuerpo a través del campo gravitacional generado por una masa M , sólo depende de la posición inicial y final de este recorrido. Es independiente de la trayectoria elegida para unir ambos puntos.

Ejemplo

Calcule el trabajo necesario para armar un cuadrado de lado a , con masas puntuales m , en cada uno de sus vértices.

Suponemos que las masas puntuales que conformarán el cuadrado, se ubican inicialmente en el infinito y a distancias muy alejadas entre ellas, de forma que las fuerzas gravitacionales entre ellas sea despreciable. De este modo, sólo debemos considerar las masas que ya están en el cuadrado para calcular el trabajo necesario para incorporar la siguiente partícula.

Esta es una propiedad que tienen las fuerzas que decaen de la misma forma o más rápidamente que el cuadrado del inverso de la distancia. Debe cumplirse, además, que el cuerpo por armar tenga su masa distribuida en un volumen finito. Concretamente, el procedimiento que utilizaremos aquí, no es válido si se trata de un alambre, cilindro o un plano infinito.

De acuerdo a la discusión anterior, el trabajo para traer la primera masa al vértice del cuadrado es nulo, puesto que previamente no hay ninguna masa.

Para incorporar la segunda es preciso realizar un trabajo para acercarla desde el infinito hasta una distancia a de la primera:

$$W_2 = G m m \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{a} \right] = -G m^2 \left[\frac{1}{a} \right],$$

es negativo, puesto que la fuerza que evita que la segunda partícula se acelere hacia la primera, apunta en dirección contraria al desplazamiento realizado en cada paso.

Para traer la tercera masa, debemos realizar el mismo trabajo, pero considerando el efecto de las dos primeras masas ya instaladas:

$$W_3 = -G m^2 \left[\frac{1}{a} \right] - G m^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2} a} \right],$$

el factor $\sqrt{2}$, que aparece en el segundo término, proviene de la distancia que separa a las partículas en vértices opuestos.

Finalmente el trabajo correspondiente al traslado de la última masa del conjunto, es:

$$W_4 = -G m^2 \left[\frac{1}{a} \right] - G m^2 \left[\frac{1}{a} \right] - G m^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2} a} \right],$$

donde cada término proviene del trabajo asociado a una de las masas previamente instaladas.

El trabajo total es la suma de cada uno de estos términos:

$$W_{\text{Total}} = -4Gm^2 \left[\frac{1}{a} \right] - 2Gm^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}a} \right] = -(4 - \sqrt{2})Gm^2 \left[\frac{1}{a} \right].$$

El signo $(-)$ que aparece en frente de toda la expresión, indica que el sistema está *ligado*, es decir, es necesario realizar un trabajo extra (positivo) para desarmarlo.

Podemos hacer un gráfico de W_{Total} versus a , el tamaño de la red (ver Figura). Su interpretación es la siguiente: la flecha vertical que une la curva con la abscisa —que señala el nivel de energía cero—, es el trabajo necesario para desarmar la estructura. Vemos que mientras más cercana se ubican las partículas, mayor es la energía (o el trabajo) que debemos realizar para separarlo.

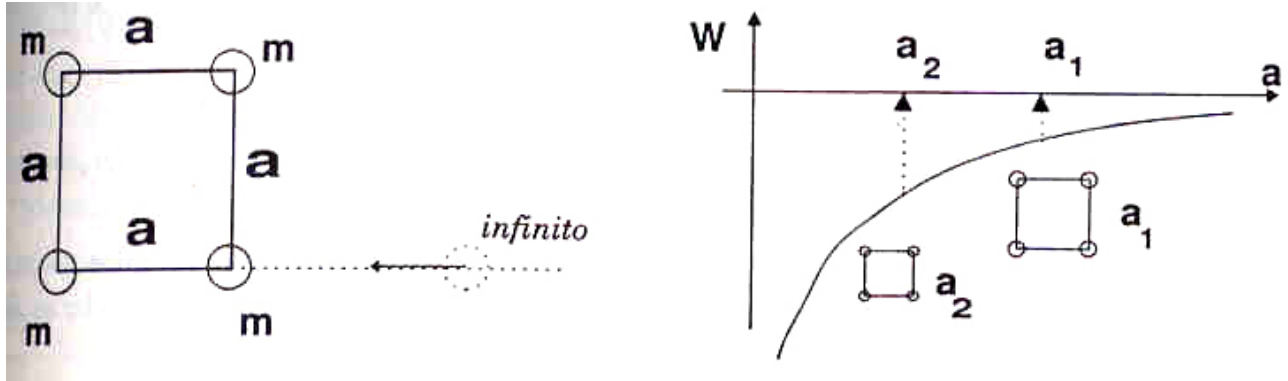


Figura VII.17: Se dibuja la estructura y la forma como se traen las masas. A la derecha aparece el trabajo necesario para armar el cuadrado versus el tamaño de la red, suponiendo que se arman cuadrados similares.

Finalmente, conviene destacar la facilidad de cálculo que proporciona el uso de la definición de trabajo por ser una cantidad escalar y depender, únicamente, de la posición y no del trayecto seguido por las partículas. $\square$

Ejemplo

Calcule el *trabajo mínimo* que se precisa para trasladar una roca de masa m_1 , desde la superficie de la Tierra hasta la Luna. Suponga que la distancia que las separa (centro a centro) es D , y que los radios respectivos son R_T y R_L .

Hasta ahora hemos calculado el trabajo para desplazar un objeto, lentamente, no es posible entonces incorporar aquí el movimiento relativo de la Luna con respecto a la Tierra. En esta aproximación, las supondremos estáticas.

El trabajo para trasladar la roca una distancia D , se calcula usando el principio de superposición: primero consideramos el efecto de la Tierra sola y posteriormente el correspondiente debido a la Luna.

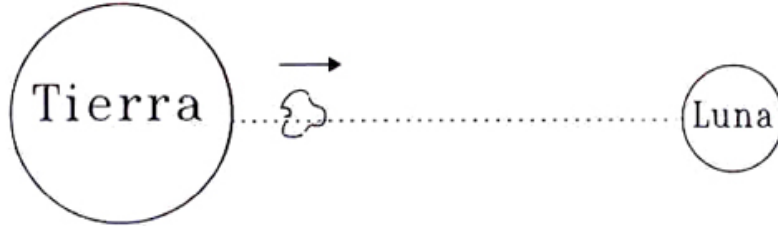


Figura VII.18: La Tierra y la Luna se suponen en reposo. La roca se traslada en línea recta entre ambos cuerpos.

El trabajo que debemos efectuar para alejarla de la atracción de la Tierra, de acuerdo a la ecuación [VII.16], es:

$$W_{Tierra} = G M_T m_1 \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{D - R_L} \right).$$

Diferente es el caso de la Luna atrayendo a la roca: al desplazarla debemos *sostener* la roca para que no se acelere, es necesario aplicar la fuerza en sentido opuesto al desplazamiento. El trabajo es:

$$W_{Luna} = G M_L m_1 \left(\frac{1}{D - R_T} - \frac{1}{R_L} \right),$$

donde nos olvidamos –de acuerdo al principio de superposición– de la existencia de la Tierra y consideramos la Luna como el único objeto gravitante.

El resultado final es la suma de ambos procesos:

$$W_{Mínimo} = G M_T m_1 \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{D - R_L} \right) + G M_L m_1 \left(\frac{1}{D - R_T} - \frac{1}{R_L} \right).$$

El trabajo total será siempre mayor que este valor:

$$W_{Total} > G M_T m_1 \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{D - R_L} \right) + G M_L m_1 \left(\frac{1}{D - R_T} - \frac{1}{R_L} \right). \quad \square$$

VII.6.2. Energía

La situación más común es aquella en que el traslado ocurre con una cierta velocidad. El movimiento origina un término adicional en la energía, que se denomina energía cinética.

Sabemos que la energía total de un objeto es la primera integral de las ecuaciones de movimiento. En un campo gravitacional, estas ecuaciones son:

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\frac{G M m}{r^2} \hat{r}.$$

Para integrarlas entre dos puntos: A y B de la trayectoria, multiplicamos cada uno de los miembros de la ecuación por el desplazamiento $\Delta \vec{x}_i$, y con los distintos valores del subíndice i , vamos sumando el aporte de cada uno de los tramos en que se dividió la trayectoria.

$$\sum_{i=1}^N m \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{x}_i = -G M m \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Delta \vec{x}_i \cdot \hat{r}}{r_i^2} \right], \quad (\text{VII.17})$$

el valor de la sumatoria que aparece en el segundo miembro ya lo calculamos en la sección anterior (ver ecuación [VII.15]). Como su resultado es independiente del camino seguido, elegimos el trayecto más simple para evaluarla: comenzamos en $\vec{r}_A$, se continúa en la misma dirección hasta alcanzar un radio r_B y de allí, moviéndonos sobre una esfera centrada en el punto de atracción, se alcanza $\vec{r}_B$.

Identificando A y B, con $i = 1$ e $i = N$, respectivamente, el valor de la sumatoria es:

$$G M m \left[\sum_{i=1}^N \frac{\Delta \vec{x}_i \cdot \hat{r}}{r_i^2} \right] = G M m \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Reescribimos el primer miembro de la ecuación [VII.17], usando el hecho que Δt es un número, y puede aparecer dividiendo cualquiera de los dos términos de dicha ecuación:

$$\left[\frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} \right] \cdot \Delta \vec{x}_i = \Delta \vec{v}_i \cdot \left[\frac{\Delta \vec{x}_i}{\Delta t} \right],$$

Introduciendo la definición de velocidad, la sumatoria queda como:

$$\sum_{i=1}^N m \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t} \cdot \Delta \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{v}_i. \quad (\text{VII.18})$$

El motivo para realizar esta transformación fue adecuar la sumatoria a los métodos geométricos que hemos usado anteriormente. Recordemos que:

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x_i,$$

se evaluaba calculando el área encerrada bajo la curva $f(x)$. En la ecuación original, $m\Delta\vec{v}_i \cdot [\Delta\vec{x}_i/\Delta t]$, no había una dependencia explícita en la variable v_i , que nos permitiera aplicar directamente esta interpretación de la sumatoria. Con la permutación de Δt , esto es posible, como se aprecia en la ecuación [VII.18]. Más aún, el valor de esta sumatoria es conocido e independiente de la variable usada. Haciendo una analogía con el oscilador armónico, tenemos:

$$f(x) = kx \Rightarrow \sum_{i=1}^N kx_i \Delta x_i = \frac{1}{2} kx_N^2 - x_1^2], \quad (\text{energía potencial del resorte}),$$

$$f(v) = mv, \Rightarrow \sum_{i=1}^N mv_i \Delta v_i = \frac{1}{2} m[v_N^2 - v_1^2], \quad (\text{energía cinética}).$$

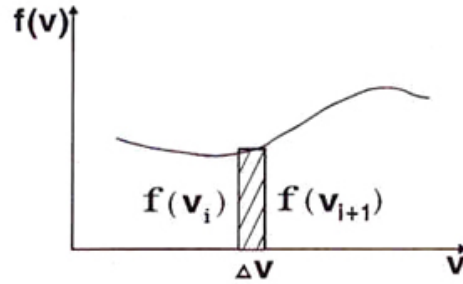


Figura VII.19: Una forma de calcular la sumatoria gráficamente, consiste en denominar uno de los términos como la función (la masa por la velocidad en el caso nuestro) y graficar sus valores en la ordenada, y poner la variable –la velocidad– en la abcisa. La suma es el área bajo la curva.

Esta suma, para el caso de un movimiento en un plano, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N v_i^x \Delta v_i^x + \sum_{i=1}^N v_i^y \Delta v_i^y, \quad (\text{VII.19})$$

donde v_i^x indica la componente x del vector velocidad $\vec{v}$. Análogamente v_i^y .

Como el valor de estas sumatorias ya fue calculado al estudiar el trabajo realizado por un oscilador armónico, podemos escribir el resultado de la suma que aparece en la ecuación [VII.19]:

$$\sum_{i=1}^N m\vec{v}_i \cdot \Delta\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m [\vec{v}_B^2 - \vec{v}_A^2] = -GMm \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right], \quad (\text{VII.20})$$

ordenando los términos, se obtiene:

$$\frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 - G M m \frac{1}{r_A} = \frac{1}{2} m \vec{v}_B^2 - G M m \frac{1}{r_B}. \quad (\text{VII.21})$$

Los puntos A y B son designados arbitrariamente. La expresión escrita con subíndice A (o B) en la última ecuación, permanece constante durante el movimiento y es lo que se denomina la *Energía*:

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{G M m}{r} = E_0. \quad (\text{VII.22})$$

E_0 , es la cantidad conservada que se obtiene al integrar las ecuaciones de Newton incluyendo la fuerza proveniente de la ley de gravitación universal. El término que contiene las velocidades se denomina *Energía Cinética*, y aquél que exhibe la constante G , *Energía Potencial*.

La energía potencial es –salvo un signo– la misma expresión obtenida en la sección anterior, al calcular el trabajo realizado por un agente externo, [VII.16]. El cambio de signo se introdujo en la ecuación [VII.16], cuando calculamos la fuerza que debía aplicar el individuo para *anular* la atracción gravitacional, de modo que la fuerza externa debía apuntar en sentido opuesto a la atracción. Este es el origen de la diferencia de signo.

$$\text{Definimos:} \quad V(r) \equiv -\frac{G M m}{r}, \quad T \equiv \frac{m \vec{V}^2}{2}, \quad (\text{VII.23})$$

entonces, la conservación de la energía se escribe:

$$E_o = T + V. \quad (\text{VII.24})$$

Esta ecuación es fundamental. Como se utiliza a menudo en el movimiento bajo fuerzas centrales, es conveniente escribirla de forma que contenga la otra cantidad conservada: el momento angular L_0 .

VII.6.3. Conservación del momento angular y el potencial efectivo

Para incorporar el momento angular en la conservación de la energía, descomponemos el vector velocidad a lo largo de dos direcciones: una radial, paralela al vector de posición de la partícula en un instante cualquiera, y otra perpendicular a él:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad v_{\parallel} \equiv v_r = \vec{v} \cdot \hat{r}, \quad (\text{VII.25})$$

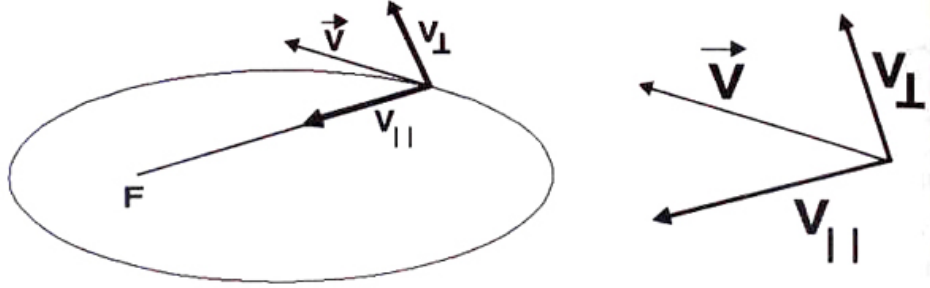


Figura VII.20: Se muestra la descomposición de la velocidad en una componente paralela y otra perpendicular a $\vec{r}$. $\vec{v}_\perp$ nos permite introducir el momento angular, otra de las cantidades conservadas, en el movimiento bajo fuerzas centrales.

donde $\hat{r}$ es el vector unitario que apunta desde el foco de la elipse hasta un punto de la trayectoria, como se muestra en la Figura.

El vector $\vec{v}_\perp$, se puede escribir como:

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_r. \quad (\text{VII.26})$$

Para introducir estas cantidades en la conservación de la energía, necesitamos calcular el valor del cuadrado de la velocidad, usando la ecuación: [VII.25],

$$\vec{v}^2 = v_r^2 + v_\perp^2 + 2\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\perp, \quad \text{pero, } \vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_r = 0, \quad \text{entonces: } \vec{v}^2 = v_r^2 + v_\perp^2.$$

Incluyendo la expresión del momento angular $L_0 \equiv m r v_\perp$, en lugar de $v_\perp$, en la conservación de la energía, obtenemos:

$$E_o = \frac{1}{2} m v_r^2 + \left[\frac{L_0^2}{2m r^2} - \frac{G M m}{r} \right] = \text{Constante}. \quad (\text{VII.27})$$

Definimos la *energía cinética radial* y el *potencial efectivo*, como:

$$T \equiv \frac{1}{2} m v_r^2, \quad V_{\text{efectivo}} \equiv \left[\frac{L_0^2}{2m r^2} - \frac{G M m}{r} \right] \quad (\text{VII.28})$$

Aquí aparece el momento angular L_0 explícitamente, y este término marca la diferencia con el potencial gravitacional $V(r)$, introducido anteriormente. El término que contiene L_0 , se denomina la *barrera centrífuga* porque impide que una partícula con un momento angular inicial no nulo, alcance más allá de un cierto radio.

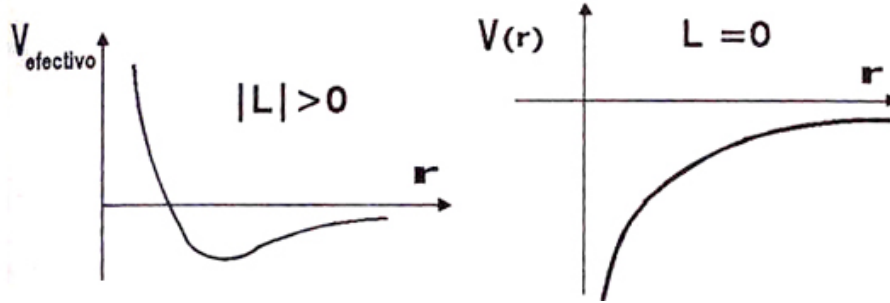


Figura VII.21: Gráficos del potencial efectivo para los casos $L_o = 0$ y $L_o \neq 0$. En ambos casos el potencial decae a cero en infinito.

Usando estas definiciones, la conservación de la energía de un planeta –o cualquier otro cuerpo– moviéndose bajo la fuerza gravitacional de un cuerpo central, más masivo, es:

$$E_0 = T_{radial} + V_{efectivo}. \quad (\text{VII.29})$$

La forma de utilizar el gráfico $V_{efectivo}$ versus r , y otros de esta naturaleza, es la siguiente: la energía cinética es una flecha que siempre apunta en el sentido de la ordenada, puesto que: $T \geq 0$. El potencial efectivo está representado por una flecha vertical que baja desde la abscisa, hasta alcanzar la curva del potencial efectivo correspondiente a la coordenada r . La suma de ambas debe alcanzar el nivel que identifica a la energía E .

El hecho que la energía cinética sea siempre positiva, determina los límites del movimiento, su radio máximo y mínimo.

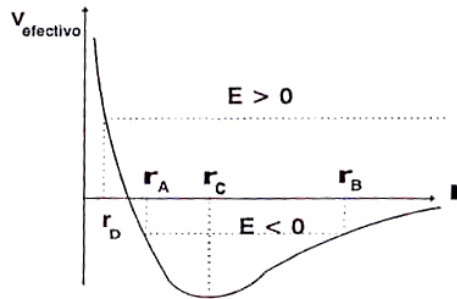


Figura VII.22: Ilustración del uso del gráfico del potencial efectivo para determinar propiedades de los objetos que se mueven bajo la influencia de fuerzas gravitacionales.

VII.6.4. Movimiento circular

Se caracteriza porque el módulo del radio de su órbita, permanece constante, por lo tanto $v_r = 0$.

Incluyendo este resultado en la ecuación [VII.27], obtenemos:

$$\frac{L_0^2}{2m R^2} - \frac{G M m}{R} = \text{Constante},$$

que es el potencial efectivo [VII.28], representado en el gráfico de la Figura [VII.21]. De acuerdo a lo explicado en el último párrafo, la única órbita que no tiene *energía cinética radial*, es aquella ubicada en el mínimo del potencial, su punto más bajo.

En ese punto la partícula está obligada a permanecer con $r = \text{Constante}$, puesto que cualquier cambio en el valor del radio, originaría una energía cinética negativa.

Ejercicio

Demuestre que el punto donde el potencial efectivo alcanza su valor mínimo, corresponde a una órbita circular.

$$\frac{dV_{\text{efectivo}}}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_{\text{circunferencia}}.$$

Para encontrarlo, derive el potencial efectivo y hágalo igual a cero. Encontrará dos soluciones de esta ecuación, que corresponden a los lugares donde la tangente a la función V_{efectivo} es horizontal. Uno de esas soluciones es $r \rightarrow \infty$ y la otra es el radio buscado. $\square$

Una forma de encontrar el valor de r para el movimiento circular es la que se menciona en el Ejercicio anterior. Otra, consiste en reemplazar las leyes de Newton en la ecuación [VII.28], y evaluar la constante E_0 . Si el cuerpo se mueve en una órbita circular, la segunda ley de Newton toma la forma siguiente:

$$\frac{G M}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

introduciendo la definición del momento angular, se obtiene:

$$\frac{G M m}{r} = m \omega^2 r^2 = \frac{L_0^2}{m r^2},$$

reemplazando esta expresión en la ecuación de la energía:

$$\frac{L_0^2}{2m R^2} - \frac{L_0^2}{m r^2} = -\frac{L_0^2}{2m r^2} \equiv E_o < 0,$$

finalmente, introduciendo este valor de E_o en la ecuación [VII.28], se llega a:

$$E_o = -E_o - \frac{G M m}{r}, \quad E_o = -\frac{G M m}{2r} \quad (\text{VII.30})$$

Conociendo el valor de la energía podemos encontrar el radio de la órbita circular.

Se comprueba que la energía es negativa, como corresponde a un estado ligado.

Siempre que hay un cuerpo orbitando alrededor de otro, su energía E_o , es negativa. Este hecho refleja que el cuerpo permanece sujeto al campo gravitacional del objeto central. Para liberarlo, debemos proporcionar suficiente energía cinética de modo que su energía final sea positiva. Es lo que sucede con las sondas espaciales, en la Tierra están ligadas a ella, para alcanzar otro planeta debemos proporcionarles una velocidad (o energía cinética) suficiente para escapar. Esta se denomina *velocidad de escape*.

Finalmente, notemos que la órbita circular es la más ligada: aquella que necesita mayor cantidad de energía para ser liberada.

Método gráfico para determinar órbitas

El gráfico del *potencial efectivo* versus *distancia radial*, nos permite caracterizar el movimiento de un objeto alrededor del centro de atracción gravitacional.

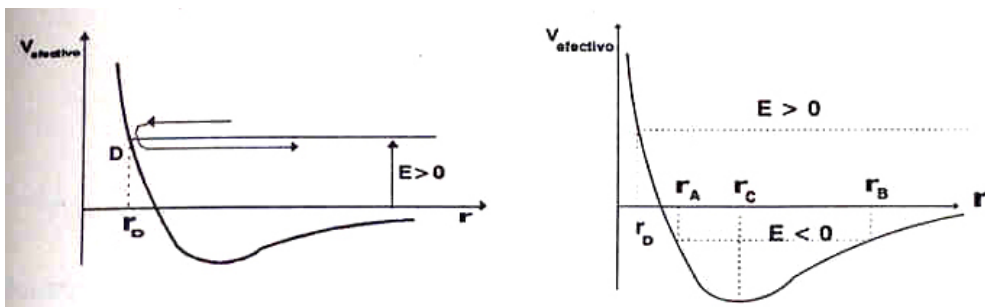


Figura VII.23: Un objeto que se acerca al Sol y luego se pierde en el espacio, sin retornar. En estos casos la energía del cuerpo es positiva, por lo tanto, son capaces de escapar de la atracción gravitacional del centro de atracción.

Como la energía permanece constante durante todo el movimiento, se representa por una línea horizontal. En la Figura [VII.23], la energía es *negativa* ($E < 0$) y el movimiento está limitado a: $r_A < r < r_B$.

Este diagrama representa un planeta que describe una elipse en torno al Sol.

El valor negativo de E , indica que el planeta está *ligado*, es decir, no puede escapar del sistema solar, salvo que se le suministre una energía igual o mayor al valor de $|E|$.

El movimiento circular corresponde a un planeta que tiene una energía

$E = V_{\text{efectivo}}(r = r_c)$ con:

$$r_c = \left(\frac{2 G M_{\odot}}{\omega^2} \right)^{1/3}.$$

El punto C indica un planeta en dicha situación. La recta A–B del caso anterior degenera, aquí, en un punto.

Si $E > 0$ el objeto estelar *no* está ligado y se acerca hasta un radio mínimo r_D y luego se aleja hacia los confines del universo. Estos cuerpos sólo se observan *una vez* y desaparecen para siempre.

Cuando la energía es negativa, pero muy cercana a cero, su periodo, como se puede apreciar en la Figura [VII.23], es muy largo y demora mucho tiempo en aparecer nuevamente. Este es el caso de los cometas.

Otro ejemplo son los satélites. Inicialmente están ligados a la Tierra. Para enviarlos al espacio, necesitamos suministrarles energía. Esta la proporcionan los motores del cohete, convirtiendo energía química del combustible en energía cinética de la nave.

Ejemplo

Calcular en coordenadas cartesianas las relaciones entre el vector posición y la velocidad en un movimiento elíptico.

$$\vec{r} = [a \cos \omega t, b \sin \omega t]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j}]$$

$$\vec{v} = -a \omega \sin \omega t \hat{i} + b \omega \cos \omega t \hat{j}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = (-a^2 \omega + b^2 \omega) \sin \omega t \cos \omega t$$

$$= \frac{1}{2} \omega (b^2 - a^2) \sin 2 \omega t \neq 0, \quad \text{excepto para } (\omega t) = 0, \pi/2, \dots$$

Ejemplo

Si despreciamos la resistencia del aire y todos los inconvenientes técnicos que existen: ¿es posible poner un satélite en órbita estable, *disparándolo* con un cañón, desde un punto de la superficie de la Tierra?

De acuerdo a leyes de Kepler, este satélite queda en una órbita elíptica alrededor de la Tierra, y después de un periodo, vuelve a su punto de partida. Esta órbita es

posible, si suponemos que la Tierra es perfectamente esférica, homogénea, sin atmósfera, estática...etc.

Los satélites son puestos en órbita lanzándolos verticalmente primero, y después, usando otro motor se les comunica una velocidad tangencial, para que permanezcan girando en torno a la Tierra. $\square$

Ejemplo

Se desea poner un satélite de masa m , en órbita circular alrededor de la Tierra. Para ello, primero se lanza verticalmente de modo que alcance una altura h . Una vez allí, se enciende otro motor que le proporciona la velocidad tangencial necesaria para mantenerlo en una órbita circular.

Encuentre la razón entre la *energía mínima*, ΔU , que se necesita para alcanzar la altura h , y la *energía cinética*, ΔT , necesaria para mantenerlo en esa órbita circular.

Se desea encontrar:

$$\frac{\Delta U}{\Delta T_{\text{orbital}}} = \dots?$$

Calculemos el valor de ΔU , suponiendo que al satélite sólo le proporcionamos la energía cinética mínima para alcanzar la altura h :

$$T_i + U_i = T_f + U_f = E_o \quad \text{por conservación de la energía.}$$

$$\text{Como } T_f = 0,$$

$$T_i = \Delta U \equiv U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = -G M m \left[\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right]. \quad (\text{VII.31})$$

Supongamos que unos segundos antes de alcanzar dicha altura con velocidad radial nula, se enciende el último conjunto de motores y en un par de segundos le proporcionan a la nave, la velocidad tangencial necesaria para mantenerlo en órbita circular.

Evaluemos la energía cinética que le suministraron los motores en esta etapa. Usando la segunda ley de Newton para el movimiento circular, tenemos:

$$\frac{G M m}{(R_T + h)^2} = \frac{m V_{\text{orbital}}^2}{(R_T + h)}, \implies V_{\text{orbital}}^2 = \frac{G M}{(R_T + h)}.$$

Con este valor, podemos encontrar la energía cinética que necesita el satélite para mantenerse en una órbita circular:

$$\Delta T = \frac{1}{2} m V_{\text{orbital}}^2 = \frac{G M m}{2 (R_T + h)}.$$

Ahora podemos encontrar la razón entre ambas cantidades:

$$\frac{\Delta U}{\Delta T} = [-2(R_T + h)] \left[\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right] = \frac{2h}{R_T}.$$

La respuesta indica que si la altura $2h > R_\oplus$, la energía que le debemos suministrar para que alcance esa altura, es mayor que la energía cinética que necesitamos para dejarlo en órbita. $\square$

Ejemplo

Un satélite está en órbita elíptica alrededor de la Tierra. Su punto de máximo acercamiento –el perigeo– es igual a r_p , y su punto de mayor alejamiento –el apogeo–, es r_a . Ambos valores son conocidos. La razón entre estos dos números es $k = r_a/r_p > 1$. Encuentre la velocidad del satélite en el apogeo y perigeo de su órbita.

Como el apogeo y perigeo son los puntos extremos de la órbita elíptica, allí la velocidad del satélite es perpendicular a su vector posición. De esta forma, usando el momento angular, podemos demostrar que la razón entre sus velocidades es inversamente proporcional a sus radios:

$$L_o = m v_\perp r = \text{Constante}, \Rightarrow \frac{V_p}{V_a} = k,$$

pero k , es un dato, de modo que tenemos una ecuación para dos incógnitas: V_a y V_p . Necesitamos otra, independiente de la anterior, para resolver este sistema. La conservación de la energía es otra ecuación. Escribiéndola en su forma original, [VII.6.2], tenemos:

$$\frac{1}{2} m_s \vec{V}_a^2 - \frac{G M_T m_s}{r_a} = \frac{1}{2} m_s \vec{V}_p^2 - \frac{G M m_s}{r_p} = E_0.$$

Estas son las dos ecuaciones que necesitábamos. Lo que sigue es el álgebra necesaria para despejar las incógnitas.

Introduciendo la ecuación que relaciona la constante k con las velocidades, obtenemos:

$$\frac{1}{2} m_s \vec{V}_a^2 - \frac{G M_T m_s}{r_a} = \frac{1}{2} m_s k^2 \vec{V}_a^2 - k \frac{G M m_s}{r_a},$$

ordenándola:

$$\frac{1}{2} [k^2 - 1] \vec{V}_a^2 = [k - 1] \frac{G M}{r_a}, \Rightarrow V_a^2 = \frac{2}{k + 1} \frac{G M}{r_a}.$$

Análogamente podemos encontrar la velocidad V_p . $\square$

VII.7. EL SISTEMA SOLAR Y NUESTRA GALAXIA

El Sol contiene el 99% del total de la masa del sistema solar, de manera que es una buena aproximación suponer que los planetas son masas puntuales que orbitan a su alrededor, sin perturbarlo. Usando la ley de Kepler, $r^3 \omega^2 = G M_{\odot}$, podemos graficar la *velocidad orbital de los planetas* versus el *radio* de la órbita.

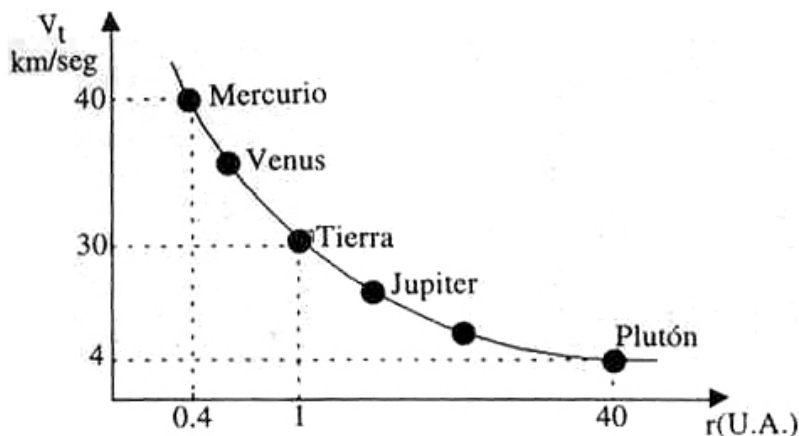


Figura VII.24: Gráfico aproximado de las velocidades orbitales de cada uno de los planetas. Se puede observar que la velocidad decae en forma inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su distancia al Sol. Este comportamiento se ajusta a las leyes de Newton.

Podemos suponer que los planetas describen un movimiento circular, puesto que la excentricidad, e , de su órbita es muy pequeña. Su velocidad tangencial es:

$$v_{\text{tangencial}} \equiv v_t = r \omega, \quad \rightarrow \quad v_t^2 = \frac{G M_{\odot}}{r},$$

vemos que la velocidad orbital decae como el inverso de la raíz cuadrada del radio r , tal como se observa en los planetas. Las leyes de Newton son válidas, dentro de la precisión de estas medidas, en escalas de distancia del tamaño del sistema solar.

Aplicamos estas mismas leyes a nuestra galaxia o a cualquier otra. Implícitamente estamos suponiendo que las leyes físicas que rigen a nuestro alrededor son válidas también en el resto del universo. Este es un principio, puesto que constituye una hipótesis de trabajo, cuya veracidad sólo podemos comprobar a través de los resultados obtenidos. Si éstos coinciden con las observaciones, lo aceptamos como verdadero.

En la Figura [VII.25], se muestra un par de fotos de galaxias espirales, la nuestra es similar a la que aparece a su derecha.

Estudiemos el movimiento de las estrellas, o del gas difuso que está contenido en nuestra galaxia. Primero, especifiquemos sus características, que son en realidad genéricas: están presentes en todas las galaxias espirales. Se destaca el núcleo, que es la zona central más luminosa, un disco que contiene los brazos espirales, también luminosos y con alta tasa de formación de estrellas y, finalmente, el halo que es una zona esférica que envuelve a las anteriores, poco luminosa y que se extiende mucho más allá del disco.

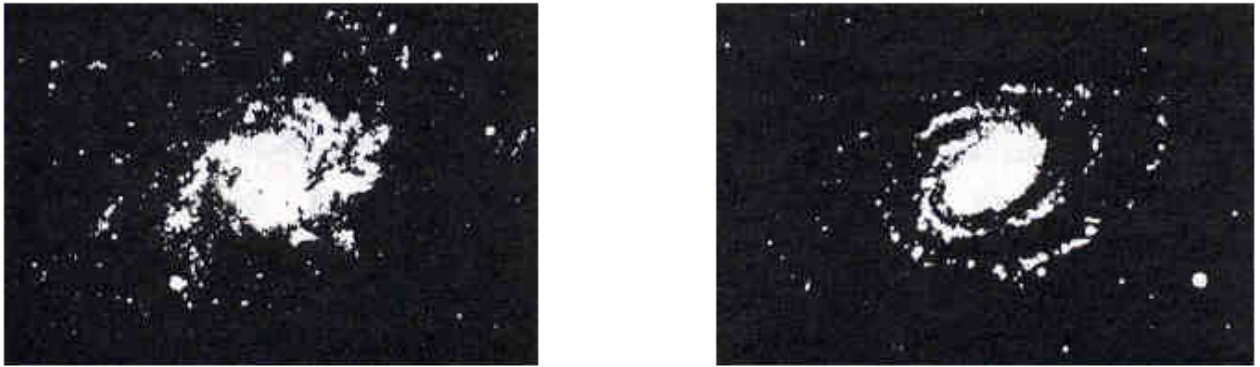


Figura VII.25: Fotos de galaxias espirales. A la izquierda aparece una galaxia similar a la nuestra, con varios brazos extendiéndose desde el núcleo. En estos brazos, continuamente se están formando nuevas estrellas. A la derecha se incluye una galaxia espiral pero con forma de barra.

A continuación aplicaremos las leyes de Newton a un modelo simple de una galaxia espiral y contrastaremos nuestros resultados con las observaciones recientes. Podemos anticipar que éstas son mucho más espectaculares que las predicciones conservadoras que sacaremos de este modelo, y de hecho, plantean –como veremos– un dilema que aún hoy no es posible resolver: aparentemente el universo contiene muchísima más masa que la estimada hasta hace poco.

En el cálculo que sigue, vamos a modelar la galaxia suponiendo que *la luminosidad es el indicador de la existencia de masa*, en otras palabras, que solamente en las regiones luminosas de una galaxia, existe una distribución de masa, en las zonas oscuras la masa es despreciable.

De acuerdo a esta suposición, concentramos toda la masa en el núcleo de la galaxia, que lo consideramos esférico y le asociamos una densidad de materia ρ , constante. En la región externa, más allá del núcleo suponemos que la densidad de masa existente es tan baja que no contribuye al campo gravitacional. No se incluyen los brazos espirales ni el disco en este modelo.

Todas estas aproximaciones simplifican al máximo los cálculos.

¿Cuál será la velocidad de una estrella describiendo una órbita circular, en las dis-

tintas regiones de este modelo propuesto para una galaxia?

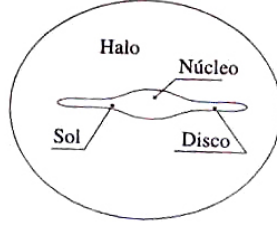


Figura VII.26: Dibujo aproximado de nuestra galaxia y la posición relativa del Sol en ella. La nuestra es una galaxia espiral. Tiene un diámetro aproximado de 10^{21} m, y el Sol se ubica a una distancia de $2,6 \times 10^{20}$ m.

Veamos primero el caso de una estrella que orbita en la región del núcleo. Como el modelo tiene simetría esférica, de acuerdo a los teoremas de Newton, la atracción gravitacional que se ejerce sobre la estrella, proviene de la masa del núcleo localizada al interior del radio de su órbita. Como también la podemos imaginar concentrada en un punto en el centro del núcleo, usamos la ley de Kepler, obteniendo:

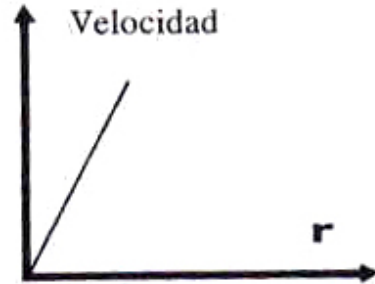
$$\omega^2 r^3 = G M_{int}, \quad M_{int} = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3.$$

Hemos usado la densidad del núcleo como constante, de acuerdo al modelo propuesto.

$$r v_{orb}^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho_0 r^3$$

$$v_{orb} = \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{3} \rho_0} \right) r.$$

El gráfico de esta velocidad orbital, se muestra en la Figura.



Para una estrella ubicada fuera del núcleo, toda la masa se concentra en su centro, por lo tanto M es una constante en la fórmula anterior y la velocidad orbital de la estrella es:

$$\omega^2 r^3 = G M_{int.}, \quad \Rightarrow \quad v_{orbital} = \frac{\sqrt{G M_{total}}}{\sqrt{r}}. \quad (\text{VII.32})$$

Si la masa de una galaxia se asocia únicamente a su luminosidad, el gráfico *velocidad orbital* versus *distancia*, es el que se muestra en la Figura VII.27.

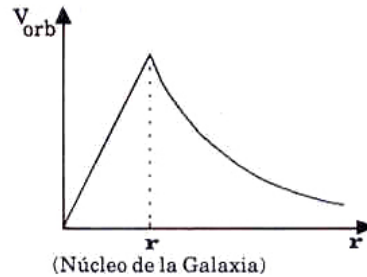


Figura VII.27: La velocidad orbital aumenta proporcionalmente al radio a medida que nos alejamos del centro de la galaxia hasta llegar al borde del núcleo, a partir del cual decrece como el inverso de la raíz cuadrada de r , de acuerdo a las leyes de Newton.

Resumiendo, en este modelo la masa asociada a una galaxia es la *masa luminosa*. Si esta fuera efectivamente la única existente, la *velocidad orbital* que observaríamos en las galaxias espirales, debería ser la señalada en la Figura.

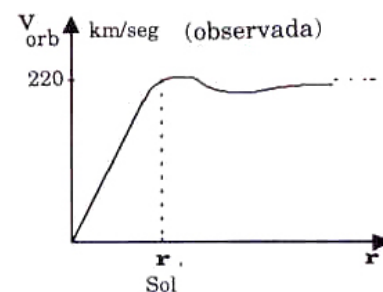
Hasta hace unos quince años, no podían realizarse mediciones en regiones muy alejadas del núcleo por ser de muy baja luminosidad, y no era posible estudiar el comportamiento de los elementos de la galaxia en dichas regiones. Sin embargo, en la actualidad, debido esencialmente al adelanto de la electrónica, en esta última década, ha sido posible medir la velocidad orbital de los componentes de una galaxia, esencialmente gases, a grandes distancias del núcleo y por lo tanto, notablemente más oscuras.

El resultado ha sido sorprendente: *la velocidad orbital observada, permanece constante, no disminuye con la distancia*, como predecía el modelo propuesto. La velocidad orbital conserva su valor mucho más allá del borde luminoso de la galaxia, de hecho, no se ha encontrado el punto donde comience a decaer, que señale su fin.

La suposición que no existe una cantidad apreciable de masa fuera del núcleo luminoso no parece ser correcta, no concuerda —ni siquiera aproximadamente— con las observaciones.

Al contrario, suponer que el núcleo tiene una densidad constante, parece correcto.

Debemos modificar nuestro modelo para adaptarnos a las observaciones. *No modificaremos las leyes de Newton*, sino otro de los ingredientes de la teoría: la distribución de



masa en la región externa de la galaxia. Su densidad no puede ser nula. Su valor debe ser tal, que reproduzca la velocidad orbital constante que se observa en esa región.

Mantenemos la simetría esférica del modelo, por simplicidad, y suponemos que las ecuaciones de Newton son válidas. Podemos entonces aplicar los teoremas de Newton, de modo que el campo gravitacional en un punto a una distancia r del centro, se puede calcular como proveniente de una masa puntual ubicada en el origen. Para que la velocidad orbital sea una curva plana, debe cumplirse que:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G M(r)}{r^2},$$

de aquí vemos que si, $v^2 = \text{Constante}$, entonces la masa debe depender linealmente del radio: $M(r) = [\text{Constante}] r$. Para obtener este comportamiento, y de acuerdo al principio de simplicidad, ensayamos con una densidad $\rho(r) = K/r^2$, con K una constante con dimensiones de [masa/distancia]. Para calcular la masa en este caso, debemos sumar la masa contenida en cada uno de los cascarones de espesor $\Delta r = \text{Constante}$, y cuyo volumen es:

$$V_{\text{cascarón}} = 4 \pi r^2 \cdot \Delta r.$$

La masa total generada por esta densidad, es:

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \sum_i \rho_i(r) \Delta r_i \cdot 4 \pi r_i^2 \\ &= \sum_i \frac{K}{r_i^2} \cdot 4 \pi r_i^2 \Delta r_i \\ &= 4 \pi K \sum_{i=1}^N \Delta r_i \\ \text{Masa} &= 4 \pi K r. \end{aligned}$$

A pesar que la densidad disminuye como $1/r^2$, la masa total *aumenta* proporcionalmente con la distancia r . Si aceptamos que las ecuaciones de Newton constituyen la forma correcta para detectar la existencia de masa –brille o no–, concluimos que las galaxias contienen una masa oscura, invisible en una placa fotográfica.

En la actualidad se estima que la masa luminosa es un porcentaje muy bajo de la masa total que compone el universo, se calcula que es del orden de un 20 % de la masa oscura. Este resultado indica que la masa de las galaxias, y con ello, la del universo es mucho mayor que la supuesta hasta ahora y, lo que es más intrigante, que desconocemos el origen y la naturaleza de esta componente oscura.

Existen algunas hipótesis, para explicar el origen de esta materia *oscura*: podrían ser agujeros negros y planetas como Júpiter o una familia de partículas aún no detectada en el laboratorio. Este es un dilema sin resolver, en el cual se está investigando hoy.

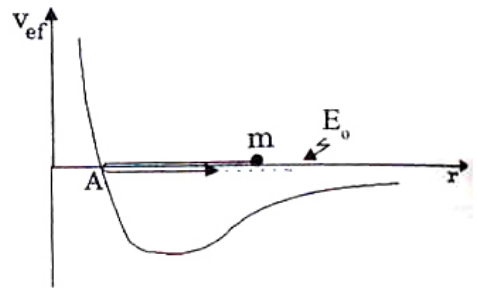
Comenzamos este capítulo relatando el descubrimiento de dos nuevos planetas: Neptuno y Plutón, ocurrido hace un siglo, mediante la aplicación de las ecuaciones de Newton al sistema solar. Hemos concluido planteando el enigma de la existencia de una masa oscura, inmersa en el universo. Este enigma contiene una suposición que no hemos querido desechar: las leyes de Newton son básicamente correctas a esta escala de distancia.

VII.8. EJERCICIOS

- 1.- En el diagrama de la Figura, calcule el valor del radio r_A en función de L_0 , G y las masas M y m . Use la expresión para la conservación de la energía en el movimiento bajo fuerzas centrales:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{L_0^2}{2 m r^2} - \frac{G M m}{r}.$$

¿En qué punto del gráfico, la partícula adquiere su máxima velocidad radial?



- 2.- Suponga que el Sol comenzó a contraerse hasta que se transformó en un punto con masa igual a $M = M_\odot$.

a) Si la velocidad límite que puede adquirir un objeto es la velocidad de la luz c , calcule a qué *altura* sobre esta estrella colapsada, puede ubicarse un astronauta para tener posibilidades de escapar de su atracción gravitacional.

b) Una partícula describe una órbita circular alrededor de este punto masivo, con la máxima velocidad posible: c . Calcule el radio de esta órbita y la energía asociada. Recordando que c es una velocidad límite: ¿es posible que esta partícula pueda escapar de esta estrella?

c) Sobre la superficie de la Tierra, la diferencia de la aceleración de gravedad entre la cabeza de una persona y sus pies es despreciable.

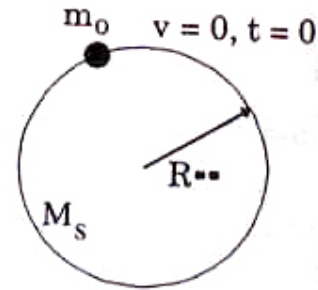
Si nos encontramos cerca de una estrella colapsada –como la descrita– la situación no es la misma. Suponga que este punto tiene la masa del Sol, demuestre que la *diferencia* entre la aceleración de gravedad que siente un astronauta entre sus pies y su cabeza es:

$$\Delta a = \frac{2 G M_\odot h}{R^3}, \quad \text{válido para } R \gg h.$$

Donde h es su altura, R es la distancia radial desde la estrella hasta los pies del astronauta y Δa es la diferencia entre la aceleración experimentada por los pies y la cabeza.

- d) Suponga que físicamente, una persona no puede resistir una diferencia de aceleración Δa , mayor que $5g$, donde g es la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra. Calcule a qué distancia de la estrella, este astronauta será despedazado por estas fuerzas *diferenciales*.
- 3.- a) Si $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ [dinas cm}^2\text{]/g}^2$. Calcule $\vec{F}$ entre una masa $m_1 = 1 \text{ gr}$ y $m_2 = 1000 \text{ gr}$, si están separados a 5 cm .
- b) La Tierra atrae a una masa m_1 , situada sobre la superficie, con una $\vec{F} = 9,8 \times 10^{-3} \text{ N}$. Si, $R_{\text{Tierra}} = 6380 \text{ km}$, y $m_1 = 10^{-3} \text{ kg}$, calcule la masa de la Tierra.
- c) Calcule $\vec{g}$ sobre la superficie de la Tierra.
- d) Calcule la aceleración de gravedad de 1 gr de masa que está a una altura de dos radios terrestres de la superficie.
- 4.- Desde un vehículo espacial se eyecta un satélite con una velocidad de $v = 32,000 \text{ [Km/hr]}$, paralela a la superficie de la Tierra y a una altura de 965 km . Si el radio terrestre es de 6.380 km , $g = 980 \text{ cm/s}^2$, sobre la superficie de la Tierra; ¿puede este satélite mantenerse en órbita, ya sea circular o elíptica?
- 5.- Los satélites geostacionarios están ubicados en una órbita contenida en el plano ecuatorial y con una velocidad angular igual a la terrestre, lo que les permite permanecer en una posición fija con respecto a la Tierra.
- a) Determine el radio R que debe alcanzar este satélite para instalarse en una órbita geostacionaria.
- b) Calcule la altura del satélite sobre la superficie terrestre.
Evalúe numéricamente ambos resultados.
- 6.- Calcule el ancho de los anillos de Saturno, sabiendo que una partícula situada en el borde interior del anillo tiene una velocidad v_i y otra, situada en el borde exterior v_e .
- 7.- Explique qué es la división de Cassini que aparece en los anillos de Saturno. Su origen se atribuye a una perturbación gravitacional generada por su satélite natural Minas.
Si el periodo de Minas es el doble del correspondiente a la división de Cassini, calcule el radio de dicha división.
- 8.- La formación de las estrellas consiste en el aglutinamiento de la materia (gas tenue) debido a la atracción gravitacional que ejerce una sobredensidad que le da origen.

Para tener una estimación del tiempo que tarda en aglutinarse una estrella, calcule cuánto demora una partícula de prueba en alcanzar el centro de una esfera de gas. Suponga que durante este proceso, la esfera de gas permanece estática.



Considere que la región que contiene la sobredensidad inicial es una esfera homogénea, cuya densidad se fija distribuyendo la masa del Sol uniformemente en un radio igual al del sistema solar, R_{SS} :

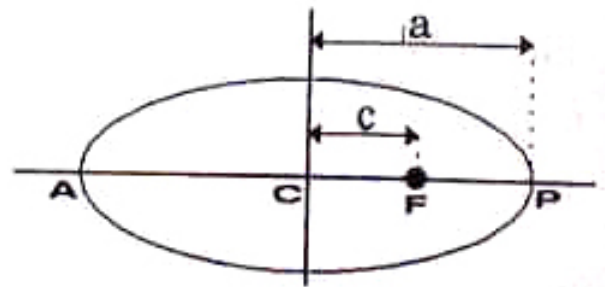
$$R_{SS} = 6 \times 10^{14} \text{ cm}, \quad M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{ g}, \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 / \text{s}^2.$$

Una partícula de prueba es aquella que no ejerce ninguna fuerza gravitacional, pero es afectada por la fuerza de gravedad del sistema.

- 9.- La masa del Sol es 320.000 veces la masa de la Tierra, y la distancia entre ambos es 400 veces el radio de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra.
 - a) ¿Cuál es la razón entre el módulo de la fuerza de atracción Sol-Luna y la fuerza Tierra-Luna? Suponga que la distancia entre el Sol y la Luna es constante e igual a la que separa el Sol de la Tierra.
 - b) Cualitativamente (es decir sin calcular, usando sólo un dibujo), ¿cuál es la trayectoria de la Luna vista desde el Sol?
- 10.- La Figura representa la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol que ocupa el foco F . Si a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente, y c es la distancia del centro C a un foco, demuestre que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{a+c}{a-c}, \quad \text{y}$$

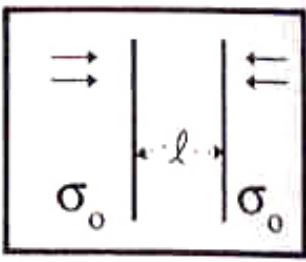
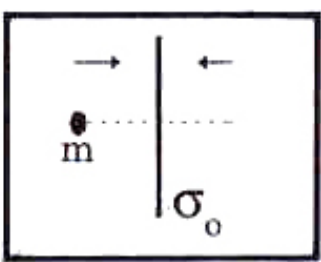
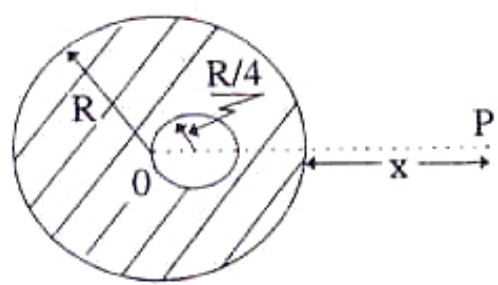
$$a \cdot v_P \cdot v_A = G M_{\odot},$$



donde se conoce: la masa del Sol, $M_{\odot}$, la masa del planeta, m , la constante de gravitación universal G , las distancias a y c y las velocidades v_A y v_P , del planeta en el afelio y en el perihelio respectivamente.

- 11.– a) Un pulsar es una estrella que está en las etapas finales de su evolución, y que ha disminuido considerablemente su radio. Los pulsares tienen la particularidad que giran rápidamente sobre sí mismos, y están emitiendo radiación desde algunas zonas de su superficie. Esta emisión es detectada en los radio-observatorios en la Tierra, en forma periódica: cada vez que la mancha se alinea con la Tierra, recibimos un pulso, tal como vemos el destello de una baliza en una ambulancia. Calcule el radio de este pulsar, sabiendo que *inicialmente* –antes de colapsar–, tenía una masa de $2 M_{\odot}$ y un radio de $R = R_{\odot}$, y su periodo de rotación era de 25 días. Se sabe que en la actualidad, en su etapa final, envía pulsos a intervalos de T segundos. Evalúe esta cantidad para $T \sim 0,1$ s.
- b) Suponga que en su etapa de contracción, perdió la mitad de su masa. ¿Puede encontrar el radio de la estrella a partir de los datos anteriores? ¿Qué suposiciones debe hacer?
- 12.– Analice las siguientes preguntas:
- a) Si la fuerza de gravedad actúa sobre todos los cuerpos proporcionalmente a sus masas ¿por qué un cuerpo más pesado no cae más a prisa que uno liviano?
- b) ¿Espera Ud. que la energía total del Sistema Solar permanezca constante, o que su momento angular lo haga? Explique.
- c) Considere un cascarón hueco ¿cómo es el potencial gravitacional en su interior, comparado con su valor en la superficie?
¿Cuál es la intensidad del campo gravitacional en su interior?.
- d) La información popular relativa a los satélites artificiales de la Tierra los describe como *libres de la atracción gravitacional Terrestre* ¿Es correcta esta afirmación?
- 13.– ¿Cuál es el periodo de un péndulo en la superficie de la Luna, si su periodo en la superficie de la Tierra, es de 2 segundos?
- 14.– ¿Con qué velocidad horizontal debe eyectarse un satélite, situado a una altura de 161 km sobre la superficie de la Tierra para que siga una órbita circular a su alrededor?
¿Cuál será su periodo de rotación? ($R_{\oplus} = 6,447$ km.)
- 15.– La distancia media entre Marte y el Sol, es de 1.524 veces la equivalente a la Tierra–Sol. A partir de estos datos, encuentre el número de años que requiere Marte para efectuar una revolución en torno al Sol.
- 16.– a) Demuestre que para escapar de la atmósfera de un planeta de masa M , una molécula debe tener una velocidad v , tal que, $v^2 > 2GM/r$, siendo r la distancia de la molécula al centro del planeta.

- b) Determine la velocidad de escape de la Tierra para una partícula atmosférica a 1.000 km sobre la superficie de la Tierra. Repita este cálculo en el caso de la Luna y el Sol.
- 17.— Dos partículas de masas m y M estaban inicialmente en reposo, separadas por una distancia que consideramos infinita. Demuestre que en cualquier instante posterior, su velocidad relativa de acercamiento debida a la atracción gravitacional es: $\sqrt{2G(M+m)/d}$, donde d es la distancia entre ellas.
- 18.— Una masa de 200 gr. y otra de 800 gr. están separadas 12 cm.
- a) Encontrar la fuerza gravitacional sobre una unidad de masa en un punto situado a 4 cm. de la masa de 200 gr y en la misma línea de las tres partículas.
- b) Encontrar la energía potencial por unidad de masa en ese punto.
- c) ¿Cuánto trabajo se necesita para mover esta unidad de masa a un punto situado a 4 cm. de la masa de 800 gr. en la línea de los centros?
- 19.— Encuentre la aceleración de gravedad que experimenta una partícula en un punto P , situado a una distancia x , de la superficie de una esfera de masa M , que tiene una cavidad esférica de radio $R/4$ y cuyo centro está situado a una distancia $R/4$, del centro de la esfera. La densidad de masa de la esfera es ρ_o , y el punto P , el centro de la esfera O y el de la cavidad están alineados.
- 20.— Una partícula de masa m , oscila en un eje perpendicular a un plano infinito de densidad superficial de masa σ_o . La partícula se dispara con una velocidad inicial V_o , desde un pequeño agujero que se hizo en el plano infinito para permitir la oscilación.
- a) Encuentre la energía potencial, $U(x)$, del plano infinito y gráfiquela. No considere los efectos del agujero.
- b) ¿Qué valor tiene el periodo de esta partícula? Expréselo en función de m , G , σ_o y la energía inicial E_o .
- c) Use el principio de superposición para encontrar la fuerza gravitacional y el potencial de dos planos infinitos, paralelos, separados por una distancia ℓ y que poseen la misma densidad superficial de masa σ_o .



Complemento matemático

Introducción a la Mecánica

Nelson Zamorano Hole

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

VIII

Capítulo I

COMPLEMENTO MATEMATICO

I.1. INTRODUCCION

La Física intenta conocer las leyes que rigen el comportamiento de la naturaleza. Con este objeto propone y analiza diversos modelos matemáticos simplificados que simulan situaciones que ocurren a nuestro alrededor. El propósito de esta búsqueda es encontrar un modelo matemático que, con un **mínimo** de suposiciones, nos permita entender un gran número de hechos experimentales.

Un ejemplo en esta dirección lo constituyen las leyes de Newton –incluyendo su ley de gravitación universal–, introducidas en 1687. Con este conjunto de ecuaciones, Newton logró explicar en forma simultánea fenómenos aparentemente desconectados entre sí, como el movimiento de los planetas en la esfera celeste o la caída de una manzana en la tierra.

Con las leyes de Newton, los fenómenos celestes y aquellos que ocurren a nuestro alrededor quedan descritos con una sola ley física, cuya validez es¹ universal. Este es el objetivo de la física.

Por otra parte, los modelos simples que uno puede analizar en detalle y entender, no abarcan todos los fenómenos que uno observa. El mundo real es muy complejo. Es preciso adoptar una estrategia para entender esta multitud de hechos. Esta consiste en seleccionar los más relevantes, aquellos en los cuales hay una característica que lo destaca del resto y proceder a estudiarlo. Dependiendo de las preferencias del investigador, se recurre al Laboratorio, a una simulación en el computador o a un estudio teórico.

Si nos ubicamos en el Laboratorio, los experimentos se organizan y diseñan de modo

¹A partir de 1914 se conoce otra teoría, la Relatividad General, que explica observaciones que no están contenidas en el esquema desarrollado por Newton.

que el fenómeno que uno desea investigar se destaque nítidamente con respecto a cualquier otro. Una vez logrado esto, podemos estudiar su respuesta a la variación de un parámetro externo, como la temperatura, un campo magnético, la presión... etc. Eventualmente (no siempre), con estos datos uno puede desarrollar una teoría que explique este fenómeno y que, en el caso ideal, permita, a partir de ella, predecir otros resultados –aún desconocidos– que puedan ser verificados a través de este experimento. Este último paso constituye la prueba de fuego de cualquier teoría. Si sus predicciones no coinciden con los resultados experimentales esperados, simplemente debemos reformular la teoría, por convincente que ésta parezca.

Como una forma de ilustrar, con un par de casos, cuándo una cierta característica es más importante que otra en una situación concreta, incluimos dos ejemplos a continuación.

Si nosotros pudiéramos escribir aquí las ecuaciones que gobiernan la propulsión de una bacteria en su medio, junto con aquéllas que gobiernan el movimiento de los planetas en el espacio, veríamos que lucen muy diferentes. Sin embargo, sabemos que las mismas leyes gobiernan ambas situaciones. Lo que sucede, es que las **aproximaciones** hechas al plantear cada uno de estos casos son distintas. En la propulsión de las bacterias, la viscosidad del medio en que se mueven es fundamental, de hecho es lo más importante, más relevante incluso que la masa de la bacteria misma; en cambio para determinar la trayectoria de un planeta lo crucial es la posición relativa del Sol y del resto de los planetas. En este caso la viscosidad es despreciable.

Otro ejemplo, que estaremos en condiciones de calcular durante este curso, es la caída de una bolita de acero desde un metro de altura (por fijar una distancia). En este caso la viscosidad del aire es **irrelevante** (su efecto es muy pequeño). En cambio, si es lanzada desde una altura de 2.000 m, la viscosidad del aire determinará la máxima velocidad que la bolita alcance en su caída.

Podemos afirmar que todas las leyes físicas son un conjunto de aproximaciones. Mientras mejor la aproximación, mayor es el número de fenómenos incluidos.

En efecto, hoy día sabemos que las leyes de Newton constituyen una muy buena aproximación para describir el comportamiento del mundo que nos rodea. Sabemos que la Relatividad General es una aproximación aún mejor para describir los efectos de la atracción gravitacional.

Por ejemplo, de acuerdo a la Relatividad General, dos relojes idénticos ubicados a distinta altura sobre la superficie de la tierra, funcionarán a un ritmo diferente, el reloj situado a mayor altura se adelantará con respecto al situado sobre la superficie de la tierra. Esta fue una de las predicciones de la teoría de gravitación de Einstein y que ha sido verificada con gran precisión.

De hecho, estos resultados se usan hoy para corregir las señales recibidas desde los satélites en órbita encargados de mantener una escala de tiempo uniforme en nuestro

planeta. Las correcciones introducidas modifican el intervalo de tiempo entre cada señal recibida en tierra, para compensar el adelanto introducido por el satélite debido a su altura. Son en realidad muy pequeñas pero la precisión lograda en la medición del tiempo es tal, que las hace necesarias. (También se incluyen correcciones debidas a la Relatividad Especial para compensar la velocidad relativa del satélite con respecto a la base.)

La Geometría es una herramienta importante en la formulación y análisis de los problemas que interesa estudiar en Física, así como también lo es el cálculo. De hecho, esta herramienta matemática fue desarrollada por Newton (simultáneamente con Leibnitz) precisamente para poder formular sus leyes en forma precisa. Comenzaremos dando un breve repaso de Geometría y de los conceptos básicos de Trigonometría, posteriormente introduciremos nociones de cálculo haciendo énfasis en las aproximaciones y en el cálculo de áreas bajo una curva, que son los procedimientos más requeridos en Física.

I.2. SERIES

Suponemos conocidos los elementos básicos de Matemática y Geometría . En esta sección estudiaremos algunas series que usaremos más adelante y que probablemente no es una materia conocida para algunos de los alumnos.

I.2.1. Sucesiones

(Ref.: Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica, G. Thomas, Cap. XVI).

Una *sucesión* es un conjunto de símbolos

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$$

que están en correspondencia biunívoca (es decir $1 \leftrightarrow 1$) con la sucesión ordenada de los números naturales. Los símbolos $a_1, a_2, \dots$ se denominan términos de la sucesión, de forma que el término *enésimo* es a_n , y se designa con la notación $\{a_n\}$.

Ejemplo

El término genérico $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, designa la sucesión

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots \{1/n\} \dots$$

El término genérico $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$, designa la sucesión

$$1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots \{1/2^{n-1}\}, \dots \square$$

¿Qué sucede si n crece indefinidamente? ¿Cuál es el valor de a_n en dicho caso?

En este caso, si es posible asociar a la sucesión $\{a_n\}$ un número L , tal que la diferencia $|L - a_n|$ sea tan pequeña como se quiera, para todos los valores de n suficientemente grande, diremos que el *límite* de la sucesión $\{a_n\}$ es L , y lo escribiremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L. \quad (\text{I.1})$$

Mediante la frase: $|L - a_n|$ es arbitrariamente pequeño para valores grandes de n , queremos decir que para cualquier número positivo ϵ , corresponde un subíndice N tal que:

$$|L - a_n| < \epsilon, \quad \text{para todo } n > N. \quad (\text{I.2})$$

O sea, todos los términos que siguen al N -ésimo, están comprendidos entre $(L - \epsilon)$ y $(L + \epsilon)$.

Si tal límite no existe, entonces diremos que la sucesión es *divergente*.

I.2.2. Series

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^3 (2^n) \equiv 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14,$$

$$\sum_{n=1}^3 (1) \equiv 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$\sum_{k=1}^n (a^k) \equiv a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n,$$

$$\sum_{k=4}^6 (a^k) \equiv a^4 + a^5 + a^6, \quad \text{donde } a \text{ es un número arbitrario.}$$

Definición:

El símbolo griego *sigma* $\equiv \sum$ indica que el sumando $[(a^k)]$ en el último ejemplo] toma cada uno de los valores que debe recorrer k partiendo desde el límite inferior hasta llegar al límite superior a través de los enteros. Como se indica, el sumando se suma tantas veces como el número de enteros que recorra k .

El límite superior en los dos primeros ejemplos es 3 y en el tercero no se deja explícito, n puede tomar cualquier valor entero. k lleva la contabilidad de los términos incluidos en la suma y el valor más alto que toma es n (va desde $k = 1$ hasta $k = n$, con n un número entero).

Es fácil demostrar la siguiente propiedad de las sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{k=n} C a_k = C \sum_{k=1}^{k=n} a_k, \quad (\text{I.3})$$

donde C es una constante que no depende de k . En palabras, cada vez que tenemos un factor que se repite en cada uno de los términos de la sumatoria, lo podemos sacar como factor común en frente de la sumatoria.

Para demostrarlo debemos usar la siguiente propiedad de los números: $C a_1 + C a_2 + C a_3 = C \{a_1 + a_2 + a_3\}$. Esta es la sumatoria anterior con $k = 3$.

The figure consists of two side-by-side diagrams illustrating the sum of squares. Each diagram shows a grid of numbers with some cells highlighted by boxes.

Left Diagram: A grid with 5 rows and 5 columns. The first three rows are boxed. The first row contains 1, 2, 3, ..., n. The second row contains 2, 4, 6, ..., 2n. The third row contains 3, 6, 9, ..., 3n. Below these are two more rows of dots. The fifth row is boxed and contains n, 2n, 3n, ..., n^2. Below the grid, the sum is written as:
$$= \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^n i + \dots + n \sum_{i=1}^n i$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

Right Diagram: A grid with 5 rows and 5 columns. The first three columns are boxed. The first column contains 1, 2, 3, ..., n. The second column contains 2, 4, 6, ..., 2n. The third column contains 3, 6, 9, ..., 3n. Below these are two more columns of dots. The fifth column is boxed and contains n, 2n, 3n, ..., n^2. Below the grid, the sum is written as:
$$= 1^2 + 2(2)^2 + \dots + n(n)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n i^3$$

Figura I.1: (The College Mathematics Journal, Vol. 62, # 5, Dec. 89.)

Demuestre la siguiente igualdad entre sumatorias:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i \right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (i)^3.$$

Solución

A continuación se incluye una demostración ingeniosa que hace uso del método gráfico para demostrar la igualdad.

Se escribe el mismo arreglo de números uno al lado de otro, como se indica en la Figura anterior. (No es natural, por supuesto, que a uno se le ocurra espontáneamente este tipo de demostración, es necesario mucho trabajo y un poco de ingenio).

La idea consiste en sumar los números de los arreglos agrupados en forma diferente, de manera que reflejen a cada una de las sumatorias propuestas. Como los números en ambos arreglos son iguales, el valor de la suma debe ser el mismo; de esta forma demostramos la igualdad entre ambas sumas.

En esta Figuras se suman, en ambos casos, los números de acuerdo a la caja que los contiene (rectangular o formando un ángulo recto). El valor de la suma de cada una de las cajas se indica al pie de la misma Figura.

En el caso del arreglo ubicado a mano izquierda, se ha sacado –usando la regla de factorización recién descrita– un factor común en cada una de las sumatorias individuales, que corresponde al número 2, 3, 4... n , de acuerdo a la posición del rectángulo horizontal. En seguida uno puede darse cuenta que es posible sacar la sumatoria de i como factor común:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + 2 \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + 3 \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) + \dots + n \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right) = \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} (i) \right\} [1 + 2 + 3 + \dots + n] = \left[\sum_{i=1}^{i=n} i \right]^2$$

Dejamos como ejercicio comprobar que los términos al pie de la Figura de la derecha corresponden, efectivamente, a la suma de los números encerrados dentro de cada uno de los cajas en forma de ángulo recto.

El mismo resultado puede ser obtenido usando geometría. Para ello debemos pensar que $\left[\sum_{i=1}^{i=n} i \right]^2$, corresponde al *área de un terreno cuadrado* que tiene $\sum_{i=1}^{i=n} i$ metros (por dar una unidad de longitud) por lado. A continuación se dibuja el terreno a escala (la longitud 5, por ejemplo, tiene cinco unidades de largo) y se calcula el área en forma diferente. El número indicado dentro del cuadrado (o rectángulo), corresponde al valor del área de dicha figura; pero en lugar de sumar las áreas en forma arbitraria, las sumamos añadiendo franjas en forma de ángulo recto, es decir aquellas encerradas entre dos líneas continuas sucesivas que tienen la forma señalada. Nuevamente, con este método se verifica la igualdad propuesta. $\square$

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Las series descritas anteriormente son finitas, pero el límite superior puede ser un número tan grande como uno quiera. En este caso el valor de la serie (es decir, el valor que toma la suma de todos los términos) debe ser un número **finito** para que sea de alguna utilidad.

En muchos de los casos de interés en física la serie (o la suma) no termina nunca, es decir el límite superior es infinito (∞). En este caso, si la serie está bien definida (es decir,

su suma es finita), ocurre que al escribirla explícitamente, cada uno de los términos que van agregándose – a partir de un cierto valor de $\mathbf{k}$ –, van tomando rápidamente valores (absolutos) más y más pequeños de manera que la serie tiende a un límite finito. Es decir, se acerca tanto como uno quiera (dependiendo del número de términos que se sumen) a un cierto valor finito, que se denomina el límite de la serie.

Hagamos contacto con nuestra definición de sucesión, para definir formalmente las series.

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ es una *sucesión* cualquiera de números o funciones, entonces mediante el símbolo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

representaremos una sucesión deducida a partir de la primera y que llamaremos *serie*. (Sólo se diferencia de la definición utilizada en los primeros ejemplos en el número de elementos de la suma. Era finito en el primer caso y ahora es más general, puede ser infinito.)

Definimos S_n como la sucesión de sumas parciales de la serie como sigue

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

El término enésimo de la sucesión S_n es la suma de los n primeros términos de la serie $\{a_n\}$.

Si esta sucesión posee un límite cuando n crece indefinidamente –de acuerdo a la definición dada anteriormente [??]–, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \tag{I.4}$$

S es el valor de la secuencia S_n cuando $n \rightarrow \infty$. También podemos decir que la serie $\{S_n\}$ converge a S .

Si por el contrario la serie $\{S_n\}$ diverge, es decir, cada uno de las sumas parciales aumenta su valor continuamente a medida que n crece, entonces definimos la serie $\{S_n\}$ como una serie divergente.

En física, a este nivel, sólo nos interesan las series convergentes, puesto que son las únicas a las cuales les podemos asignar un significado concreto (un número).

A continuación estudiaremos algunos ejemplos de series, tanto finitas como infinitas.

El concepto de serie infinita con su respectivo límite asociado, no es trivial y requiere bastante maduración para lograr entender su significado. Hemos querido introducirla al

comienzo del curso y trabajar con algunas de ellas, porque más tarde las necesitaremos. Proporcionan, además, una posibilidad de utilizar el computador para convencerse de algunos resultados cuyas demostraciones analíticas van más allá de este curso.

A continuación estudiaremos una de las series más usadas en física. Su interés radica en su uso en las aproximaciones en la forma que indicaremos aquí.

La serie es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (\text{I.5})$$

Esta serie está definida si la suma correspondiente tiene un valor finito. En este caso, si $|x| < 1$. $|x|$ indica el valor absoluto de x .

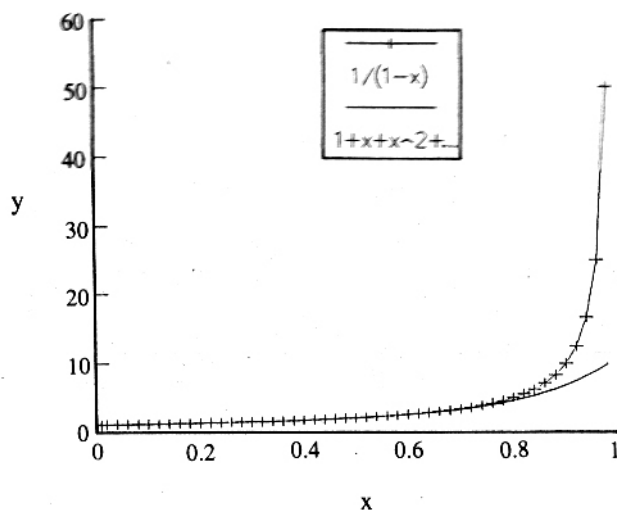


Figura I.2: Comparación entre la función $1/(1-x)$ (gráficada con +) y la aproximación polinomial, que incluye hasta potencias de orden 10 (línea continua). En la aproximación, se corta la serie infinita, manteniendo sólo los primeros términos.

Nota

Rigurosamente se debe escribir:

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{k=n} x^k \equiv \sum_{k=0}^n x^k$$

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=0}^n x^k)$$

S_n constituye una *sucesión* de números identificadas con n . El límite de esta sucesión para $n \rightarrow \infty$ (es decir para un n mayor que cualquier n que Ud. se pueda imaginar) se obtiene al verificar que a medida que n aumenta la suma se aproxima a un valor fijo que no depende de n . Este es el valor de S_∞ . Debe ser un valor finito, de otra manera, como ya se señaló, el resultado no tiene ningún significado matemático. Verifiquemos que para $|x| < 1$, la serie anterior, con todos sus términos incluidos, se puede escribir en forma analítica:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = 1/(1 - x). \quad (\text{I.6})$$

Hay muchas formas de obtener esta identidad. Podemos comprobar este resultado graficando con un computador las siguientes dos funciones (ver Figura ??) :

$$y(x) = 1/(1 - x), \quad y$$

$$S_{10} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{10}.$$

En todo caso esta no es una demostración. Podría suceder que la serie es divergente (es decir aumenta su valor) muy lentamente, y de este modo inducirnos a error. Para evitar esta posibilidad, demostraremos esta igualdad mediante el uso de métodos geométricos. Usaremos el triángulo rectángulo de la Figura ??

Se construye la siguiente estructura sobre el triángulo rectángulo: A partir del cateto más pequeño, que se toma de largo unitario (por definición, o si Ud. quiere, lo construye con dicho lado unitario) se construye un cuadrado perfecto. Con esto se genera un segmento (ver Figura) de largo r , a partir del cual se genera otro cuadrado de lado $r < 1$ como indica la Figura. Sucesivamente se construyen los cuadrados $r^2, r^3 \dots$ etc.

De la Figura , vemos que hay dos triángulos semejantes: $\triangle ADB \sim \triangle COA$, esto implica que existe una proporcionalidad entre sus lados correspondientes, que se indica a continuación

$$\frac{1}{(1 - r)} = \frac{(1 + r + r^2 + r^3 + \dots)}{1}.$$

Con este último paso completamos la demostración.

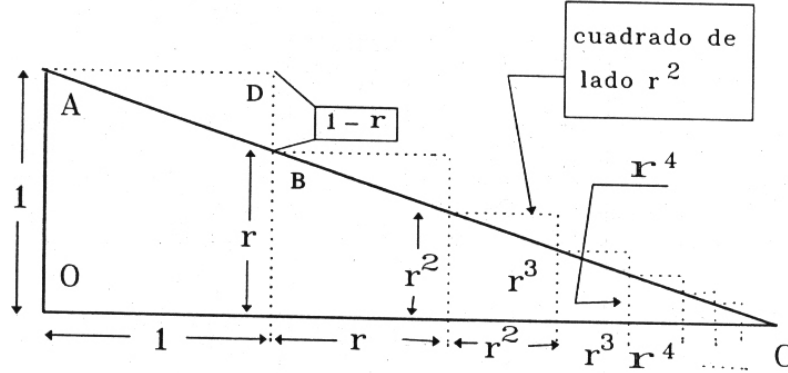


Figura I.3: La semejanza entre el $\triangle OAC$ y el $\triangle ADB$ permite demostrar la igualdad propuesta. A partir de OA, que hacemos unitario, se construye un cuadrado, este genera el segmento de longitud r , que genera otro cuadrado...

El valor que puede tomar $r < 1$ se puede elegir arbitrariamente. Basta comenzar con un cuadrado de lado unitario y dividir uno de los lados de tal forma que uno de los segmentos tenga una longitud r .

Si r es muy pequeño con respecto a 1, es decir $r \ll 1$ entonces

$$\frac{1}{1-r} \simeq (1+r), \quad (\text{I.7})$$

porque al multiplicar un número pequeño por sí mismo, se hace aún más pequeño. Comprobemos esto numéricamente: si $r = 10^{-3} = ,001$, entonces $r^2 = 10^{-3} \times 10^{-3} = 10^{-6} = ,000001$ y podemos ver que es realmente despreciable con respecto al primer término.

Esta última es una de las aproximaciones más frecuentes en el desarrollo de los problemas físicos.

Ejemplo

Dado un número real, arbitrario q , y un número entero N , se pide encontrar el valor de la siguiente suma:

$$S = \sum_{n=0}^N q^n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^N$$

A partir de la expresión encontrada aquí recuperar el resultado obtenido para la serie anterior.

Podemos encontrar el valor de S multiplicando ambos lados de la sumatoria por q ,

$$q \bullet S = S + q^{N+1} - 1,$$

despejando S de esta ecuación, tenemos

$$S = (1 - q^{N+1})/(1 - q) = 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^N. \quad (\text{I.8})$$

Hemos encontrado el valor de S sin necesidad de sumar cada uno de los términos de la serie. Este resultado es válido para todos los valores de $q \neq 1$. Supongamos que $|q| < 1$ y hagamos crecer el valor de N indefinidamente, es decir, tomemos el valor límite de $N \rightarrow \infty$. En otras palabras, damos a N un valor muy grande, mayor que cualquier otro que uno pueda imaginar. En este caso

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q^{N+1} = 0.$$

Este resultado se puede aceptar si uno medita acerca de lo que sucede si tomamos indefinidamente el producto de un número, menor que la unidad por sí mismo. Por ejemplo, no importa lo pequeño que sea el número (positivo) que Ud. pueda imaginar (llamémosle ϵ , para ser específico), uno siempre puede encontrar un valor de N suficientemente grande, que haga $q^{N+1} < \epsilon$. (Verifique esta afirmación con una calculadora.)

Así

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}, \quad (\text{I.9})$$

coincidiendo con lo demostrado anteriormente, usando sólo geometría.

Ejemplo

La fracción decimal periódica $0,317317317\dots$, representa un número *racional*.

a) Escriba este número como una suma infinita de términos.

b) Siendo un número racional, es posible escribirlo de la forma p/q . Usando el resultado de la parte a), encuentre el valor de p y q .

a) Primero notamos que este número, por ser una fracción decimal periódica, se puede escribir de la siguiente forma:

$$0,317317317\dots = 0,317 + 0,000317 + 0,000000317\dots$$

o de otra forma

$$0,317317317\dots = 0,317 + \frac{0,317}{10^3} + \frac{0,317}{10^6}\dots$$

$$0,317317317\dots = 0,317 \left\{ 1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots \right\}$$

$$0,317317317\dots = 0,317 \left\{ \frac{1}{1 - 10^{-3}} \right\}.$$

En la última línea, usamos el resultado obtenido en [??]. Para poder expresarla como la razón entre dos enteros debemos escribirla de la siguiente forma

$$0,317317317\dots = \frac{317}{10^3} \left\{ \frac{1}{1 - 10^{-3}} \right\}$$

$$0,317317317\dots = \left\{ \frac{317}{10^3 - 1} \right\} = 317/999. \square$$

Ejemplo

La serie que se incluye a continuación es divergente, a pesar que a simple vista no lo parece.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Usando un computador o una calculadora, encuentre el número mínimo de términos de la serie $\sum 1/n$ que debe sumar, para que su valor sea mayor que 3. (Respuesta: 11) $\square$

Ejemplo

Encuentre el valor de la siguiente suma para $n = 14$.

$$S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \overbrace{111111}^{n-\text{unos}}.$$

Indicación: Haga la suma de los tres primeros términos: $S_3 = 1 + 11 + 111 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 100$. En el caso general entonces será $S_n = n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 10 + \dots \square$.

Convergencia de una serie

(Esta sección se puede omitir. Se incluyen al final algunos problemas de convergencia que suponen conocida la materia de esta sección.)

¿Cómo sabemos que una suma infinita converge? (Es decir, que la suma de los infinitos términos que la componen, da como resultado un número finito).

Este es un problema difícil, y aquí sólo daremos una **receta** que será de utilidad en muchas ocasiones, pero no estudiaremos más a fondo el tema porque nos interesan principalmente aquellas series que tienen un límite.

El criterio de convergencia que usaremos es el siguiente: Tome el término a_{n+1} y a_n de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots,$$

ahora, para valores grandes de n , calcule la razón:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Si no consideramos los términos proporcionales a $1/n^2$, o más pequeños, y la fracción a_{n+1}/a_n adopta la siguiente expresión

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(1 - \frac{s}{n} \right), \quad (\text{I.10})$$

entonces afirmamos que **la serie converge en valor absoluto si $s > 1$** . (Converge absolutamente, puesto que tomamos el valor absoluto de (a_{n+1}/a_n) .)

La frase "no consideramos los términos proporcionales a $1/n^2$ y más pequeños", indica que en el resultado uno ignora (no escribe) todos los términos que son más pequeños o iguales en valor a $1/n^2$.

Ejemplo

Estudiemos la siguiente serie, que resulta ser divergente:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots,$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\begin{aligned} a_{n+1}/a_n &= n/(n+1) = (n+1-1)/(n+1), \\ &= 1 - 1/(n+1) \end{aligned}$$

Si n es un número muy grande entonces $n \sim (n+1)$.

$$a_{n+1}/a_n \sim (1 - 1/n)$$

De acuerdo al criterio mostrado, $s = 1$ y para que la serie converja s debe ser **mayor** que la unidad, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n$$

no converge. Esto indica que al sumar un número suficientemente grande de términos de la serie podemos obtener como resultado un número tan grande como uno pueda imaginar.

Ejercicio

Calcule $1/110,847$ y $1/110,846$. Si la calculadora es capaz de distinguir entre ellos, inténtelo con un denominador mayor, hasta encontrar el límite en el cual no puede distinguir entre números consecutivos.

$$1/(n+1) \sim 1/n$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)} &= \frac{1}{[n(1+1/n)]} = \frac{1}{n} \bullet \frac{1}{[1+1/n]} \\ &\simeq \frac{1}{n} \bullet [1 - \frac{1}{n}] \simeq 1/n + O(1/n^2) \end{aligned}$$

En la última línea hemos usado la aproximación demostrada anteriormente. La expresión $O(1/n^2)$ indica en palabras que $1/(n+1)$ es igual a $1/n$ con un error del orden de $1/n^2$.

I.3. LAS SERIES MAS USADAS.

I.3.1. El binomio y el número e.

Una de las series que se presenta frecuentemente, es el desarrollo de de un binomio. La potencia enésima de un binomio es:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-\alpha)!} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned}\tag{I.11}$$

La expresión que aparece en esta última línea es una forma compacta para representar la fórmula del binomio y contiene la expresión $n!$ *n factorial* que será definida a continuación. Conviene desarrollar esta suma para los casos más conocidos como una forma de familiarizarse con su significado.

- Esta serie tiene sólo $n+1$ términos **si** n es un entero. En este caso la suma termina cuando $\alpha = n$. Si n no es un entero, la suma prosigue hasta infinito.
- Corresponde al desarrollo usual del cuadrado de un binomio si $n = 2$, al cubo de un binomio si $n = 3$...
- Aquí sólo consideraremos el caso $n > 0$.
- $3!$, se lee: tres factorial y es una denominación para el siguiente producto:

$$\begin{aligned}3! &\equiv 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ 1! &\equiv 1, \\ 0! &\equiv 1 \text{ (por definición).}\end{aligned}$$

En general

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.\tag{I.12}$$

$n!$ es un número que crece rápidamente. Compruébelo calculando $10!$ en un computador.

Probablemente la serie más célebre es la siguiente:

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\tag{I.13}$$

Donde la letra **e** define, por convención, al número irracional $e = 2,71828\dots$. El valor de **e** se obtiene de la serie anterior si ponemos $x = 1$:

$$e^1 \equiv e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,71828\dots \quad (\text{I.14})$$

Esta serie obedece las mismas propiedades que las potencias en una base cualquiera, a^x y precisamente por esa razón se define de esa forma. Por ejemplo:

$$a^m \bullet a^n = a^{m+n}, \quad \text{también} \quad e^0 = 1.$$

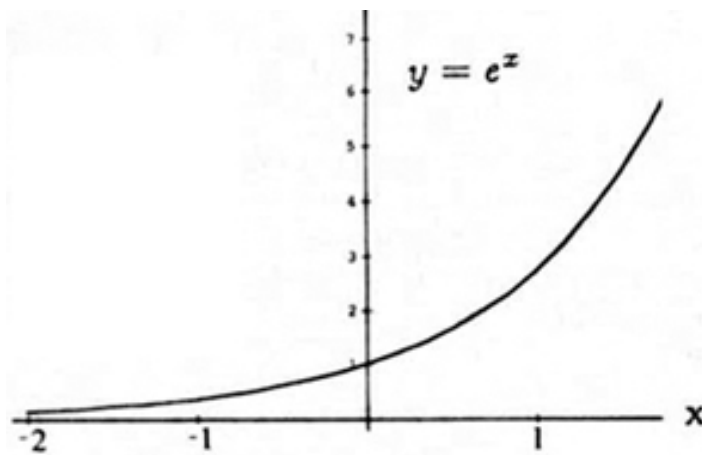


Figura I.4: Gráfico de la función $y = e^x$. La función exponencial es positiva para todos los valores de x , y toma el valor $y = 1$, para $x = 0$.

Ejercicio

Calcule los dos decimales siguientes en la expresión de $e = 2,7182\dots$. Grafique la función $y = e^x$

Nota

Calcular los dos decimales siguientes quiere decir que al aumentar el número de términos de la serie incluidos en el cálculo, el valor de los seis primeros decimales no se altera.

- $y = e^x$ es una función positiva a lo largo de todo el eje x .

- También se denomina exponencial de x .
- $f(x) \equiv$ función de x . A un valor determinado de x , $f(x)$ le asocia un número real, si la función es real. Es equivalente a una tabla de valores de dos columnas, o a la información contenida en un gráfico.

Ejemplo

Dados los números reales $a_1, a_2, \dots, a_n$ todos ellos positivos, y dada la suma $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, pruebe que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq 1 + \frac{S_n}{1!} + \frac{S_n^2}{2!} + \dots + \frac{S_n^n}{n!}. \square$$

Comparando la serie a la derecha de la desigualdad con la serie definida como e^x , vemos que son idénticas salvo que debemos reemplazar x por S_n . Esto es correcto, puesto que S_n es un número real tal como lo es x . Entonces

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq e^{S_n},$$

a continuación escribimos explícitamente S_n : $e^{S_n} = e^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ y usando la siguiente propiedad del número e : $e^{x+y} = e^x e^y$, la expresión anterior se transforma en

$$e^{S_n} = e^{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n} = e^{(a_1 + \dots + a_{n-1})} e^{a_n} = \dots = e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n}.$$

Ahora procedemos a deshacer el camino; recordando la definición de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ y que todos los a_i son positivos para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $e^{a_i} \geq (1 + a_i)$ puesto que le hemos restado solamente números positivos al desarrollo en serie (como $a_i^2/2!$ por ejemplo, que, entre muchos otros, falta en la serie). Reemplazando este resultado en $e^{S_n} = e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n}$, se obtiene el resultado pedido. $\square$

I.3.2. Números complejos.

Hay otra serie que nosotros usaremos más adelante para encontrar algunas relaciones trigonométricas. Antes de mostrarla necesitamos recordar las propiedades básicas de los números complejos.

Por **definición** i es el número cuyo cuadrado es -1 . Se denomina i (por imaginario), y cumple con la condición $i^2 = -1$. En general un número complejo es aquel que tiene dos componentes, una real y otra imaginaria que se caracteriza por estar multiplicada por i . Se escribe como $z = a + ib$, donde a y b son números reales. Para multiplicar estos números se opera **igual** que con los reales. Por ejemplo:

$$\begin{array}{l} z_1 * z_2 \\ z_1 = a + i * b \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{donde} \\ \text{y } z_2 = c + i * d, \end{array}$$

con a, b, c y d reales. En este caso se opera como en una multiplicación de dos binomios, pero teniendo presente las propiedades del número i que se resumen a continuación:

$$\begin{array}{l} i = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = +1 \\ i^5 = i \\ \vdots \\ \dots \end{array} \quad (\text{I.15})$$

El resultado de la multiplicación es

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (a + i * b)(c + i * d) \\ &= ac + i * ad + i * bc + i * b * i * d \\ &= (ac - bd) + i * (ad + bc). \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Lo expuesto es lo mínimo que necesitamos saber para operar con estos números.

Otro número irracional es $\pi = 3,141592\dots$. Estos números, e y π , se pueden combinar en forma sorprendente. Nos referimos al siguiente resultado que se obtiene extendiendo la definición inicial que dimos de e^x . Aquí formalmente reemplazamos x por un número imaginario puro $i\pi$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= -1 \\ e^{i\pi} &= 1 + \frac{(i\pi)}{1!} + \frac{(i\pi)^2}{2!} + \frac{(i\pi)^3}{3!} + \frac{(i\pi)^4}{4!} + \dots \\ e^{i\pi} &= 1 + i\pi - \frac{\pi^2}{2!} - i\frac{(\pi)^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} + i\frac{\pi^5}{5!} + \dots \\ &= (1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} \pm \dots) + \\ &\quad i(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} \pm \dots) \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Lo que hicimos fue reemplazar x en los términos de la serie definida por el "sobrenombre" e^x por $i\pi$ y desarrollar cada uno de los términos usando las propiedades de i enumeradas

arriba. El valor obtenido es -1 . Este resultado podemos comprobarlo en forma numérica para convencernos que es correcto. Esta es una de las ventajas del computador. Una tarea muy tediosa como sumar, por ejemplo, 70 términos de la serie anterior, se puede hacer rápidamente usando el mismo programa que el utilizado en la serie $1/(1-x)$.

Ejercicio

Sumar un cierto número de términos de cada una de las series desarrolladas arriba y comprobar que –dada una cierta precisión, por ejemplo una parte en 10^6 –, se cumple efectivamente que $e^{i\pi} = -1$. $\square$

NOTA

Primero debe decidir acerca del número de decimales con los que se propone verificar dicha igualdad, por ejemplo: tres decimales, es decir 3,142. Después, procede a sumar los términos de la serie hasta que las cifras significativas que uno se ha fijado –tres en este caso– no se alteren al sumar los términos siguientes de la serie. $\square$

Otra serie famosa, se obtiene al introducir un número complejo puro (es decir que tiene sólo una componente imaginaria) como exponente en **e**. Este número lo escribimos como $i \cdot x$, donde x es un número real arbitrario. La serie queda ahora :

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\
 e^{ix} &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{(x)^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \\
 &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots) + \\
 &\quad i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots) \\
 e^{ix} &\equiv \cos x + i \sin x,
 \end{aligned} \tag{I.18}$$

En esta expresión, $\cos x$ y $\sin x$ constituyen un **apodo** para cada una (la parte real y la parte imaginaria) de las series infinitas que se obtuvieron. La idea de asociar un nombre con una serie es una forma de resaltar las propiedades de la serie. Si una serie no tiene propiedades especiales, entonces no recibe un nombre.

Cada una de las series anteriores tiene propiedades espectaculares y por esta razón reciben un nombre que las distingue entre cualquier otra. Las propiedades de estas últimas dos series se pueden obtener geoméricamente. Son, de hecho, las funciones **seno** y **coseno** que uno define en Trigonometría utilizando un triángulo rectángulo. Este es el tema de la siguiente sección.

La definición de cada una de estas series a partir de la separación en parte real e imaginaria es:

$$\cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots \quad (\text{I.20})$$

$$\sin x \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots \quad (\text{I.21})$$

Esta serie es la que debería evaluar internamente una calculadora para obtener el valor del seno de un ángulo. Sin embargo, para mejorar su rapidez, *las calculadoras evalúan esta serie mediante una aproximación*, la aproximación de Padè, que es un cociente de polinomios *finitos* que aproximan esta función (y otras) con la precisión que uno desee.

El cálculo numérico es, en cierto sentido, un arte.

I.4. TRIGONOMETRIA.

I.4.1. Unidades angulares: grados y radianes.

Comenzamos con la definición de las unidades angulares más conocidas: grados ($^{\circ}$), minutos ($'$) y segundos ($''$).

Estas unidades son *sexagesimales*; cada unidad contiene 60 subunidades, por ejemplo: 1 minuto contiene 60 segundos. El sistema establecido en las mediciones de longitud es *decimal*, 1 metro contiene 10 decímetros, un decímetro 10 centímetros,...

El sistema sexagesimal nació en Babilonia, donde se usó en las mediciones astronómicas que, en ese tiempo, consistían en determinar las posiciones de los planetas y estrellas más brillantes con el objeto de establecer un calendario y predecir eclipses, entre otros fines.

Los grados, minutos, segundos están definidos a partir de una división en partes iguales, de la longitud de una circunferencia.

Las equivalencias son las siguientes:

360°	$\equiv$	un giro completo alrededor de una circunferencia.
180°	$\equiv$	$1/2$ vuelta alrededor de una circunferencia.
90°	$\equiv$	$1/4$ de vuelta alrededor de una circunferencia.
45°	$\equiv$	$1/8$ de vuelta alrededor de una circunferencia.
1°	$\equiv$	$1/360$ de vuelta alrededor de una circunferencia.
1°	$\equiv$	$60'$, sesenta minutos.
$1'$	$\equiv$	$1/216,000$ de vuelta alrededor de una circunferencia.
$1''$	$=$	$1/60$ de un minuto.
$1''$	$\equiv$	$1/12,960,000$ de vuelta alrededor de una circunferencia.

En toda definición de unidades, existe un grado de arbitrariedad. En física, la usamos para redefinir esta unidad con una orientación geométrica, acorde con nuestros intereses.

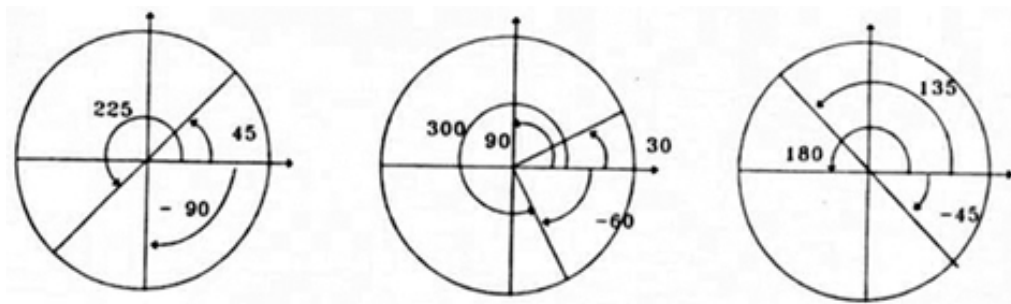


Figura I.5: En la Figura se muestra la medida de diversos ángulos como 180° , 90° , 45° , y otros. Se define además, el sentido positivo y negativo de un ángulo.

El nombre de esta nueva unidad angular, que definimos a continuación, es **radián**.

Definición de Radián

*La magnitud de un ángulo medido en **radianes** está dada por la longitud del arco de circunferencia que subtiende, dividida por el valor del radio de la circunferencia.*

Esta definición de **radián** es independiente del radio de la circunferencia. (Si divide una pizza en diez partes iguales, el ángulo central que subtiende cada pedazo es el mismo, cualquiera sea el tamaño de la pizza).

La longitud de la circunferencia de un círculo unitario es $(2\pi \cdot 1)$. De acuerdo a la definición anterior, el ángulo central que subtiende dicho arco es 2π radianes.

Esta nueva definición tiene una gran ventaja: al multiplicar el ángulo central (medido en radianes) por el radio de la circunferencia, automáticamente se obtiene la longitud del arco subtendido por dicho ángulo.

Longitud del arco de $\odot = [\text{Angulo subtendido (en radianes)}] \times [\text{Radio de la } \odot]$.

Si medimos el ángulo subtendido en grados, no obtendremos una igualdad: el largo de una circunferencia es $2\pi r$ y el ángulo central que subtiende toda la circunferencia es 360° . Este ejemplo define la nueva unidad angular que denominamos radián:

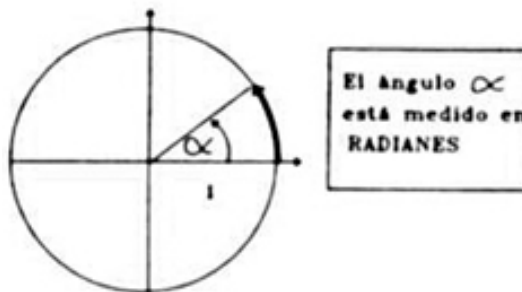
$$360^\circ = 2\pi = 6,28318\dots \quad \text{radianes.}$$

La equivalencia con los grados es:

$$1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,29^\circ,$$

a partir de esta equivalencia podemos obtener las siguientes relaciones:

90° equivalen a $(\pi/2)$ radianes,
 45° equivalen a $(\pi/4)$ radianes,
 30° equivalen a $(\pi/6)$ radianes,
 60° equivalen a $(\pi/3)$ radianes.



Esta unidad angular es la más **usada en física**.

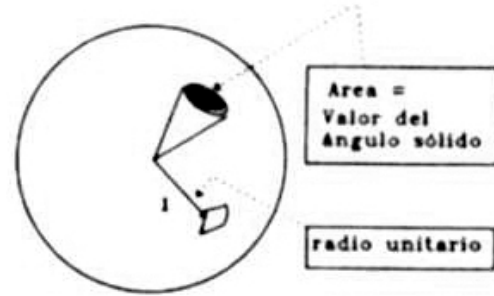
Ejercicio

Encuentre, numéricamente, el valor de $\text{sen } \alpha$ para $\alpha = 0,05$ radianes, de acuerdo a la serie definida con este nombre en la sección anterior. ¿Cuál es el valor de α en grados? ¿Cuál es el error cometido al aproximar $\text{sen } \alpha \approx \alpha$? (Sume tres términos de la serie y compare la diferencia).□

I.4.2. Ángulo sólido.

Podemos ahora definir un **ángulo sólido** como una extensión natural de la definición anterior. Si allí usamos una circunferencia, ahora recurrimos a una esfera. Para obtener directamente el valor del ángulo sólido, usamos una **esfera de radio unitario**.

Si sombreamos un disco en la superficie de la esfera de la Figura y dibujamos, desde el centro de la esfera el cono que subtiende a dicho disco, la apertura del vértice de este cono se denomina **ÁNGULO SÓLIDO**. Este ángulo sólido se mide entonces por el **área** recortada sobre la esfera de radio unitario, por el cono con vértice en su centro.



Como la superficie de una esfera es $4\pi r^2$, el máximo valor que puede tomar un ángulo sólido en la esfera de radio unitario es 4π

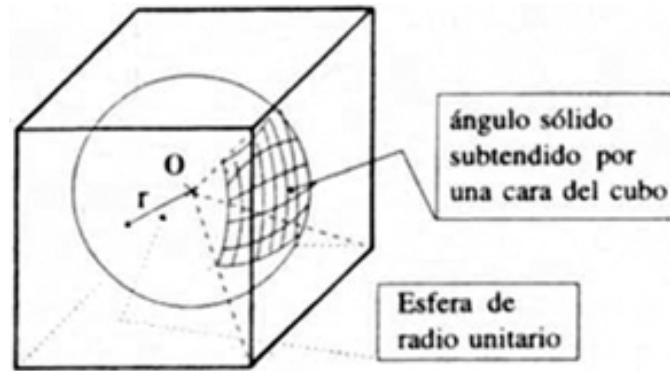


Figura I.6: Ángulo sólido subtendido por una de las caras de un cubo con respecto al centro del mismo. La esfera tiene radio unitario.

Ejemplo

Calcular el ángulo **sólido** que subtiende **una** de las caras de un cubo mirado desde el centro del cubo.

Si dibujamos una esfera de radio unitario cuyo centro coincida con el centro del cubo podemos deducir inmediatamente el valor del ángulo sólido.

El razonamiento es el siguiente: La esfera completa y centrada subtiende las seis caras del cubo y por lo tanto le corresponde un ángulo sólido de 4π .

A la fracción de la superficie de la esfera que subtiende una cara del cubo, le corresponde un ángulo sólido de $\frac{4\pi}{6} = 2\pi/3$. En otras palabras, los rayos de luz que nacen en

el centro de la esfera y que atraviesan la cara del cubo, proyectan sobre la esfera una superficie igual a $\frac{4\pi}{6}$.

NOTA

Al definir el ángulo sólido subtendido por una superficie, **SIEMPRE** debemos especificar la posición del centro de la esfera con respecto a la cual se midió.

Ejemplo

Calcular el ángulo sólido que subtiende un cubo, medido desde un punto ubicado justo en el centro de una de sus caras (ver Figura [??]).

(Respuesta: 2π).

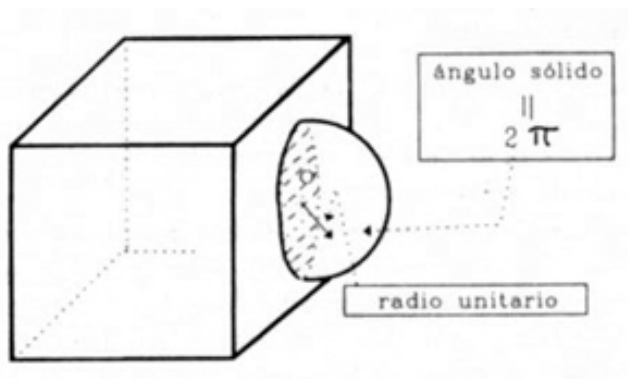


Figura I.7: Al dibujar la esfera con centro en el punto de simetría de las caras, vemos que el ángulo sólido subtendido (área de la esfera) es la mitad de la superficie total de la esfera.

I.4.3. Funciones seno y coseno: definición geométrica.

El $\triangle OBA$ es un triángulo **rectángulo**. En él definiremos las funciones seno y coseno.

Seno y Coseno de un ángulo

En un triángulo rectángulo $\text{sen } \alpha$ es la razón entre el **cateto opuesto** al ángulo α y la hipotenusa.

Coseno de α , ($\text{cos } \alpha$) es la razón entre el **cateto adyacente** al ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo en la figura ??.

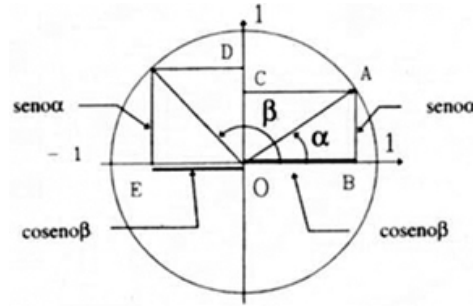


Figura I.8: El valor de $\text{sen } \alpha$ está dado por la proyección del vector OA sobre el eje vertical y el valor del coseno es la proyección sobre el eje horizontal. El radio de la circunferencia es la unidad

Al igual que los casos anteriores es conveniente referir las medidas a una circunferencia de radio unitario. Como en este caso la hipotenusa es la unidad, el valor del coseno está dado directamente por la magnitud del cateto adyacente al ángulo y el seno por la magnitud del cateto opuesto. Las propiedades encontradas para este triángulo serán válidas también para la familia de triángulos semejantes a él.

Definición

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &\equiv \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|, & |OA| &= 1, \\ \text{cos } \alpha &\equiv \frac{|OB|}{|OA|} = |OB|, & |OA| &= 1. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

A continuación se incluyen algunos valores de estas funciones que debemos *recordar*:

$$\begin{aligned} \text{sen } 0^\circ &= 0, & \cos 0^\circ &= 1, \\ \text{sen } 90^\circ &= 1, & \cos 90^\circ &= 0, \\ \text{sen } 45^\circ &= 1/\sqrt{2}, & \cos 45^\circ &= 1/\sqrt{2}, \\ \text{sen } 30^\circ &= 1/2, & \cos 30^\circ &= \sqrt{3}/2, \\ \text{sen } 60^\circ &= \sqrt{3}/2, & \cos 60^\circ &= 1/2, \end{aligned}$$

Propiedades de estas funciones

1.– Como en un triángulo rectángulo se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, y en el triángulo de la Figura ??, $a = \operatorname{sen} \alpha$, $b = \cos \alpha$ y $c = 1$, entonces

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \quad (\text{I.23})$$

para **cualquier ángulo** α .

(Por convención $(\operatorname{sen} \alpha)^2 \equiv \operatorname{sen}^2 \alpha$.)

Esta igualdad se puede comprobar con la lista de valores para el seno y el coseno que se incluyó más arriba.

2.– De la circunferencia de radio unitario se obtiene que,

$$\operatorname{sen} \alpha = |AB| \equiv |OC| \quad (\text{puesto que } CA \parallel OB),$$

$$\text{al mismo tiempo, } |OC| = \frac{|OC|}{|OA|} \equiv \cos(90 - \alpha),$$

de acuerdo a la definición de coseno. De aquí tenemos:

$$\cos(90 - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha. \quad (\text{I.24})$$

Esta igualdad se puede verificar con los valores que aparecen en la lista de funciones seno y coseno incluídas anteriormente.

3.– Otra propiedad que escribimos a continuación, sin acompañar una demostración es

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha. \quad (\text{I.25})$$

Ejercicio

Usando la misma figura demuestre:

$$\operatorname{sen}(90 - \alpha) = \cos \alpha, \quad \operatorname{sen}(180^\circ) = 0, \quad \cos(180^\circ) = -1,$$

$$\operatorname{sen}(270^\circ) = -1, \quad \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}(-30^\circ) = -1/2.$$

Definición

La rotación de los punteros del reloj se define como SENTIDO NEGATIVO. Obviamente el SENTIDO POSITIVO es el opuesto y se indica en la Figura.

**Ejemplo**

Desde un punto P de un lado de un triángulo equilátero de lado a , se trazan dos perpendiculares a los lados. Los valores m y n son datos (valores conocidos). Encontrar el valor del área del triángulo en función de m y n . (Ver Figura).

Solución:

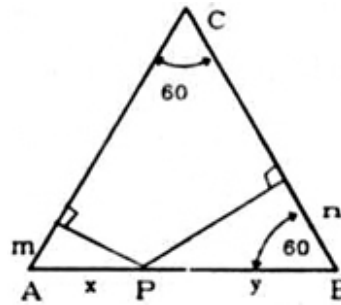
Defino $x = AP$, $y = PB$ con $x + y = a$.

$$x \cos 60^\circ = m$$

$$y \cos 60^\circ = n$$

$$m/x = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$n/y = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$



Recordar que el valor de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$ son, *respectivamente* menores o iguales que la unidad, siempre.

De las igualdades anteriores y observando además la relación entre la altura y el lado a en un triángulo equilátero obtenemos:

$$x = 2m, \quad y = 2n, \quad \text{por lo tanto} \quad a = 2(m + n).$$

El área de un triángulo es $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2} \times a \times a\sqrt{3}/2$, porque $h = a \times \cos 30^\circ = a\sqrt{3}/2$.

De esta forma, el área resulta ser

$$\text{Area} = \sqrt{3}(m + n)^2.$$

Ejercicio

Resuelva el problema anterior usando semejanza de triángulos (Ver Figura).

Indicación: En la figura se observa la relación entre la altura EB y el tramo MD que determina el trazo m . Aquí sólo se usa semejanza de triángulos.

$$\triangle AMD \simeq \triangle ABE$$

$$\frac{AE}{m} = \frac{AB}{AM}$$

$$a/(2m) = a/x \quad \text{ó} \quad x/m = 2$$

Análogamente $y/n = 2$ y el resto prosigue en la misma forma que la demostración anterior.

Suma y Resta de Funciones Trigonómicas

Repasemos algunas igualdades,

$\text{sen}(180 - \alpha) = \text{sen } \alpha$ (como se puede demostrar a partir de la figura).

$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$.

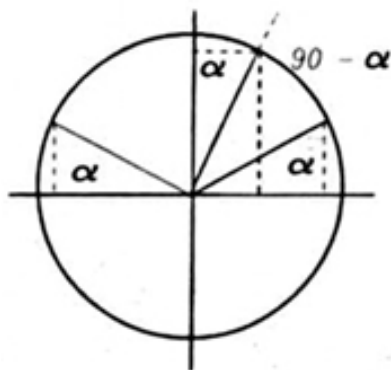


Figura I.9: De la Figura se desprende que $\text{sen}(180 - \alpha) = \text{sen } \alpha$, y otras igualdades trigonométricas citadas anteriormente en el texto.

Del triángulo de la Figura ??, después de un cálculo tedioso, se obtiene la igualdad

siguiente:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta. \quad (\text{I.26})$$

Usando el $\triangle ABC$ de la Figura ??, y comenzando por el segundo miembro de la igualdad anterior, podemos demostrar esta identidad trigonométrica.

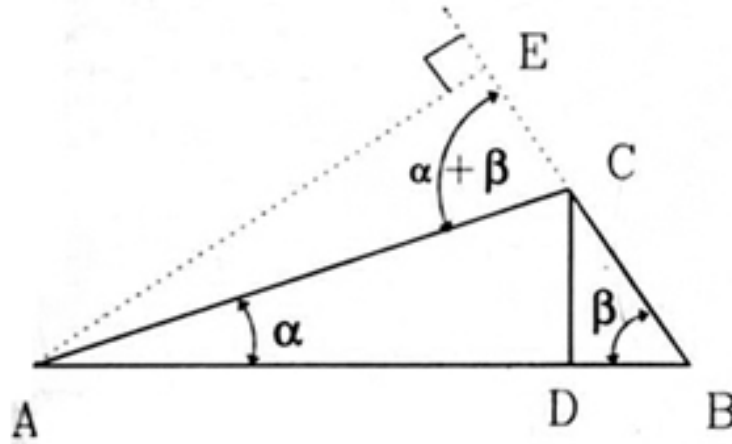


Figura I.10: Triángulo $\triangle ABC$ usado para encontrar geoméricamente el valor de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ en función de senos y cosenos de los ángulos α y β .

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \beta \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{|AC| \bullet |BC|} [|AD| \bullet |CD| + |BD| \bullet |CD|]$$

pero, los dos productos que aparecen entre corchetes son formas equivalentes de calcular el área de este triángulo:

$$|AD| \bullet |CD| = 2 \times \text{área del } \triangle ADC,$$

$$|BD| \bullet |CD| = 2 \times \text{área del } \triangle BCD$$

Reemplazando este resultado en la expresión original

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \beta \operatorname{sen} \alpha = 2 \times (\text{área del } \triangle ABC) / [|AC| \bullet |BC|],$$

ahora recordando que el área del triángulo se puede escribir como

$$\frac{1}{2} |AE| \bullet |BC|, \text{ obtenemos}$$

$$= 2 \frac{1}{2} |AE| \bullet |BC| / |AC| \bullet |BC| = AE/AC \equiv \text{sen}(\alpha + \beta).$$

Esta demostración constituye un buen ejercicio para practicar las definiciones de seno y coseno. El resultado obtenido es muy importante y será usado con bastante frecuencia a continuación.

Otra igualdad trigonométrica tan usada como la anterior es

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta. \quad (\text{I.27})$$

No intentaremos demostrar esta expresión usando geometría. Recurriremos esta vez a la definición $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \text{sen} \alpha$, dada anteriormente. Es, sin duda, más abstracta pero mucho más elegante y útil; *todas las igualdades trigonométricas se pueden obtener manipulando esta expresión*. Su desventaja es sin duda, la poca familiaridad que, a este nivel de conocimientos, se tiene con ella.

Ejercicio

Encontrar el valor de $e^{i(\alpha+\beta)}$ y demostrar que contiene las igualdades descritas anteriormente

Indicación

Primero, recordemos cómo se multiplican números complejos.

$$Z_1 = a + ib,$$

$$Z_2 = x + iy, \quad i^2 = -1$$

$$Z_1 \bullet Z_2 \equiv (a + ib) \bullet (x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$$

Se multiplican como un par de binomios, separando la parte real de la imaginaria (aquella que contiene “i” como factor común).

Con los números reales sabemos que se cumple la siguiente igualdad

$$a^x \bullet a^y = a^{(x+y)}. \quad (\text{I.28})$$

Con los números complejos y en especial con $e^{i\alpha}$ se opera de la misma forma.

$$e^{i\alpha} \bullet e^{i\beta} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \quad (\text{I.29})$$

En seguida, se debe reemplazar en la izquierda y derecha de la última expresión sus respectivas definiciones $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \text{sen} \alpha$,

$$e^{i\alpha+i\beta} \equiv \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta),$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} \equiv e^{i\alpha} \bullet e^{i\beta} = (\cos \alpha + i\sin \alpha) \bullet (\cos \beta + i\sin \beta),$$

efectuando el producto indicado en la última igualdad, siempre respetando las reglas de multiplicación de números complejos, se obtiene

$$\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) =$$

$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta),$$

igualando la parte real del lado izquierdo de la ecuación con la parte real de la derecha de la ecuación, obtenemos una de las identidades buscadas. La misma operación se repite para la parte imaginaria y aparece otro de los resultados obtenidos anteriormente en forma geométrica. $\square$

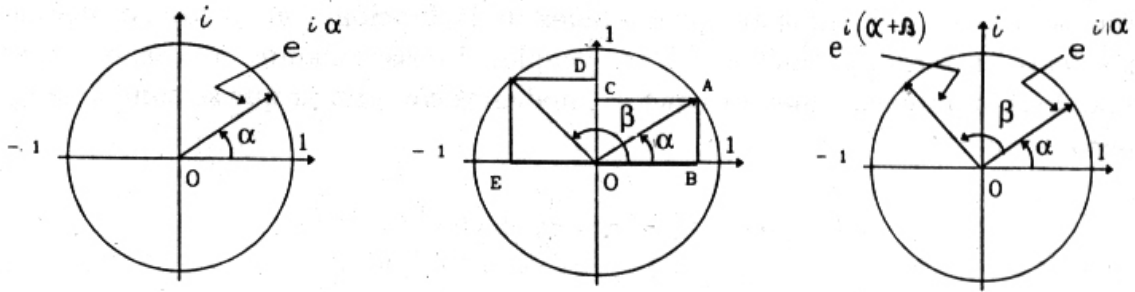


Figura I.11: A la izquierda se muestra el vector $e^{i\alpha}$. En el disco de la derecha se grafica $e^{i(\alpha+\beta)}$. El sumar un ángulo al vector anterior, sin cambiar su módulo, es equivalente a rotarlo en el ángulo β

Ejercicio

Demostrar que

$$e^{i\alpha} \bullet e^{-i\alpha} = e^{i\alpha-i\alpha} = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Nota: Use la definición de $e^{i\alpha}$ y la siguiente propiedad de las funciones trigonométricas: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ y $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Esta propiedad es válida para todo ángulo α .

$\square$

Es importante recordar que en la definición de las series

$$\operatorname{sen} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} \pm \dots$$

$$\operatorname{cos} \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} \pm \dots$$

el ángulo, **siempre debe ser expresado en radianes**.

Estas series tienen las mismas propiedades deducidas anteriormente en forma geométrica. Por ejemplo, si desarrollamos la serie del seno y coseno conservando sólo potencias menores que α^6 , podemos comprobar que se cumple la igualdad $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$. Veamos

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 = \alpha^2 - 2\frac{\alpha^4}{3!} + O(\alpha^6),$$

$$(\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{2!2!} + 2\frac{\alpha^4}{4!} + O(\alpha^6),$$

$$(\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{3},$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 + 0 + O(\alpha^6).$$

Note que en la serie resultante, cada una de las potencias de α debe anularse en forma independiente, porque la igualdad anterior es válida para todo valor del ángulo α .

El símbolo $O(\alpha^6)$ indica que hemos ignorado las potencias iguales o superiores a α^6 .

Ejercicio

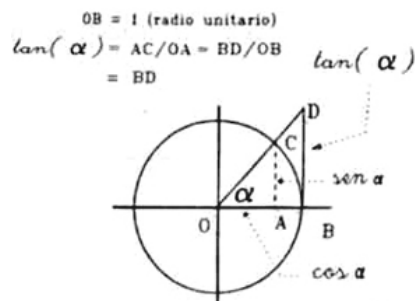
Demostrar que los términos que contienen las potencias de α^6 , también se anulan en la expresión de $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$.

I.4.4. La Función tangente.

La **tangente** de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el adyacente en un triángulo rectángulo.

$$\tan \alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad (\text{I.30})$$

La función tangente, a diferencia de las funciones seno y coseno, puede tomar cualquier valor entre $+\infty$ y $-\infty$.



Algunos valores que aparecen frecuentemente se tabulan a continuación:

$$\begin{array}{ll}
 \tan(\pi/2) & = +\infty, \\
 \tan 0 & = 0, \\
 \tan(-\pi/2) & = -\infty, \\
 \tan(\pi/4) = \tan 45^\circ & = 1, \\
 \tan(\pi/3) = \tan 60^\circ & = \sqrt{3}, \\
 \tan(\pi/6) = \tan 30^\circ & = 1/\sqrt{3}, \\
 \tan(-\pi/3) = \tan -60^\circ & = -\sqrt{3}
 \end{array}$$

Ejercicio

Demostrar que

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \bullet \tan \beta}. \quad \square$$

Al conjunto de las funciones trigonométricas ya definidas le podemos sumar el inverso multiplicativo de cada una de ellas. Esto es análogo al caso de los números reales: por cada número real (o complejo) distinto de cero, existe un inverso ($x \in \mathfrak{R}, x \neq 0$)

$$x \bullet \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \bullet x.$$

$$\cotan \alpha \bullet \tan \alpha = 1, \quad \cotan \alpha \equiv \text{cotangente de } \alpha = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{BD} \quad (\text{I.31})$$

$$\sen \alpha \bullet \csc \alpha = 1, \quad \csc \alpha = \frac{AC}{CB},$$

$$\cos \alpha \bullet \sec \alpha = 1, \quad \sec \alpha = \frac{AC}{AB}, \quad (\text{I.32})$$

$$\csc \alpha \equiv \text{cosecante de } \alpha,$$

$$\sec \alpha \equiv \text{secante de } \alpha.$$

IMPORTANTE

Las siguientes *aproximaciones* son usadas con mucha frecuencia en física.

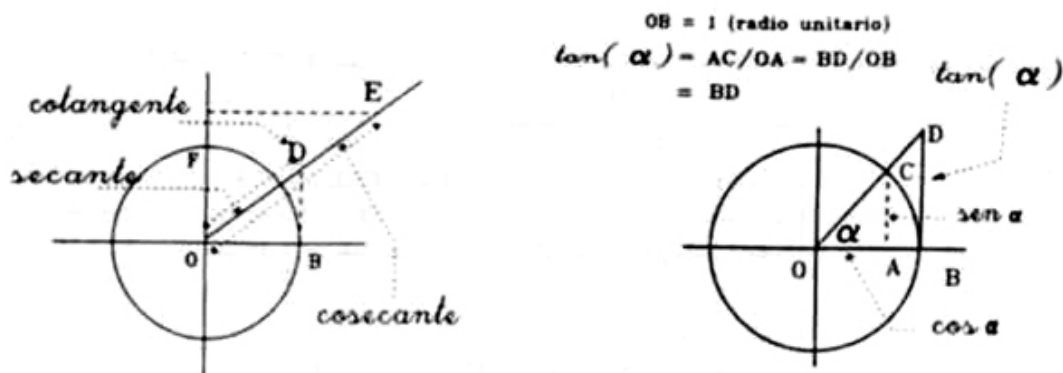


Figura I.12: Resumen de las definiciones geométricas de las funciones: cotangente, cosecante y secante. La circunferencia tiene radio unitario.

Si α es muy pequeño ($\alpha \ll 1$), se cumple que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \alpha &\simeq \alpha + O(\alpha^3) \\
 \cos \alpha &\simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \\
 \tan \alpha = \operatorname{sen} \alpha / \cos \alpha &\simeq \alpha / (1 - \alpha^2) \simeq \alpha(1 + \alpha^2) \\
 &\simeq \alpha + O(\alpha^3)
 \end{aligned}
 \tag{I.33}$$

entonces, a primer orden en α , (es decir: despreciando todas las potencias de α superiores a 1), se cumple:

$$\tan \alpha \simeq \operatorname{sen} \alpha \simeq \alpha. \quad \square \tag{I.34}$$

El ángulo α debe ser medido en radianes para que estas aproximaciones sean válidas.

Ejercicio

Usando estos resultados, desarrolle $\tan \alpha$ en serie de potencias en α . Encuentre sólo los dos primeros términos de este desarrollo.

Respuesta: $\tan \alpha \simeq \alpha + \alpha^3/3$.

I.4.5. Teorema del seno

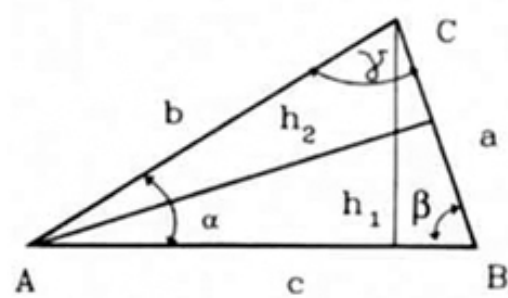
Usando sólo geometría podemos encontrar una relación entre el seno de un ángulo interior de un triángulo y la longitud del lado que lo enfrenta. Esta relación es el teorema del seno.

$$h_1 = b \operatorname{sen} \alpha \quad h_1 = a \operatorname{sen} \beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$h_2 = c \operatorname{sen} \beta \quad h_2 = b \operatorname{sen} \gamma$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$



De aquí se obtiene *el teorema del seno*:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}. \quad (\text{I.35})$$

I.4.6. Teorema del coseno.

Usando el Teorema de Pitágoras en la misma Figura anterior, se deduce que:

$$h_2^2 = b^2 - x^2, \quad h_2^2 = c^2 - y^2,$$

$$b^2 - x^2 = c^2 - y^2, \quad y = a - x,$$

$$\text{expresando y en función de } x: \quad b^2 = c^2 - a^2 + 2ax,$$

$$\text{pero: } x = b \cos \gamma,$$

introduciendo este término en la última igualdad, obtenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (\text{I.36})$$

Ejercicio

Demostrar que

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\
 b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.
 \end{aligned}
 \tag{I.37}$$

Ejercicio

Descubra una regla nemotécnica que le permita recordar las fórmulas anteriores.

I.5. AREA ENCERRADA POR UNA CURVA

Más adelante es preciso evaluar el área encerrada bajo una curva y allí haremos uso de algunas de las sumas introducidas aquí.

Esta operación de evaluar el área bajo una curva, es lo que en cálculo se denomina *integrar una función*.

Cabe notar que aun en los casos más simples se realiza este tipo de cálculo —evaluar el área bajo una curva—, pero sin necesidad de recurrir a las sumatorias (o a la integral, si uno tiene conocimientos de cálculo infinitesimal). Por ejemplo, en el movimiento de una partícula con aceleración uniforme, es necesario calcular el área encerrada bajo la curva velocidad vs. tiempo, si desea conocer el camino recorrido por esta partícula. Aquí la *curva* es una recta y el valor del área encerrada corresponde al área de un trapecio, cuya fórmula es conocida.

Para una partícula que soporta una aceleración variable, la curva es más complicada y, necesariamente, debemos recurrir a un método numérico para calcular, primero su velocidad y, posteriormente la distancia recorrida.

I.5.1. Area encerrada por la curva $y = x^2$.

La función $y = x^2$ aparecerá en varios problemas más adelante y por esta razón la estudiaremos en detalle.

Para calcular el área encerrada por una curva sumaremos el área de cada uno de los rectángulos que aparecen en la Figura ?? acotados (superior o inferiormente) por la curva. Este es el procedimiento más elemental, existen otros métodos más sofisticados que contienen errores más pequeños. Consideraremos una de estas otras aproximaciones posteriormente.

Calculemos una cota *inferior* para esta área; sumemos los rectángulos achurados, que se ubican *debajo* de la curva:

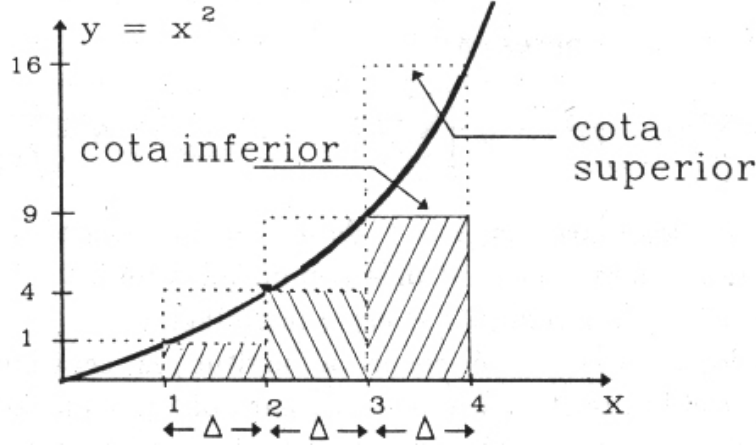


Figura I.13: El área bajo la curva se ha descompuesto en una suma de rectángulos. Una familia de rectángulos dará como resultado un valor mayor para el área buscada, y la otra familia de rectángulos, un valor menor.

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100} (n-1)^2 \cdot \Delta \quad (\text{I.38})$$

Designamos la base del rectángulo que se muestra en la Figura ?? como Δ . El factor $(n-1)^2$ representa el valor mínimo de $y = x^2$ en el intervalo n -ésimo. En otras palabras, trazamos un rectángulo que toque a la curva $y = x^2$ en el punto más bajo de cada uno de los intervalos.

En seguida desarrollamos $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$ y usamos la siguientes propiedades de las sumatorias (válidas si las sumatorias son finitas).

$$\sum_{n=1}^{100} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{100} a_n + \sum_{n=1}^{100} b_n, \quad (\text{I.39})$$

$$\sum_{n=1}^{100} \lambda \bullet a_n = \lambda \sum_{n=1}^{100} a_n, \quad \lambda = \text{constante}. \quad (\text{I.40})$$

La sumatoria se transforma entonces en:

$$\text{Area}_{INF} = \sum_{n=1}^{100} (n-1)^2 \cdot \Delta = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 \cdot \Delta - 2 \sum_{n=1}^{100} n \cdot \Delta + \sum_{n=1}^{100} 1 \cdot \Delta \right].$$

Para simplificar los cálculos, haremos $\Delta = 1$, de esta forma este término no aparece en la sumatoria. En general, para funciones más complicadas que la actual, el valor de Δ se hace depender de n , con el objeto de minimizar el error introducido.

En algunos de los cálculos posteriores –en otros capítulos–, esta longitud, Δ , será incluida en la suma, con el objeto de lograr un resultado exacto.

Volviendo a nuestra sumatoria, observamos que después de esta simplificación, la expresión queda

$$\text{Area}_{INF} = \left[\sum_{n=1}^{100} n^2 - 2 \sum_{n=1}^{100} n + \sum_{n=1}^{100} 1 \right].$$

En la Figura se aprecia que el área denominada con INF es MENOR que la que el área encerrada bajo la curva $y = x^2$, que es la que debemos calcular.

Ahora si tomamos el rectángulo cuya altura corresponde al valor máximo de la función en el intervalo, entonces obtenemos

$$\text{Area}_{SUP} = \sum_{n=1}^{100} n^2. \quad (\text{I.41})$$

Nuevamente hemos tomado la longitud de la base del rectángulo, Δ , igual a la unidad. También, en la Figura se aprecia que el Area_{SUP} es MAYOR que el área que deseamos estimar.

Hemos obtenido una cota superior e inferior para el valor del área encerrada por la curva $y = x^2$. No es difícil aceptar que un valor más cercano al valor exacto asignado al área encerrada bajo esta curva, se obtendrá promediando estas dos cotas.

Se desprende de aquí que para evaluar numéricamente esta área necesitamos, conocer el valor de las sumatorias que han aparecido hasta aquí: $\sum_{n=1}^N n$ y $\sum_{n=1}^N n^2$.

I.5.2. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^N n$

A pesar que el resultado de esta sumatoria es el mismo si N es par o impar, analizaremos ambos casos en forma independiente.

Consideremos primero el caso de N par.

$$\sum_{n=1}^N n = 1 + 2 + \overbrace{3 + 4 + \dots + (N-3) + (N-2) + (N-1) + N}^{(N-1) \text{ términos}}$$

Una de las formas de obtener el valor de esta sumatoria consiste en reagrupar los términos en la forma señalada: aquellos unidos por el extremo de cada una de las llaves indicadas en la fórmula, y posteriormente sumarlos de a pares. El valor que toma cada uno de

estos pares es $(N + 1)$. Ahora si N es par el número de llaves que debemos considerar es $N/2$ puesto que la suma tiene N términos, y el valor de la suma es $N/2$ veces $(N + 1)$:

$$\sum_{n=1}^N n = (N + 1) \frac{N}{2}. \quad (\text{I.42})$$

N impar.

Si N es impar, la suma de cada par de términos tiene el mismo valor que antes $(N + 1)$, **excepto** que ahora al agruparlos permanece uno (el del centro), sin compañero. El valor de este término, es $(N + 1)/2$.

Ejercicio

Compruebe esta afirmación para las sumatorias donde N toma valores pequeños e impares, como $N = 5$ ó $N = 7$.

La expresión que toma la sumatoria es

$$\sum_{n=1}^N n = 1 + 2 + \dots + \overbrace{\frac{(N + 1)}{2}} + \dots + (N - 1) + N$$

Sumamos entonces teniendo en cuenta que el valor del término central es $(N + 1)/2$, y que debe ser sumado en forma aparte. El valor de la sumatoria se obtiene sumando $(N - 1)/2$ veces $(N + 1)$ y añadiendo el término central $(N + 1)/2$. Recuerde que $(N - 1)$ es un número par, y que la suma del primero y el último de este par es $(N + 1)$.

El resultado final es

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n &= (N + 1) \bullet (N - 1)/2 + (N + 1)/2 \\ &= (N^2 - 1)/2 + (N + 1)/2 \\ &= N(N + 1)/2 \end{aligned}$$

Vemos que la expresión es la misma, sea N **par o impar**, de modo que:

$$\sum_{n=1}^N n = N(N + 1)/2 \quad (\text{I.43})$$

El método expuesto se debe a Gauss.

I.5.3. Valor de la sumatoria $\sum_{n=1}^N n^2$.

Para evaluar la cota inferior o superior para el área encerrada bajo la curva, necesitamos conocer el valor de otra sumatoria, aquella que contiene n^2 . Usaremos dos métodos diferentes para evaluar la suma. El procedimiento indicado a continuación es complejo. Lo estudiaremos como una forma de familiarizarnos con la manipulación de las sumatorias.

Incluiremos otro método, más simple, como ejercicio al final de este capítulo.

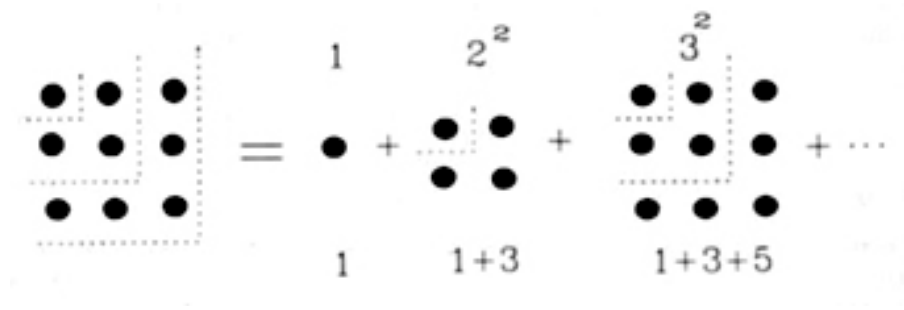


Figura I.14: La Figura muestra los puntos dentro del cuadrado con línea cortada que permite evaluar una suma cualquiera de números impares. Usaremos este esquema para encontrar el valor de $\sum n^2$.

A partir de la Figura, sumando los puntos ubicados dentro del cuadrado con línea cortada, se puede verificar la siguiente igualdad:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & & = 1 \\
 1 + 3 & & = 2^2 \\
 1 + 3 + 5 & & = 3^2 \\
 \dots & & \vdots \\
 1 + 3 + 5 + \dots + (2N - 1) & = & N^2
 \end{array}$$

Los valores ubicados a la derecha del signo igual son precisamente los números que queremos sumar. Sumando los números de la izquierda por columnas, obtenemos:

$$N + 3 \cdot (N - 1) + 5 \cdot (N - 2) + \dots + (2N - 1) \cdot 1 = \sum_{n=1}^N n^2$$

Para obtener este resultado recordemos que hay N filas y, repetimos, que se han sumado columna por columna. En ese mismo orden está escrito el resultado en la ecuación

anterior. También podemos *verificar* que la suma que aparece a la izquierda del signo igual se puede escribir como

$$\underbrace{(1)} \cdot \underbrace{[N]} + \underbrace{(3)} \cdot \underbrace{[N-1]} + \dots + \underbrace{(2N-3)} \cdot \underbrace{[2]} + \underbrace{(2N-1)} \cdot \underbrace{[1]} = \sum_{n=1}^N \underbrace{(2n-1)} \underbrace{[N-(n-1)]}.$$

Las llaves *sobre* los números a la izquierda del signo igual, indican una familia de términos representada por la expresión genérica $(2n-1)$. Este factor se ubica, con la misma identificación, a la derecha del signo igual. Análogamente, los términos con una llave *bajo* el número, son generados por el término señalado a la derecha de la ecuación con una llave similar.

Ejercicio

Verifique que $(2n-1)$ es un número impar para cualquier valor de n y, que en este caso, toma cada uno de los valores de los números que caracterizan a cada columna, exactamente en el mismo orden en que van apareciendo.

Verifique, dando distintos valores de n , que el término entre paréntesis cuadrado reproduce el otro factor de la suma. $\square$

Recordando que esta sumatoria se originó al considerar la sumatoria de n^2 , tenemos

$$\sum_{n=1}^N (2n-1)[N-(n-1)] = \sum_{n=1}^N n^2$$

El resto del cálculo se reduce a separar en un miembro de la ecuación la sumatoria de n^2 y en el otro el resto de los términos.

Desarrollando el miembro de la izquierda, de acuerdo a las reglas establecidas, vale decir: las constantes salen fuera de la sumatoria y la sumatoria de una suma (o resta) es lo mismo que la suma (o resta) de la sumatoria de sus respectivos términos, tenemos

$$N \sum_{n=1}^N (2n-1) - \sum_{n=1}^N (2n-1)(n-1) = \sum_{n=1}^N n^2.$$

Aplicando, nuevamente, las propiedades conocidas de las sumatorias,

$$2N \sum_{n=1}^N n - N \sum_{n=1}^N 1 - \sum_{n=1}^N (2n^2 - 3n + 1) = \sum_{n=1}^N n^2$$

$$2N \sum_{n=1}^N n - N \sum_{n=1}^N 1 - 2 \sum_{n=1}^N n^2 + 3 \sum_{n=1}^N n - \sum_{n=1}^N 1 = \sum_{n=1}^N n^2$$

Ordenando las sumatorias que tienen los mismos sumandos

$$(2N + 3) \sum_{n=1}^N n - (N + 1) \sum_{n=1}^N 1 = 3 \sum_{n=1}^N n^2,$$

y reemplazando el valor obtenido para $\sum_{n=1}^N n$, [??], y recordando que $\sum_{n=1}^N 1 = N$, tenemos:

$$2N^2(N + 1)/2 - (N + 1)N + 3N(N + 1)/2 = 3 \sum_{n=1}^N n^2,$$

y finalmente, haciendo un poco de álgebra obtenemos:

$$\sum_{n=1}^N n^2 = N[(2N + 1)(N + 1)]/6. \quad (\text{I.44})$$

Esta fórmula es válida para cualquier valor de N.

I.5.4. Valor obtenido para el área bajo la curva $y = x^2$.

Con los resultados obtenidos anteriormente estamos capacitados para evaluar las sumatorias que aparecieron en la estimación del área bajo la curva $y = x^2$.

Volvamos entonces a las ecuaciones [??], [??] que correspondían al área evaluada por defecto y por exceso respectivamente.

Uno puede *intuir* que un valor cercano al valor exacto de la superficie bajo la curva entre $x = 0$ y $x = 100$ se puede obtener promediando los valores de la cota superior e inferior encontrados para el área. Para este cálculo tomamos $N = 100$ en las ecuaciones anteriores y evaluamos. (En realidad esto no es lo más cercano al valor verdadero que uno puede obtener pero sí lo más directo). Veamos su valor,

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2}[\text{Area}_{(SUP)} + \text{Area}_{(INF)}] \\ &= \frac{1}{2}[2 \sum_{n=1}^N n^2 - 2 \sum_{n=1}^N n + \sum_{n=1}^N 1] \\ &= N[(2N + 1)(N + 1)]/6 - N(N + 1)/2 + N/2 \\ &= N(N + 1)[(2N + 1)/6 - 1/2] + N/2 \\ &= [N^3/3 + N/6] \end{aligned}$$

Si $N = 100$

$$\simeq \frac{1}{3}10^6 + \frac{100}{6}.$$

El valor exacto de esta sumatoria es $10^6/3$. El error relativo que hemos cometido es del orden de un 0,005 %, como se muestra a continuación.

$$\frac{[\frac{1}{6}10^2]}{[\frac{1}{3}10^6]} \simeq 0,5 \times 10^{-4} = 0,005 \% \quad \text{de error.}$$

Ejercicio

Si definimos Δ como el largo de la base del rectángulo, entonces usando un valor de Δ , constante pero más pequeño, obtenga resultados aún más exactos.

Note que ahora debe incluir Δ en la ecuación inicial para el cálculo del área, pero que éste, por ser constante sale fuera de la sumatoria.

También debe recordar que, Δ más pequeño es lo mismo que dividir el área bajo la curva en rectángulos más esbeltos y que necesariamente se debe cumplir que $N \cdot \Delta = L$, donde L es el largo de la base. $\square$

I.5.5. Método general para evaluar sumatorias del tipo $\sum_{n=1}^N n^k$.

Aquí propondremos un método más simple y más general que el anterior para evaluar las sumatorias del tipo indicado en el encabezamiento de esta sección.

Vamos a reobtener el valor de la sumatoria

$$\sum_{n=1}^N n = 1 + 2 + 3 + \dots + N.$$

El método alternativo propuesto para evaluarla, consiste en calcular la siguiente combinación de sumatorias,

$$\sum_{n=1}^N (n+1)^2 - \sum_{n=1}^N n^2.$$

A pesar que inicialmente esta combinación no parece estar relacionada con la sumatoria que nos interesa, podemos ver que al desarrollar el binomio de la primera sumatoria suceden dos cosas que son de relevancia en nuestro caso, primero

$$\sum_{n=1}^N (n+1)^2 - \sum_{n=1}^N n^2 = \sum_{n=1}^N (n^2 + 2n + 1) - \sum_{n=1}^N n^2 = \sum_{n=1}^N (2n + 1). \quad (\text{I.45})$$

Donde hemos usado la asociatividad de la sumatoria (la misma propiedad de los números reales) [??], y con ello hemos cancelado las sumatorias que contenían n^2 .

En segundo lugar, la resta de sumatorias que aparece a la izquierda de la última ecuación puede ser evaluada fácilmente si escribimos cada uno de sus términos en columnas separadas como se indica a continuación:

$$\begin{array}{rcl}
 2^2 & - & 1^2 \quad \text{primer término de la sumatoria,} \\
 3^2 & - & 2^2 \quad \text{segundo término de la sumatoria,} \\
 4^2 & - & 3^2 \quad \text{tercer término de la sumatoria,} \\
 & \vdots & \vdots \\
 (N+1)^2 & - & N^2 \quad \text{N-ésimo término de la sumatoria.} \\
 \hline
 (N+1)^2 & - & 1
 \end{array}$$

Es fácil ver que los términos de la suma se van anulando entre ellos, permaneciendo sólo el primero y el último, cuya diferencia es el resultado de la suma. El valor de la suma es: $N(N+2)$.

Por otra parte el término de la derecha de la ecuación [??] es:

$$2\left(\sum_{n=1}^N n\right) + \sum_{n=1}^N 1 = 2\left(\sum_{n=1}^N n\right) + N.$$

De aquí se puede despejar $\sum_{n=1}^{n=N} n$ que es la sumatoria cuyo resultado buscamos:

$$\sum_{n=1}^N n = N(N+1)/2 \quad (\text{I.46})$$

Ejercicio

Usando este método, reobtenga el valor de la siguiente sumatoria:

$$\sum_{n=1}^N n^2 = N(2N+1)(N+1)/6.$$

Indicación: use la ecuación [??], pero incluyendo potencias cúbicas en lugar de las cuadráticas que allí aparecen. $\square$

Con este método se puede calcular la sumatoria de una potencia arbitraria de n . Para ello se debe conocer el valor de la sumatoria de una potencia más baja que la buscada y tomar la diferencia entre las sumatorias de una potencia inmediatamente superior, en la forma ya señalada.

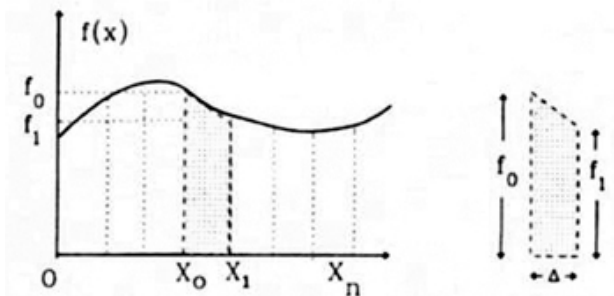


Figura I.15: Regla de Trapecio. Tomando un conjunto de puntos de la curva, se calcula el área como la suma del área de los trapecios construidos uniendo los puntos mediante rectas.

I.5.6. Regla del trapecio.

A continuación incluimos la fórmula usada para calcular numéricamente el área bajo una curva $y = f(x)$ usando trapecios (en lugar de rectángulos) como unidades elementales. De cualquiera de las Figuras de esta Sección, se desprende que la idea es acomodar un trapecio bajo la curva, apoyando uno de sus catetos en el eje x y el cateto opuesto aproxima la curva mediante una recta.

Si queremos calcular el valor del área bajo la curva entre los puntos $x = a$ y $x = b$, dividimos dicho segmento en $(N - 1)$ segmentos mediante los puntos x_n con $0 \leq n \leq N$. El valor de la función en cada uno de sus puntos se designa como $f_n \equiv f(x_n)$, es decir $f_0 \equiv f(x_0) = f(a)$, $f_1 \equiv f(x_1) \dots f_N \equiv f(x_N) = f(b)$, donde hemos identificado x_0 con a y x_n con b .

Recordemos que el área de un trapecio es la semisuma de sus bases multiplicada por la altura. La fórmula para el área de un trapecio cualquiera dentro del tramo de interés es:

$$\text{Area del trapecio} = \frac{1}{2} [f_{n-1} + f_n] (x_n - x_{n-1}).$$

En este caso, el trapecio está puesto en forma vertical: la base del trapecio es cada una de

las verticales señaladas como $f_0, f_1, f_2, \dots, f_N$, cuyo valor es el valor que toma la función $f(x)$ para $x = 0, x = 1, x = 2 \dots x = N$ respectivamente (ver Figura).

Si sumamos el área de cada uno de los trapecios de la Figura, suponiendo que todos los trazos son iguales: $[x_n - x_{n-1}] \equiv \Delta$, para simplificar el álgebra, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_a^b f(x) \Delta &\simeq \Delta[f_0 + f_1]/2 + \\ &\Delta[f_1 + f_2]/2 + \Delta[f_2 + f_3]/2 + \dots \\ &+ \Delta[f_{N-2} + f_{N-1}]/2 + \Delta[f_{N-1} + f_N]/2. \\ &= \Delta \left\{ 1/2 \cdot f_0 + \left[\sum_{i=1}^{N-1} f_i \right] + 1/2 \cdot f_N \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

La suma $\left\{ \sum_a^b f(x) \Delta \right\}$ indica el valor del área encerrada entre $x = a$ y $x = b$ por la función $f(x)$.

